This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

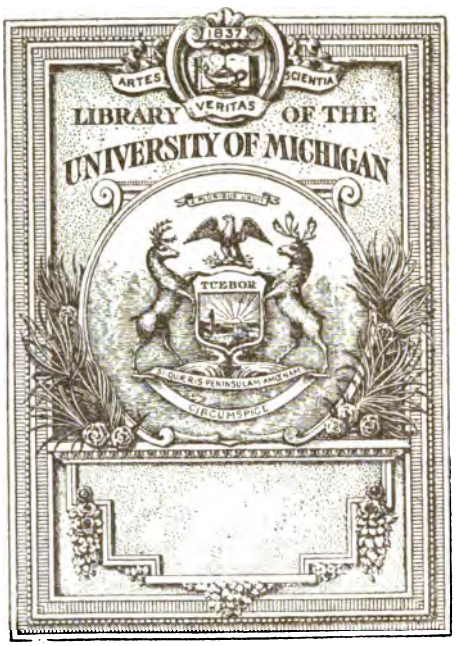
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
121
.B86
1849

2900

Alexander Ziwet

Lehrbuch

der

Statik fester Körper,

in elementarer Darstellung
mit besonderer Rücksicht auf technische Anwendung.

QA
821
.B86
1849

Zum Gebrauche

für den Unterricht an der Königl. Allgemeinen Bauschule und am Königl. Gewerb-Institut.

Im Auftrage des Königl. Ministeriums
für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten

verfaßt

von

Adolph Ferd. Wencesl. Brix,

Fabriken-Kommissions-Rath und Mitglied der Königl. technischen Deputation für Gewerbe; Director der Königl. Normal-Eichungs-Kommission; Mitglied der Prüfungs-Kommission für angehende Staats-Baubeamte; Lehrer der angewandten Mathematik an der Allgem. Bauschule und am Gewerb-Institut zu Berlin; Ritter des rothen Adlerordens vierter Klasse.

Zweite, gänzlich umgearbeitete Auflage.

Erste Abtheilung:
Die Lehren der reinen Statik enthaltend,
mit 12 Figurentafeln und einem Anhange.

Berlin, 1849.
In Commission bei Carl Reimarus
(Gropius'sche Buch- u. Kunsthandlung).

Prof. Alex. Zinvet
gf.
2-1-1923

QA
821
.B86
1849

Vorrede.

Das Lehrbuch, dessen zweite Auflage ich hiermit dem betheiligten Publikum vorlege, diente seit seinem ersten Erscheinen im Jahre 1831 als Leitfaden bei dem Unterricht am Königl. Gewerb-Institut, wurde aber bald darauf auch bei der Allgemeinen Bauschule als solches eingeführt. Nachdem die erste Auflage vor länger denn sechs Jahren vergriffen war, unterzog ich mich im Auftrage des Königl. Ministeriums der Bearbeitung einer neuen Auflage, deren Druck jedoch nur mit vielen, nicht selten lange dauernden, Unterbrechungen fortgesetzt werden konnte. Die Ursachen dieser Störungen, die ich selbst am meisten zu beklagen habe, liegen größtentheils in meinen vielfachen Berufsgeschäften, sowie in wissenschaftlichen und literarischen Arbeiten anderer Art, welche zwischendurch ihre Erledigung finden mußten. Rechnet man noch die politischen Ereignisse des vorigen Jahres mit ihrem Sinn und Gemüth verwirrenden Gefolge hinzu, Ereignisse, welche so manches ausgestreute Saamenkorn im Keime erstickten, und manche, die bereits aufgegangen waren, ihrer besten Blüthen beraubten, so darf ich mich um so mehr für hinreichend entschuldigt halten.

416805

Was nun das vorliegende Buch betrifft, so ist dasselbe nicht bloß als eine verbesserte Ausgabe seines Vorgängers, sondern vielmehr als eine ganz neue Bearbeitung zu betrachten, wenn gleich der frühere Plan im Allgemeinen beibehalten worden ist. Letzteres gilt namentlich in Bezug auf die elementare Darstellungsweise, deren ich mich schon in der früheren Ausgabe bedient, und von deren Zweckmäßigkeit — sofern es sich nämlich um die Ausbildung von Technikern handelt — ich mich während meiner nunmehr einundzwanzigjährigen Lehrerpraxis immer mehr überzeugt habe. In dieser Hinsicht können verschiedene Ansichten stattfinden; indeß gereicht es mir zur Genugthuung, daß auch in den meisten der später erschienenen Werke, deren Verfassern als Lehrern an technischen Bildungsanstalten wohl ein Urtheil zustehen dürfte, ein gleicher Weg verfolgt wird. Außerdem aber war die Ausschließung der höhern Analysis durch den Lehrplan der Anstalten bedingt, für welche dieses Buch zunächst bestimmt ist.

Über das Materielle des Inhaltes bemerke ich nur, daß bei der Entwicklung der allgemeinen Lehren vom Gleichgewichte der Kräfte auch die durch Poinsot eingeführten Kräftepaare im zweiten und dritten Kapitel, ohne jedoch die Theorie derselben vollständig aufzunehmen, ihre angemessene Berücksichtigung gefunden haben. Dagegen ist Vieles, was sich im Laufe der Zeit als entbehrlich erwiesen hat, weggelassen, Anderes aber durch eine möglichst gedrängte Darstellung, unbeschadet der so nöthigen Deutlichkeit, auf einen kleineren Raum beschränkt, damit für solche Gegenstände, die von gebildeten Praktikern in der früheren Auflage ungern vermißt wurden, der nöthige Raum gewonnen würde.

Auf diese Weise ist es mir gelungen, fast alle Kapitel wesentlich vervollständigen und die Anwendung der darin entwickelten Gesetze durch passend gewählte Beispiele erläutern, namentlich aber im sechsten Kapitel die Lehre vom Gleichgewicht und von der Stabilität schwerer Körper, so wie die Theorie der Waagen und Kraftmesser, im siebenten Kapitel die dem Praktiker so wichtige elastische Curve mit ihren Anwendungen, hinzu fügen zu können, ohne die Bogenzahl um mehr denn vier zu vergrößern, während die Anzahl der Figurentafeln sogar um eine vermindert worden ist.

Um Jedem das Seine zu lassen, habe ich überall die Quellen angegeben, aus denen gewisse Lehren entlehnt, oder worin ausführlichere Entwicklungen, als ich hier füglich geben konnte, enthalten sind. Die Hervorhebung dessen, was in diesem Buche mir vielleicht eigenthümlich ist, halte ich dagegen um so mehr für überflüssig, als unpartheiische und gerechte Sachkenner, deren tadelnde wie zustimmende Bemerkungen mir jedenfalls willkommen sein werden, in fraglicher Hinsicht keiner Andeutungen bedürfen. Zur Vermeidung von Mißverständnissen bin ich es mir aber selbst schuldig, darauf hinzuweisen, daß ein großer Theil des vorliegenden Werkes aus den Eingangs erwähnten Ursachen schon seit mehreren Jahren die Presse verlassen hat und sich gedruckt in den Händen meiner ehemaligen Zuhörer befindet*). Es möge daher nicht als eine Absichtlichkeit angesehen werden, wenn etwa in der Darstellungsweise hin und wieder Übereinstimmungen mit neueren Schriftstellern, ohne daß dieselben namentlich angeführt sind, gefunden werden sollten. So stimmt

*) Der Anhang schon seit Mitte 1843.

z. B. meine Darstellung der Lehre von der Stabilität in manchen Punkten mit der überein, die Herr Professor Weisbach im ersten Theil seines schätzbaren Lehrbuchs der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik vorträgt, was man nur deshalb mit Stillschweigen übergegangen findet, weil der betreffende Bogen meines Buches schon gedruckt war, als mir das Buch des Herrn Weisbach zu Händen kam. Übrigens ist mein Streben mehr darauf gerichtet gewesen, wahrhaft nützlich als originell zu sein. Ist mir jenes einigermaßen gelungen, so leiste ich auf dieses um so lieber Verzicht, als es meist sehr wohlfeil ist, eine gewisse Originalität zur Schau zu tragen, welche — wie die Erfahrung oft genug lehrt — ihren Ursprung nur in einem hinreichend weiten Gewissen hat.

Ich schließe diese Vorrede mit dem Wunsche, daß die vorliegende Arbeit eine nicht minder günstige Anerkennung finden möge, als der ersten Auflage, nach den zu meiner Kenntniß gekommenen Beurtheilungen, ihrer Zeit zu Theil geworden ist.

Berlin, im Mai 1849.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung..... Seite 1 — 6

Erste Abtheilung der Statik.

Allgemeine Lehren vom Gleichgewicht der Kräfte.

Vorläufige Begriffe..... S. 9—14

Erstes Kapitel.

Von Kräften, die auf einen und denselben materiellen Punkt wirken..... = 15—85
I. Wenn die Richtungslinien der Kräfte alle in derselben Ebene enthalten sind..... = 15
II. Wenn die Richtungslinien der Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen..... = 68

Zweites Kapitel.

Von Kräften, die nach parallelen Richtungen auf ein System von Punkten wirken..... = 86—135
I. Parallele Kräfte in einer Eben..... = 86
II. Parallele Kräfte in verschiedenen Ebenen..... = 121

Drittes Kapitel.

Von Kräften, die nach beliebigen Richtungen auf ein System von Punkten wirken..... = 136—166
I. Nicht parallele Kräfte in einer Ebene..... = 136
II. Nicht parallele Kräfte im Raume..... = 150

Viertes Kapitel.

Vom Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten..... = 167—215
I. Beweis des Prinzips für ein festes System..... = 170
II. Beweis des Prinzips für ein loses System..... = 188
III. Über die praktische Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten..... = 197

Fünftes Kapitel.

Anwendung der allgemeinen Gesetze des Gleichgewichtes auf die Schwere ..... S. 214—313
Von der Schwere und vom Schwerpunkte ..... " 214
I. Bestimmung der Schwerpunkte von Linien ..... " 221
II. " " " ebener Flächen ..... " 236
III. " " " von Oberflächen ..... " 265
IV. " " " von Körpern ..... " 273
V. Versch. Anwendungen der Lehre vom Schwerpunkte " 295

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewicht schwerer Körper und von den einfachen Maschinen ..... " 314 — 407
I. Gleichgewicht schwerer Körper im Allgemeinen ..... " 314
II. Stabilität schwerer Körper ..... " 328
III. Von den einfachen Maschinen ..... " 343
IV. Von den Waagen und Kraftmessern ..... " 381

Siebentes Kapitel.

Vom Gleichgewicht der Kräfte an vollkommen biegsamen und elastischen Körpern ..... " 408 — 470
I. Von den Seilmaschinen ..... " 408
II. Von der Kettenlinie ..... " 427
III. Von der elastischen Linie ..... " 441

Anhang.

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Theorien aus der niedern Analysis, Curvenlehre und Stereometrie enthaltend.

Einleitung.

1.

Die sinnlich wahrnehmbaren Dinge der Außenwelt werden besonders dadurch Gegenstände unserer Erfahrung, daß sie einen Raum erfüllen, und in demselben so vorhanden sind, daß kein Zweites derselben Art denselben Raum einnehmen kann. Das, was den Raum erfüllt, heißt Materie, und diejenige Eigenschaft derselben, vermöge welcher sie den Raum mit Ausschließung einer jeden andern Materie zu erfüllen vermag, nennt man ihre Undurchdringlichkeit.

Eine gesonderte Materie, die einen begrenzten Raum einnimmt, heißt ein physischer Körper oder ein Körper schlechthin.

Den Raum, den ein Körper einnimmt, ohne Rücksicht auf die geometrische Größe desselben, nennt man seinen Ort. Hiebei hat man gewöhnlich nur einen bestimmten Punkt des Raumes im Auge, den man auf andere feste Punkte bezieht.

2.

In Beziehung auf den Raum sind für jeden Körper zweierlei Zustände denkbar: Entweder nimmt derselbe fortwährend einen und denselben Raum ein, d. h. er beharret an demselben Orte; oder er wechselt seinen Raum, indem er

allmählig in andere Räume übergeht, d. h. es findet eine ſtetige Veränderung des Ortes Statt.

Das Beharren eines Körpers an demſelben Orte, nennt man den Zuſtand der **Ruhe**; die ſtetige Veränderung des Ortes: den Zuſtand der **Bewegung**.

3.

Die Begriffe von Ruhe und Bewegung ſind einander direct entgegengeſetzt; wenn man den einen Zuſtand läugnet, ſo giebt man den anderen unbedingt zu; und umgekehrt, behauptet man den einen Zuſtand, ſo läugnet man dadurch den andern. Ein Körper kann daher den einen Zuſtand nicht anders aufgeben, als indem er unmittelbar in den andern übergeht. Nun aber muß hier als Grundſatz aufgeſtellt werden, **daß alle Körper in dem Zuſtande der Ruhe oder der Bewegung beharren, in welchem ſie ſind***). Dieſe Gleichgültigkeit der Materie gegen Ruhe und Bewegung iſt eine durch Erfahrung beſtätigte Thatſache, und heißt **Trägheit** oder **Beharrungsvermögen**.

Soll daher ein Körper aus Ruhe in Bewegung verſetzt, oder ſoll eine vorhandene Bewegung aufgehoben, oder auch nur in irgend einer Beziehung modificirt werden, ſo muß jedesmal noch ein thätiges Princip hinzugedacht werden, welches als Urſache dieſer Zuſtandsveränderung zu betrachten iſt, und dieſes thätige Princip heißt **Kraft**.

4.

Die Kräfte, als Urſachen der Zuſtandsveränderungen eines Körpers, ſind uns nur durch ihre Wirkungen bekannt. Was aber die Natur der Kräfte ſelbſt anbelangt, ſo gehört deren Unterſuchung nicht hierher. Überdies iſt die Kennt-

*) Dies iſt das erſte ſogenannte **Bewegungs-Geſetz**, welches **Newton** als einen allgemeinen dynamiſchen Grundſatz aufſtellte.

niß derselben für unseren Zweck ganz unwesentlich; denn die Vergleichungen, welche wir in Bezug auf die Kräfte anzustellen haben, sind nur Vergleichungen zwischen ihren Wirkungen; und nur in so fern schließen wir von diesen auf jene zurück, daß wir die verschiedenen Modificationen, welche in den Wirkungen wahrgenommen werden, als in den Kräften begründet ansehen.

Verschiedenartige Wirkungen berechtigen uns daher, auf eine entsprechende Verschiedenartigkeit der zum Grunde liegenden Ursachen, d. h. der Kräfte, zurückzuschließen.

5.

Wenn mehrere Kräfte gleichzeitig auf einen Körper wirken, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder der Körper ändert seinen Zustand, oder er bleibt in demselben Zustande, worin er war. Im letzteren Falle sagt man: die Kräfte seien mit einander im Gleichgewicht, oder: der Körper befinde sich unter Einwirkung der Kräfte im Gleichgewichte. Das Gleichgewicht besteht also darin, daß die Wirkungen verschiedener Kräfte sich gegenseitig aufheben, indem jede einzelne Kraft das Streben hat, den Zustand der Ruhe oder der Bewegung des Körpers zu ändern.

Findet das Gleichgewicht an einem ruhenden oder bewegten Körper Statt, so nennt man es im ersten Falle ein Gleichgewicht der Ruhe, im andern: ein Gleichgewicht der Bewegung.

Die Wissenschaft, welche von den Kräften im Allgemeinen handelt, heißt Dynamik (von *Δύναμις* = Kraft). Diese zerfällt, je nachdem die Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, oder nicht, in die beiden Haupt-Abtheilungen: Statik und Mechanik.

Statik, im weiteren Sinne, ist die Lehre vom Gleich-

gewicht; Mechanik, im weiteren Sinne, die Lehre von der Bewegung der Körper.

6.

Die Art und Weise, wie die materiellen Theile eines Körpers unter einander zusammenhängen, nennt man den Aggregatzustand. Gewöhnlich werden in der Physik drei Aggregatzustände angenommen; nemlich der Zustand der Festigkeit oder Starrheit, der Zustand der tropfbaren Flüssigkeit und der Zustand der elastischen Flüssigkeit oder der Expansion.

Ohne Rücksicht auf die besondern Modificationen, unter welchen diese Zustände in der Natur wahrgenommen werden, fassen wir dieselben im mathematischen Sinne folgendermaßen auf:

Fest oder starr nennen wir einen Körper, dessen Theile so zusammenhängen, daß sie durch keine noch so große Kraft, weder von einander getrennt, noch übereinander verschoben werden können.

Diesem absoluten Zustande nähern sich die Naturkörper nur, je nach ihrer Beschaffenheit, in einem mehr oder mindern Grade, und bei der praktischen Anwendung soll dies auch gehörigen Ortes berücksichtiget werden.

Tropfbar-flüssig, oder flüssig schlechthin, nennen wir solche Körper, in welchen der Zusammenhang der Theile von der Art ist, daß jede noch so kleine Kraft hinreicht, eine Trennung der Theile zu bewirken oder ihre gegenseitige Lage zu ändern; jedoch ohne daß hiebei die Größe des Raumes, den die Materie des Körpers einnimmt, geändert werden kann.

Die Flüssigkeit, welche dieser Definition am meisten entspricht, ist das Wasser (Ὕδωρ).

Elastisch-flüssig oder expansibel heißen diejenigen Körper, welche in der leichten Verschiebbarkeit der Theile

durch jede noch so kleine Kraft, mit den flüssigen Körpern übereinstimmen; sich aber von diesen wieder dadurch unterscheiden, daß mit der gegenseitigen Lage der Theile auch zugleich die Größe des erfüllten Raumes geändert werden kann, und bei welchen sich überdies noch ein fortwährendes Streben bemerkbar macht, genau den vorigen Raum wieder einzunehmen.

Der gemeinste Naturkörper dieser Art ist die atmosphärische Luft (Aër), und daher wollen wir in der Folge die elastisch-flüssigen Körper, der Kürze wegen, luftförmige Körper nennen.

7.

Nach den so eben genannten drei Aggregatzuständen der Körper zerfällt die Statik sowohl, als auch die Mechanik, jede für sich, in drei Unterabtheilungen, und zwar nach folgendem Schema:

I. Statik.

1) Statik fester Körper (Geostatik), oder Statik im engeren Sinne; d. i. die Lehre vom Gleichgewicht der starren Körper.
2) Statik flüssiger Körper (Hydrostatik); d. i. die Lehre vom Gleichgewicht der tropfbar-flüssigen Körper.
3) Statik luftförmiger Körper (Aërostatik); d. i. die Lehre vom Gleichgewicht der elastisch-flüssigen Körper.

Diese drei Unterabtheilungen begreift man unter dem Namen der statischen Wissenschaften.

II. Mechanik.

1) Mechanik fester Körper (Geomechanik), oder Mechanik im engeren Sinne; d. i. die Lehre von der Bewegung fester Körper.
2) Mechanik flüssiger Körper (Hydromechanik, Hy-

draulik); d. i. die Lehre von der Bewegung tropfbar-flüssiger Körper.

3) Mechanik luftförmiger Körper (Aëromechanik, Pneumatik); d. i. die Lehre von der Bewegung der elastisch-flüssigen Körper.

Diese drei Abtheilungen bilden den Inbegriff der mechanischen Wissenschaften.

Werden Statik und Mechanik fester Körper zusammen als eine Wissenschaft behandelt, so erhalten sie den gemeinschaftlichen Namen Geodynamik. Eben so führt die Vereinigung der Hydrostatik und der Hydraulik zu einer Wissenschaft den gemeinschaftlichen Namen Hydrodynamik, und die Verbindung der Aërostatik und der Pneumatik den gemeinschaftlichen Namen Aërodynamik oder Aërometrie.

Nach der Reihenfolge dieser letzteren Eintheilung sollen die dynamischen Lehren in dem gegenwärtigen Lehrbuche abgehandelt werden.

Erste Abtheilung der Statik.

Allgemeine Lehren

vom

Gleichgewicht der Kräfte.

Vorläufige Begriffe.

§. 1.

Die Aufgabe der Statik im weiteren Sinne besteht, dem Vorhergehenden gemäß, ganz allgemein darin: die Bedingungen zu ermitteln, welche die Kräfte rücksichtlich ihrer Beziehung zu einander zu erfüllen haben, damit unter ihnen ein Gleichgewicht stattfinden kann.

Ehe wir aber die dahin führenden Untersuchungen anstellen können, ist es zweckdienlich, vorher noch einige Begriffe und Grundsätze festzustellen.

§. 2.

Der Raum ist bis ins Unendliche theilbar, und eben so die Materie, welche ihn erfüllt; wenigstens in der Vorstellung. Denkt man sich eine begrenzte Materie bis ins Unendliche getheilt, so sollen die dadurch entstehenden unendlich kleinen Theilchen *materielle Punkte* heißen.

Unter einem *System von Punkten* soll eine gewisse Anzahl materieller Punkte verstanden werden, welche einen solchen Zusammenhang unter einander haben, daß die Wirkung einer beliebigen Kraft auf einen dieser Punkte auch zu allen übrigen fortgepflanzt wird.

Ist der Zusammenhang unter den materiellen Punkten von der Art, daß ihre gegenseitige Lage im Systeme durch

keine Kraft geändert werden kann, so heißt es ein *festes*, sonst aber ein *bewegliches* System.

§. 3.

Jede Anzahl von Kräften, die auf irgend eine Weise in ein gegebenes System von Punkten, oder auch nur auf einen Punkt wirken, soll ein *System von Kräften* heißen.

Befindet sich ein solches System im Gleichgewichte, so zeigt sich die Wirkung einer jeden Kraft desselben in einem gewissen Druck oder Zug, indem sie das Bestreben, den ihrer Einwirkung unterworfenen Punkt in Bewegung zu setzen, nicht aufgiebt. Die Stärke dieser Wirkung, welche bei der einen Kraft größer oder kleiner sein kann, als bei einer andern, soll die *Intensität* der Kraft heißen, und die gerade Linie, in welcher sie den materiellen Punkt, auf den sie wirkt, fortbewegen würde, wenn derselbe ihrer Einwirkung freie Folge leisten könnte, nehmen wir als die *Richtungslinie* der Kraft an.

Unter *Angriffspunkt* der Kraft verstehen wir denjenigen Punkt eines Körpers, wo die unmittelbare Einwirkung stattfindet. Es ist klar, daß dieser Punkt jedesmal in der Richtungslinie der Kraft liegen muß, also niemals außerhalb derselben angenommen werden darf.

Intensität, Richtung und Angriffspunkt sind demnach die drei Elemente, in welchen die Verschiedenheit zwischen den Kräften, die in der Statik betrachtet werden, nur begründet sein kann, und auf welche also bei Bestimmung der Kräfte Rücksicht zu nehmen ist.

§. 4.

Die Intensität ist dem Vorhergehenden gemäß eine Größe, die wie jede andere Größe durch eine Einheit ihrer eigenen Gattung, hier also durch eine bestimmte, zur Einheit angenommenen Druckkraft, gemessen werden muß. Für

die praktische Anwendung ist es am bequemsten, die Kräfte mit Gewichten zu vergleichen, und demgemäß die Einheit des Gewichts als Maaß der Kräfte anzunehmen. Dadurch erhält man Zahlen, die bei den statischen Berechnungen die Intensitäten der Kräfte vertreten, so wie man die letzteren in der geometrischen Construction auch durch gerade Linien, welche jenen Zahlen proportional sind, darstellen kann. — Diese graphische Darstellung, von der wir in der Folge häufig Gebrauch machen werden, gewährt außerdem noch den Vortheil, daß dadurch zugleich die Richtung einer Kraft versinnlicht werden kann; indem man nemlich die geradlinigen Stücke, welche die Intensitäten der Kräfte vorstellen sollen, auf den Richtungslinien derselben abgeschnitten denkt.

Was die Bestimmung der Richtungslinie und des in ihr befindlichen Angriffspunktes betrifft, so geschieht dieselbe auf ganz gleiche Weise, wie man in der Geometrie die Lage einer geraden Linie überhaupt zu bestimmen pflegt. Die dazu dienenden Gleichungen sind im vierten Abschnitte des Anhanges unter No. 30 bis 32 zusammengestellt, und müssen also hier als bekannt vorausgesetzt werden.

§. 5.

Grundsatz. Sind mehrere bestimmte Kräfte an einem gegebenen System von Punkten im Gleichgewicht, so ist dasselbe in Bezug auf jede andere Kraft als vollkommen frei zu betrachten; d. h. jede andere Kraft, die außer den vorigen noch auf das System wirkt, muß das Gleichgewicht aufheben, und eine entsprechende Änderung im Zustande des Systems hervorbringen.

§. 6.

Aus dem vorigen Grundsatze folgt:

1) Befindet sich ein System von Punkten unter der Einwirkung mehrerer Kräfte im Gleichgewicht, so wird

daſſelbe nicht geſtört, wenn man noch andere Syſteme von Kräften, von denen jedes für ſich ein Gleichgewicht bedingt, an demſelben Syſtem von Punkten anbringt.

2) Das Gleichgewicht, welches zwiſchen den ſämmtlichen Kräften, die auf ein Syſtem von Punkten wirken, ſtattfindet, wird ebenfalls nicht geſtört, wenn man von dieſen Kräften mehrere, die unter einander im Gleichgewichte ſind, hinwegnimmt.

§. 7.

Wenn aber ein feſtes Syſtem von Punkten unter der Einwirkung von n Kräften im Gleichgewicht iſt, und man denkt ſich eine derſelben hinweggenommen, ohne daß etwas an den übrigen, in Bezug auf Richtung, Intenſität und Angriffspunkt geändert wird, ſo wird dadurch das Gleichgewicht aufgehoben. Denn wollte man annehmen, daß das Gleichgewicht unter den $n-1$ Kräften noch fortbeſtände, ſo würde die hinweggenommene Kraft, wenn ſie in derſelben Art wie zuvor wieder auf das Syſtem wirkte, das Gleichgewicht deſſelben aufheben; was der Vorausſetzung widerſpricht.

§. 8.

Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar: daß, wenn mehrere Kräfte mit einander im Gleichgewichte ſind, alsdann jede einzelne von ihnen zu betrachten iſt als den übrigen das Gleichgewicht haltend. Wenn daher ein Syſtem von Punkten unter der Einwirkung mehrerer Kräfte *nicht* im Gleichgewicht iſt, ſo kann im *Allgemeinen* immer eine andere Kraft gedacht werden, die mit den erſten das Gleichgewicht herſtellt.

In jedem *beſondern* Falle iſt zwar, wie ſich ſpäter zeigen wird, eine einzelne Kraft zur Herſtellung des mangelnden Gleichgewichtes nicht immer hinreichend. Doch müſſen wir hievon einſtweilen abſtrahiren, da ſolche Aus-

nahmefälle an ihrem Orte des Weiteren erörtert werden sollen.

§. 9.

Wenn zwei Systeme von Kräften sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, und man denkt sich an die Stelle des einen von ihnen eine einzelne Kraft gesetzt, welche mit den Kräften des andern Systems dasselbe Gleichgewicht bedingt, welches vorhin unter beiden Systemen stattfand, so soll diese einzelne Kraft die Mittelkraft von den Kräften des einen, und die entgegengesetzte Mittelkraft von denen des andern Systems heißen.

Hiernach hat man sich unter Mittelkraft eine solche zu denken, welche die Wirkung von mehreren anderen Kräften vollkommen zu ersetzen im Stande ist; so wie unter entgegengesetzter Mittelkraft diejenige zu verstehen ist, die mit mehreren andern Kräften ein Gleichgewicht hervorbringt, welches diese für sich allein nicht erzeugen können.

§. 10.

Sind also mehrere Kräfte mit einander im Gleichgewichte, so ist ihre Mittelkraft gleich Null; und man kann jede einzelne von ihnen als die entgegengesetzte Mittelkraft aller andern betrachten.

Umgekehrt, wenn von einem System von Kräften die Mittelkraft gleich Null ist, oder wenn irgend eine Kraft als die entgegengesetzte Mittelkraft aller übrigen Kräfte auftritt, so ist das System allemal im Gleichgewichte.

§. 11.

Die Kräfte, von welchen eine gewisse andere Kraft die Mittelkraft ist, sollen die Seitenkräfte dieser letzteren genannt werden.

Die Bestimmung der Mittelkraft aus den Seitenkräften nennt man Zusammensetzung der Kräfte. Das umge-

kehrte Verfahren, nemlich die Angabe mehrerer Seitenkräfte, welche vereinigt dieselbe Wirkung hervorbringen wie eine gegebene Kraft, heißt das Zerlegen der Kräfte.

Anmerkung. Statt der deutschen Benennungen: Mittelkraft und Seitenkräfte findet man in manchen Schriften die aus der französischen Sprache entlehnten Ausdrücke: Resultirende oder Resultante und Componenten oder Composanten gebraucht. Die entgegengesetzte Mittelkraft wird dann Äquipollente, auch wohl Opponente genannt.

§. 12.

Um bei den folgenden Untersuchungen von dem Einfachen zum Zusammengesetzten überzugehen, wollen wir unsere Betrachtungen mit Kräften anheben, die an einem und demselben materiellen Punkte wirksam sind. Hierauf werden wir zu einem Systeme von Punkten übergehen, welches der Einwirkung einer beliebigen Anzahl von Kräften unterworfen ist, und dabei zuerst die Bedingung machen, daß das in Betracht gezogene System ein festes sei.

In so fern die gegenseitigen Entfernungen zwischen den materiellen Punkten eines solchen festen Systemes als beliebig zu betrachten sind, können wir dasselbe als den allgemeinsten Begriff eines festen Körpers auffassen, indem wir dabei von der Schwere und andern physischen Einwirkungen gänzlich abstrahiren. Der Übergang zu den festen Körpern ins Besondere geschieht dann leicht dadurch, daß wir die Anzahl der materiellen Punkte unendlich groß, und ihre gegenseitigen Entfernungen unendlich klein annehmen.

Erstes Kapitel.

Von Kräften, welche auf einen und denselben materiellen Punkt wirken.

I. Wenn die Richtungslinien der Kräfte alle in derselben Ebene enthalten sind.

§. 13.

Gleichgewicht zwischen zwei Kräften an einem materiellen Punkte.

Es liegt schon in dem Begriff von Kraft, daß eine einzelne Kraft für sich allein kein Gleichgewicht hervorbringen kann. Der einfachste Fall, welcher hier in Betrachtung kommt, ist also derjenige, wo zwei Kräfte an demselben Punkte angebracht sind, und in dieser Hinsicht finden folgende Grundsätze Statt:

1) Zwei Kräfte von ungleichen Intensitäten, die in derselben geraden Linie nach entgegengesetzten Richtungen auf einen materiellen Punkt wirken, können kein Gleichgewicht erzeugen.
2) Zwei Kräfte, die unter einem beliebigen schiefen Winkel (kleiner als 180 Grad) auf einen Punkt wirken, können denselben ebenfalls nicht im Gleichgewicht erhalten.
3) Zwei Kräfte von gleichen Intensitäten, die nach gerade entgegengesetzten Richtungen an einem materiellen Punkte wirken, sind mit einander im Gleichgewichte.
4) Umgekehrt sind zwei Kräfte einander gleich, wenn sie, in gerade entgegengesetzter Richtung an einem Punkt angebracht, sich das Gleichgewicht halten.

§. 14.

Von einem beliebigen System von Kräften, in welchem kein Gleichgewicht vorhanden, ist die Mittelkraft der entgegengesetzten Mittelkraft gleich, aber gerade entgegengesetzt.

Denn die Seitenkräfte sind mit der entgegengesetzten Mittelkraft im Gleichgewicht. Da nun die Mittelkraft diese vereinte Wirkung der Seitenkräfte in jeder Beziehung ersetzen soll, so muß sie mit jener ebenfalls im Gleichgewicht sein; was aber nur unter der anfänglich ausgesprochenen Bedingung möglich ist.

§. 15.

Wirkt eine Kraft **A** nach der Richtung **MA** (Fig. 1.) auf den Punkt **M**, so muß nach der entgegengesetzten Richtung **MB** eine Kraft **B=A** angebracht werden, um die Wirkung der ersten aufzuheben. Eben so ist für jeden andern Punkt, wie **M'**, **M"** ꝛc. in der Richtungslinie der Kraft **A**, dieselbe Kraft **B** erforderlich, um die erste im Gleichgewicht zu erhalten.

Hieraus folgt: daß es in Bezug auf die Wirkung einer Kraft ganz gleichgültig ist, in welchem Punkt ihrer Richtungslinie der Angriffspunkt gedacht wird. Dabei hat man sich aber die Richtungslinie als unzerreißbar vorzustellen, damit die Wirkung der Kraft auf einen Punkt in ihr, zu jedem andern, den man als Angriffspunkt zu wählen für zweckmäßig erachtet, unmittelbar fortgepflanzt werde.

§. 16.

Beliebig viele Kräfte, die in einer und derselben geraden Linie wirken.

Wenn mehrere Kräfte **A, B, C....** ꝛc. nach derselben Richtung gleichzeitig auf einen materiellen Punkt wirken, so ist offenbar die Gesammtwirkung **P** aller dieser Kräfte gleich der Summe der Wirkungen, welche dieselben einzeln hervor-

zubringen ſtreben. Denn jede einzelne Kraft fügt ihre, in einem Druck oder Zug beſtehende Wirkung den gleichartigen Wirkungen aller übrigen Kräfte hinzu, und ſo vereinigen ſich alle Kräfte zu einer einzigen Kraft **P**, die ihrer Summe gleich iſt. Man hat daher

$$P = A + B + C + \ldots \text{ ꝛc.};$$

durch welche Gleichung alſo **P** als die Mittelkraft der nach einerlei Richtung wirkenden Kräfte **A**, **B**, **C**,.... ꝛc. dargeſtellt wird.

Betrachtet man umgekehrt **P** als eine gegebene Kraft, und denkt man ſich dieſelbe in beliebig viele Theile **A**, **B**, **C**, ... ꝛc. zerlegt, ſo erhellt ſofort, wie ſich die Wirkung einer jeden gegebenen Kraft durch beliebig viele, nach derſelben Richtung wirkende Kräfte erſetzen, d. h. in Seitenkräfte zerlegen läßt.

§. 17.

Sind die in einer geraden Linie nach einerlei Richtung wirkenden Kräfte einander gleich, iſt z. B. jede von ihnen $= p$, ſo ergiebt ſich ihre Mittelkraft **P** als ein Vielfaches von jeder einzelnen Kraft; alſo

$$P = np,$$

wenn **n** die Anzahl der gleichen Kräfte bezeichnet.

In dieſer Gleichung kann **p** als eine beſtimmte Krafteinheit betrachtet werden, die zwar an ſich beliebig zu wählen iſt, für alle mit einander zu vergleichenden Kräfte aber dieſelbe ſein muß. Die abſtracte Zahl **n** drückt dann die Intenſität der Kraft **P** in Bezug auf dieſe Einheit aus, und daraus ergiebt ſich, übereinſtimmend mit dem in §. 4. Geſagten, wie Kräfte ſich als meßbare Größen betrachten und in der Rechnung durch Zahlen darſtellen laſſen.

§. 18.

Wirken zwei ungleiche Kräfte **P** und **Q** nach entgegengeſetzten Richtungen an einem Punkte, ſo ſind ſie einer

Kraft gleich zu achten, die gleich ihrem Unterſchiede und nach derjenigen Richtung wirkſam iſt, nach welcher ſich die Wirkung der größeren Kraft erſtreckt.

Iſt **P** die größere Kraft, ſo kann man dieſelbe in zwei anderen **Q** und **R** zerlegt denken, ſo daß $P = Q + R$ iſt. Anſtatt **P** und **Q** bringe man nun die Kräfte $Q + R$ und **Q** in entgegengeſetzter Richtung an dem Punkte **M** an (Fig. 2), ſo heben ſich die beiden identiſchen Kräfte **Q** und **Q** gegen einander auf, und der Punkt iſt bloß der Wirkung von $R = P - Q$ unterworfen.

§. 19.

Wenn mehrere Kräfte nach gerade entgegengeſetzten Richtungen auf einen Punkt wirken, ſo iſt ihre Mittelkraft gleich der Summe der Kräfte, die nach der einen Richtung wirken, weniger der Summe der nach der entgegengeſetzten Richtung wirkenden Kräfte.

Denn ſind die Kräfte **A**, **B**, **C**, . . . ꝛc. nach der einen, die **A′**, **B′**, **C′**, . . . ꝛc. nach der entgegengeſetzten Richtung wirkſam, und bezeichnen **P**, **Q** die Mittelkräfte dieſer beiden Syſteme, dann iſt nach §. 16.

$$P = A + B + C + \ldots\ldots \text{ ꝛc.},$$
$$Q = A' + B' + C' + \ldots\ldots \text{ ꝛc.}$$

Die Kräfte **P** und **Q** erſetzen nun die Wirkungen jener beiden Syſteme, wenn ſie in entgegengeſetzter Richtung an demſelben Punkte angebracht werden. Ihre vereinigte Wirkung iſt aber nach dem vorigen §. einer Kraft **R** gleich zu achten, die gleich ihrer Differenz iſt. Man hat daher für die Mittelkraft ſämmtlicher Kräfte:

$$R = P - Q = A + B + C + \ldots - (A' + B' + C' + \ldots).$$

§. 20.

Sind mit Bezugnahme auf den vorigen §. alle nach entgegengeſetzten Richtungen wirkenden Kräfte mit einander im

Gleichgewicht, so muß daſſelbe auch zwiſchen den beiden ſie erſetzenden Kräften P und Q ſtattfinden. Nach §. 13, 4 muß daher P = Q ſein; oder

$$A + B + C + \ldots \text{ ꝛc.} = A' + B' + C' + \ldots \text{ ꝛc.}$$

Das Gleichgewicht erfordert daher, daß die Summe der Kräfte nach der einen Richtung gleich ſei der Summe der Kräfte nach der entgegengeſetzten Richtung.

Gewöhnlich pflegt man dieſe Gleichung unter der Form

$$A - A' + B - B' + C - C' + \ldots \text{ ꝛc.} = 0$$

darzuſtellen, und ſie dann folgendermaßen in Worten auszudrücken:

Wenn Kräfte, die in derſelben geraden Linie nach entgegengeſetzten Richtungen wirken, mit einander im Gleichgewicht ſind, ſo iſt ihre algebraiſche Summe gleich Null.

Und iſt umgekehrt dieſe Summe gleich Null, dann ſind auch die Kräfte mit einander im Gleichgewicht.

§. 21.

Drei Kräfte, nach verſchiedenen Richtungen an einem materiellen Punkte wirkſam.

Befindet ſich ein Punkt unter der Einwirkung dreier Kräfte A, B, C im Gleichgewicht, ſo können zwei von dieſen Kräften ſich nicht entgegengeſetzt ſein.

Denn wäre dies z. B. mit A und B (Fig. 3) der Fall, ſo könnte man, nach §. 18, ihre vereinte Wirkung durch eine andere Kraft $D = \pm (A - B)$*) erſetzen, ſo daß das Gleichgewicht zwiſchen den beiden Kräften C und D fortbeſtehen müßte. Da dieſe aber einen ſchiefen

*) Das Doppelzeichen ± bedeutet hier, wie in der Folge überall, daß die damit behaftete Kraft entweder nach der einen Richtung (+), oder nach der entgegengeſetzten (—) wirkſam iſt.

Winkel mit einander bilden, ſo iſt das gefolgerte Gleichgewicht ein Widerſpruch gegen den Grundſatz 2) in §. 13.

Jede von den drei Kräften muß alſo, im Falle des Gleichgewichts, eine ſolche Lage haben, daß die Verlängerung ihrer Richtungslinie innerhalb des Winkels fällt, den die beiden anderen Kräfte mit einander bilden.

§. 22.

Drei Kräfte, **A**, **B** und **C**, die an einem materiellen Punkte mit einander im Gleichgewichte ſind, müſſen ſich mit ihren Richtungslinien in einer und derſelben Ebene befinden.

Denn geſetzt, die Kraft **C** befände ſich nicht in der durch **A** und **B** gelegten Ebene, ſo ſeien **MA** und **MB** (Fig. 4) die Richtungslinien der Kräfte **A** und **B** in der Ebene des Papiers, und **MC** ſei die Projection der Kraft **C**, welche letztere oberhalb der genannten Ebene, dieſelbe im Punkte **M** ſchneidend, angenommen wird. Man denke ſich nun ein zweites Syſtem von Kräften **A'**, **B'**, **C'**, welches in Abſicht auf Richtung und Intenſität mit dem erſteren vollkommen identiſch, und daher, wie dieſes, für ſich allein im Gleichgewicht iſt. Bringt man dies zweite Syſtem in der Art an den materiellen Punkt **M** an, daß **A'** mit **A**, ſo wie **B'** mit **B**, in gerade entgegengeſetzte Lagen fallen, ſo wird **C'**, wie vorhin **C**, oberhalb der Ebene zu liegen kommen, ſo daß **MC'** die Projection der Richtungslinie vorſtellt. Da nun der Annahme gemäß jedes Syſtem für ſich im Gleichgewicht ſein ſoll, ſo muß das Gleichgewicht auch unter beiden Syſtemen fortbeſtehen (§. 6, 1). Nun iſt aber **A** mit **A'**, und **B** mit **B'** im Gleichgewicht, und daher kann man dieſe Kräfte (nach §. 6, 2) hinwegnehmen. Das Gleichgewicht müßte dann bloß unter den Kräften **C** und **C'** allein ſtattfinden; was aber ein Widerſpruch gegen §. 13. 2) ſein würde, da dieſelben einen ſchiefen Winkel mit einander bilden.

§. 23.

Sind drei Kräfte **A**, **B** und **C** an einem und demselben Punkte mit einander im Gleichgewicht, so ist jede von ihnen in Bezug auf Richtung und Intensität vollkommen bestimmt, sobald die beiden andern in dieser Beziehung gegeben sind.

Denn wäre es möglich, daß außer **C** noch eine andre Kraft **C'**, welche bloß in Bezug auf die Intensität von **C** verschieden sein mag, mit **A** und **B** im Gleichgewicht sein könnte, so müßte dasselbe Gleichgewicht auch unter der vereinten Wirkung beider Systeme **A**, **B**, **C** und **A**, **B**, **C'** vorhanden sein. Denkt man sich nun letzteres System so angebracht, daß die gleichnamigen Kräfte **A**, **A** und **B**, **B** (Fig. 5) gerade entgegengesetzte Lagen erhalten, so wird auch **C** mit **C'** entgegengesetzt zu liegen kommen, weil die Richtungen dieselben geblieben sind. Nun heben sich aber die Kräfte **A**, **A** und **B**, **B** paarweise mit einander auf (§. 11, 3); also müßte das Gleichgewicht bloß unter den beiden Kräften **C** und **C'** fortbestehen, was aber nicht möglich ist, da diese von ungleicher Größe sind.

Wollte man aber außer den verschiedenen Intensitäten auch noch die Richtungen der beiden Kräfte **C**, **C'** als verschieden annehmen, so würde der obige Widerspruch nur um so stärker hervortreten. Denn dann würden jene beiden Kräfte, wenn das zweite System in derselben Weise wie vorhin angebracht würde, *nicht* entgegengesetzt zu liegen kommen, und das Gleichgewicht würde also zwischen **C** und **C'** um so weniger fortbestehen können.

§. 24.

Da man von den drei, an einem materiellen Punkte im Gleichgewicht befindlichen, Kräften jede einzelne als die entgegengesetzte Mittelkraft der beiden andern betrachten kann,

so läßt sich aus dem so eben bewiesenen Lehrsatze noch folgender Schluß ziehen:

Sind die Intensitäten zweier, unter einem bestimmten Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräfte gegeben, so ist auch ihre entgegengesetzte Mittelkraft allemal, in Bezug auf Richtung und Intensität, vollkommen bestimmt. — Dasselbe gilt von der Mittelkraft, da sie von jener nur durch den Gegensatz der Richtung verschieden ist.

Es mögen nun die Linien **PA** und **PB** (Fig. 6) die Richtungen und Intensitäten zweier gegebenen Kräfte vorstellen, welche unter dem bestimmten Winkel **APB** auf den materiellen Punkt **P** wirken, und durch **PC** werde die unbekannte Größe und Richtung ihrer Mittelkraft dargestellt. Man ziehe die Verbindungslinien **AC** und **BC**, so entsteht ein Viereck **PACB**, welches, dem Vorhergehenden gemäß, aus den beiden Seiten **PA**, **PB** und dem eingeschlossenen Winkel **APB** vollkommen bestimmt sein muß. Im Allgemeinen sind zur Bestimmung eines beliebigen Viereckes *fünf* Bestimmungsstücke nöthig, und nur in dem einzigen Fall sind deren *drei* hinreichend, wenn dasselbe ein Parallelogramm ist. Hieraus folgt, daß das in Rede stehende Viereck **PACB** nur ein Parallelegramm sein kann, weil es aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt sein soll.

Demgemäß können wir schon jetzt den Satz aufstellen: daß, wenn zwei beliebige Kräfte unter irgend einem Winkel auf einen materiellen Punkt wirken, und man construirt auf den Linien, die diese Kräfte geometrisch darstellen, ein Parallelogramm, alsdann die Diagonale desselben die Richtung und Größe der Mittelkraft darstellt.

Dieser Satz mag hiermit nur vorläufig angedeutet sein; wegen seiner großen Wichtigkeit für alle dynamischen Unter-

suchungen soll ein strenger Beweis desselben an seinem Orte gegeben werden.

§. 25.

Sind drei Kräfte **A**, **B** und **C**, welche der Intensität und Richtung nach gegeben sind, an einem und demselben Punkte im Gleichgewicht, und ändert man, während alles Übrige dasselbe bleibt, die Intensitäten **A** und **B** in **A'** und **B'** ab: so wird dadurch das Gleichgewicht gestört.

Denn wollte man annehmen, daß das Gleichgewicht, welches unter **A**, **B** und **C** (Fig. 4) vorhanden war, auch noch unter **A'**, **B'** und **C** fortbestände, so würde der Punkt auch im Gleichgewicht bleiben, wenn beide Systeme von Kräften **A**, **B**, **C** und **A'**, **B'**, **C** zugleich auf ihn wirkten. Man denke sich demnach das zweite System, um 180 Grad gedreht, an demselben Punkte angebracht, worauf das erste wirkt, dergestalt, daß **A** mit **A'**, **B** mit **B'** und **C** mit **C** entgegengesetzt zu liegen kommen, was immer möglich ist, da die Winkel ungeändert geblieben sind. Alsdann heben sich die identischen Kräfte **C**, **C** mit einander auf, und daher muß das Gleichgewicht, dafern es unter den sechs Kräften vorhanden war, auch noch unter den vieren **A**, **A'**, **B** und **B'** fortbestehen; folglich auch, zufolge §. 19, unter Einwirkung der beiden Kräfte $\pm$ (**A**—**A'**) und $\pm$ (**B**—**B'**), die aber einen schiefen Winkel einschließen.

§. 26.

Aus dem obigen Lehrsatze folgt: Wird eine gegebene Kraft nach zweien ebenfalls gegebenen Richtungen in Seitenkräfte zerlegt, so sind diese in Absicht auf ihre Intensitäten vollkommen bestimmt. Da man nun für die Seitenkräfte unendlich viele Richtungen angeben kann, so sieht man ein, daß jede gegebene Kraft der Zerlegung in zwei Seitenkräfte auf unendlich mannigfaltige Weise fähig ist. Das Verhält-

niß der Intenſitäten der Seitenkräfte zu der der gegebenen Kraft kann daher nur von den Winkeln abhängig ſein, die von jenen mit dieſer gebildet werden.

§. 27.

Iſt ein Syſtem von beliebig vielen Kräften A, B, C, ... ꝛc. an einem materiellen Punkte im Gleichgewicht, ſo iſt auch jedes andere Syſtem A′, B′, C′, ... ꝛc. im Gleichgewicht, wenn die letzteren Kräfte in denſelben Richtungen wie die erſteren wirken, und rückſichtlich ihrer Intenſitäten mit denen des erſten Syſtems proportional ſind.

Um dieſen Satz zu beweiſen, wollen wir zuerſt annehmen, daß die Kräfte des zweiten Syſtems beliebige Vielfache von denen des erſten ſind; z. B. $A' = nA$, $B' = nB$, $C' = nC$ u. ſ. w.; wo n eine ganze Zahl bedeutet. In dieſem Fall läßt ſich das zweite Syſtem durch ein nmal wiederholtes Anbringen des erſteren an demſelben Punkt erzeugen, wodurch das Gleichgewicht (nach §. 4, 1) ſofern ſolches vorhanden war, nicht geſtört wird.

Wäre aber, zweitens, $A' = \frac{1}{n}A$, $B' = \frac{1}{n}B$, $C' = \frac{1}{n}C$, ꝛc. und wollte man nun annehmen, daß zwiſchen A′, B′, C′, ... ꝛc. nicht daſſelbe Gleichgewicht ſtattfände, welches für A, B, C, ... ꝛc. vorausgeſetzt wurde, ſo könnten auch die Vielfachen jener Kräfte, z. B. nA′, nB′, nC′, ... ꝛc. nicht mit einander im Gleichgewicht ſein; alſo auch nicht A, B, C, ... ꝛc., was der Vorausſetzung widerſpricht.

Drittens ſei $A' = \frac{m}{n}A$, $B' = \frac{m}{n}B$, $C' = \frac{m}{n}C$, . . . ꝛc. wenn m und n ganze Zahlen bedeuten.

Da die Kräfte A, B, C, ... ꝛc. im Gleichgewicht ſind, ſo müſſen, nach dem erſten Theil dieſes Beweiſes, auch die Vielfachen mA, mB, mC, ... ꝛc., und alſo auch, nach dem

zweiten Theil, die Kräfte $\frac{1}{n}(mA)$, $\frac{1}{n}(mB)$, $\frac{1}{n}(mC)$,... ꝛc. im Gleichgewicht sein.

Ist das Verhältniß zwischen den Kräften des ersten und zweiten Systems irrational, so läßt sich doch immer ein Bruch von der Form $\frac{m}{n}$ angeben, der jener irrationalen Verhältnißzahl so nahe kommt, als man nur will; daher der Satz auch für diesen Fall stattfindet.

§. 28.

Aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphen, der übrigens, wie leicht erhellet, auch für jedes System von Punkten ganz eben so gilt, kann man Folgendes schließen:

Wenn mehrere Kräfte eine gewisse Mittelkraft geben, so werden eben so viele andere Kräfte, welche jenen nach der Reihe proportional sind und in denselben Richtungen wie diese wirken, eine Mittelkraft liefern, die sich zu der ersteren eben so verhält, wie irgend eine Kraft des zweiten Systems zu einer entsprechenden des ersteren. Denn in Bezug auf die entgegengesetzte Mittelkraft ist dies so eben bewiesen. Was aber für die Intensität dieser gilt, muß auch eben so für die Mittelkraft gültig sein, da beide von gleicher Größe sind und ihre Richtungslinien in dieselben geraden Linie zusammenfallen.

§. 29.

Wenn von drei, sich an einem Punkt im Gleichgewicht befindenden Kräften **A**, **B**, **C** zwei einander gleich sind, z. B. **A**=**B**, so hat die dritte **C** eine solche Lage, daß sie mit den beiden ersteren gleiche Winkel bildet.

Da nämlich das Gleichgewicht unter den Kräften **A**, **B**, **C** vorhanden ist, so muß solches auch noch fortbestehen, wenn noch ein zweites System **A'**, **B'**, **C'**, mit dem ersteren

in Bezug auf Richtung und Intensität vollkommen identisch, an demselben Punkte wirksam ist. Wird nun letzteres System in umgekehrter Lage an dem Punkte **M** (Fig. 7) angebracht, so daß die Kräfte **B'**, **A** und **A'**, **B** entgegengesetzt zu liegen kommen, so heben sich diese paarweise mit einander auf, weil nach der Voraussetzung $A = B = A' = B'$ ist. Das vorhandene Gleichgewicht muß daher bloß noch unter den beiden Kräften **C** und **C'** fortbestehen, und da letztere rücksichtlich der Intensitäten einander gleich sind, so müssen sie in Absicht auf ihre Richtungen gerade entgegengesetzt sein. Die Linie **CC'** ist demnach eine gerade, und die Winkel **AMC** und **B'MC'** sind Scheitelwinkel; mithin als solche einander gleich. Letzterer ist aber mit $\angle BMC$ der Voraussetzung gemäß identisch; folglich hat man auch

$$\angle AMC = \angle BMC.$$

§. 30.

Aus dem vorigen Lehrsatze können wir noch folgende Schlüsse ziehen:

1) Wirken zwei gleiche Kräfte unter einem beliebigen Winkel auf einen materiellen Punkt, so wird dieser Winkel von ihrer Mittelkraft halbirt. Wird aber umgekehrt eine gegebene Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt, die mit ihr gleiche Winkel bilden, so müssen diese in Bezug auf die Intensitäten einander gleich werden.

2) Sind drei gleiche Kräfte an einem Punkte im Gleichgewicht, so sind auch die drei Winkel gleich, die sie mit einander bilden, und zwar ist jeder gleich 120 Graden. Und wenn umgekehrt, die drei Winkel gleich sind, unter welchen drei Kräfte einen materiellen Punkt im Gleichgewicht erhalten, so müssen auch nothwendig die Intensitäten derselben einander gleich sein.

§. 31.

Bestimmung der Mittelkraft von zwei Kräften an einem Punkte.

Da also, dem Vorgehenden gemäß, die Richtung der Mittelkraft zweier gleichen Seitenkräfte, die auf einen materiellen Punkt wirken, jedesmal in der Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels liegt, so kommt es nur noch darauf an, die Intensität dieser Mittelkraft zu bestimmen.

Es ist schon im §. 26 bemerkt worden, daß das Verhältniß der Intensitäten nur von den Winkeln abhängig sein kann, die von der Mittelkraft mit den Seitenkräften gebildet werden. Wirken also zwei gleiche Kräfte **P**, **P** (Fig. 8) auf einen materiellen Punkt **M**, und man bezeichnet die Intensität ihrer Mittelkraft mit **R**, so wie den Winkel, den diese mit jeder der beiden Seitenkräfte bildet, mit **x** (wo **x** in Bogenmaß für einen Halbmesser gleich 1 zu verstehen ist): so wird eine Gleichung von der Form

$$\frac{R}{P} = f(x)$$

dieses Verhältniß ausdrücken. Denn nach §. 28 ist der Bruch $\frac{R}{P}$ für alle Werthe von **P** constant, sobald der Winkel **x** derselbe bleibt. Ändert sich aber dieser Winkel, so wird auch jener Bruch eine entsprechende Änderung erleiden; woraus folgt, daß er eine Function des Winkels ist.

Es kommt nun darauf an, die durch $f(x)$ bezeichnete Function des Winkels näher zu ermitteln. Zunächst erhält man zu diesem Ende aus der vorigen Gleichung die folgende

$$R = P \cdot f(x), \tag{1}$$

welche natürlich für jeden beliebigen Werth von **x** stattfinden muß. Setzt man also einen Augenblick $x = 0$, wodurch man erhält $R = P \cdot f(0)$,

so entspricht dies dem besondern Fall, wo die beiden Kräfte P, P nach derselben Richtung in der geraden Linie MR wirksam sind. Aber dann ist ihre Mittelkraft gleich ihrer Summe, d. h. $R = 2P$; und daher ergiebt sich

(2) $$f(0) = 2.$$

Hieraus schließen wir auf die Beschaffenheit der Function, daß sie für $x = 0$ den bestimmten Zahlenwerth 2 liefert. Um nun noch andere Eigenschaften der fraglichen Funktion zu ermitteln, denke man sich jede der gegebenen Kräfte P, P, als die Mittelkraft von zweien andern gleichen Kräften p, p, welche beiderseitig mit P die gleichen Winkel y bilden. Zufolge der Gleichung Nr. 1 hat man dann

$$P = p \cdot f(y);$$

und wenn man diesen Werth von P in der Gleichung (1) substituirt, so kommt

(3) $$R = p \cdot f(x) \cdot f(y).$$

Ferner sei r die Mittelkraft der beiden äußeren Kräfte p, p, von denen jede mit der Linie MR den Winkel $x+y$ einschließt, so fällt die Richtung von r in diese Linie, und die Intensität r ergiebt sich durch die Gleichung

(4) $$r = p \cdot f(x+y).$$

Bezeichnet ebenso r' die Intensität der Mittelkraft von den beiden innern Kräften p, p, welche bezüglich mit MR den Winkel $x-y$ einschließen, so ist

(5) $$r' = p \cdot f(x-y);$$

und die Richtungslinie dieser Kraft fällt ebenfalls mit der Geraden MR zusammen.

Die beiden partiellen Mittelkräfte r und r' werden nun zusammen die vereinte Wirkung der vier Kräfte p, p, p, p auf den Punkt M ersetzen; und da sie in derselben geraden Linie wirken, so ist ihre Summe gleich der Mittelkraft der letzteren, und mithin auch gleich der Mittelkraft der gegebenen Kräfte P, P. Demgemäß hat man $R = r + r'$, oder

wenn man für r und r' die entsprechenden Werthe aus (4) und (5) einsetzt,

(6) $$R = p \cdot f(x+y) + p \cdot f(x-y).$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem in Nr. 3 liefert nun die identische Gleichung

(7) $$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x=0$, so findet man

$$f(0) \cdot f(y) = f(y) + f(-y);$$

oder, weil nach der 2ten Gleichung $f(0)=2$ ist, so kömmt

$$2 \cdot f(y) = f(y) + f(-y);$$

also auch $$f(y) = f(-y).$$

Da nun die beiden Functionen $f(x)$ und $f(y)$ der Form nach identisch sind, so hat man eben so $f(x) = f(-x)$; woraus hervorgeht, daß die fragliche Function ihren Werth nicht ändert, wenn darin $-x$ anstatt x gesetzt wird. Sie kann daher nur die geraden Potenzen von x enthalten, weil die Glieder mit ungeraden Potenzen negative Vorzeichen annehmen würden, wenn x negativ gesetzt wird.

Diesem gemäß, und mit Rücksicht auf Nr. 2, kann man folgende Gleichung ansetzen:

(8) $$f(x) = 2 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \ldots \text{ ꝛc.}$$

worin die noch unbestimmten Coeffizienten A, B, C, ꝛc. von x unabhängige constante Zahlen bedeuten. Um sie zu bestimmen, wollen wir aus der Grundgleichung Nr. 7 noch eine einfachere ableiten, welche nur die eine Veränderliche x enthalten soll. Dies wird erlangt wenn man $y=x$ setzt, denn alsdann kommt

$$f(x) \cdot f(x) = f(2x) + f(0), \text{ oder}$$

(9) $$[f(x)]^2 - 2 = f(2x)^*).$$

---

*) Diese Gleichung kann auch folgendermaßen aus der Figur abgeleitet werden: Da nemlich je zwei von den mit p (Fig. 9) bezeichneten Kräften, mit ihrer Mittelkraft P denselben Winkel x bilden, den die gegebenen Kräfte P, P mit R einschließen, so fallen zwei von jenen vier

Quadrirt man nun die Gleichung Nr. 9, und subtrahirt dann auf beiden Seiten die Zahl 2, so kommt

$$[f(x)]^2-2=2+4A\cdot x^2+4B\left|\begin{matrix}+A^2\end{matrix}\right|x^4+4C\left|\begin{matrix}+2AB\end{matrix}\right|x^6+4D\left|\begin{matrix}+2AC\\+B^2\end{matrix}\right|x^8+\ldots\text{ ꝛc.}$$

Setzt man aber in der 9ten Gleichung $2x$ an die Stelle von x, so ergiebt sich

$$f(2x)=2+4A\cdot x^2+16B\cdot x^4+64C\cdot x^6+256D\cdot x^8+\ldots\text{ ꝛc.}$$

Beide Entwickelungen sind nun, zufolge der 10ten Gleichung, mit einander identisch, und daher müssen die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Coefficienten einander gleich sein. Hiernach erhält man folgende Vergleichungen:

$4A = 4A$; folglich $A = A$

$16B = 4B + A^2$; » $B = \frac{A^2}{3\cdot 4}$

$64C = 4C + 2AB$; » $C = \frac{A^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$

$256D = 4D + 2AC + B^2$; » $D = \frac{A^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$

u. s. w. u. s. w.

Substituirt man nun diese Werthe in der Gleichung No. 8, so ergiebt sich

$$f(x)=2+Ax^2+\frac{A^2x^4}{3\cdot 4}+\frac{A^3x^6}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{A^4x^8}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\ldots\text{ ꝛc.}$$

$$=2\left(1+\frac{Ax^2}{(2)}+\frac{A^2x^4}{(4)}+\frac{A^3x^6}{(6)}+\frac{A^4x^8}{(8)}+\ldots\right);$$

oder wenn man, um die gefundene Entwicklung noch mehr symmetrisch zu machen, an die Stelle der noch unbestimmten

---

Kräften in die Linie MR, während die beiden andern mit ihr die Winkel $2x$ bilden. Ist nun $R=P\cdot f(x)$, also auch $P=p\cdot f(x)$, so ergibt sich durch Substitution $R=p.[f(x)]^2$. Ferner ist die in MR fallende Mittelkraft der beiden äußeren Kräfte p, p gleich $p.f(2x)$, und da nach derselben Richtung schon $2p$ wirken, so ist auch $R=p.f(2x)+2p$. Beide Werthe von R, mit einander verglichen, geben nun die obige Gleichung:

$$[f(x)]^2 = f(2x) + 2.$$

Conſtante A eine andere $-a^2$ ſetzt, was jederzeit erlaubt iſt,

$$f(x) = 2\cdot\left(1 - \frac{(ax)^2}{(2)} + \frac{(ax)^4}{(4)} - \frac{(ax)^6}{(6)} + \frac{(ax)^8}{(8)} - + \ldots\right).$$

Die Reihe, welche auf der rechten Seite der Gleichung in der Klammer ſteht, iſt nun (nach Anh. III. No. 18) die Entwicklung von Cos (ax), und daher hat man

$$f(x) = 2\cdot\mathrm{Cos}(ax);$$

alſo nach Gleichung No. 1, wenn darin für f(x) dieſer gefundene Werth ſubſtituirt wird,

(10) $$R = 2P\cdot\mathrm{Cos}(ax).$$

Nunmehr kömmt es noch darauf an, die Conſtante a zu beſtimmen. Zu dieſem Ende dient die Bemerkung, daß, wenn x den Bogen des Quadranten für den Halbmeſſer = 1, d. h. $\frac{1}{2}\pi$ bedeutet, alsdann die beiden Kräfte P, P einander gerade entgegengeſetzt, und daher im Gleichgewichte ſind. In dieſem Fall iſt ihre Mittelkraft = 0, und man hat deshalb

$$0 = 2P\cdot\mathrm{Cos}\left(a\frac{\pi}{2}\right); \quad \text{folglich } \mathrm{Cos}\left(a\frac{\pi}{2}\right)2 =;$$

woraus zunächſt hervorgeht, daß a eine ungerade ganze Zahl ſein muß. Dieſelbe kann aber, wie leicht erhellet, nur den beſondern Werth = 1 haben; denn wollte man $a > 1$ annehmen, ſo würde man in der Gleichung (10) für x den Werth $\frac{\frac{1}{2}\pi}{a}$ ſetzen können, wo ſich dann R=0 ergäbe. Die beiden Seitenkräfte müßten daher unter dem ſchiefen Winkel $2\cdot\frac{\frac{1}{2}\pi}{a} = \frac{\pi}{a}$ im Gleichgewicht ſein, was aber nicht möglich iſt.

Demnach iſt nun a=1, und alſo die geſuchte Mittelkraft

$$R = 1P\cdot\mathrm{Cos}\,x.$$

§. 32.

Parallelogramm der Kräfte. Stellt man die Intenſitäten der Seitenkräfte durch die auf ihren Richtungs-

linien genommenen Stücke **MA** und **MB** (Fig. 10) vor, welche, wie die Kräfte selbst, einander gleich sind, und construirt man aus diesen beiden Linien, mit dem von ihnen gebildeten Winkel $AMB = 2\alpha$, den Rhombus **AMBC**, so halbirt dessen Diagonale **MC** den Winkel **AMB**, und ihre Länge ergiebt sich bekanntlich

$$MC = 2\,AM \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Da nun dieselbe Zahl, welche die Intensität **P** ausdrückt, auch zugleich die Länge der Linie **AM** angiebt, so kann man die vorige Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$MC = 2\,P \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Nach dem im vorigen Paragraphen gefundenen Resultat ist aber, wenn **R** die Mittelkraft der beiden gleichen Seitenkräfte **P, P** vorstellt,

$$R = 2P \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha;$$

und daher ist $R = MC$.

Die Mittelkraft zweier gleichen Kräfte kann daher, in Absicht auf Richtung und Intensität, durch die Diagonale des Rhombus dargestellt werden, dessen Seiten die Seitenkräfte ebenfalls nach Richtung und Intensität vorstellen.

Dieser Satz ist bis jetzt nur für zwei gleiche Kräfte bewiesen; deshalb wollen wir im folgenden §. den Beweis noch auf beliebige Kräfte, die unter einem gegebenen Winkel auf einen materiellen Punkt wirken, ausdehnen.

§. 33.

Wir werden zuerst voraussetzen, daß der Winkel zwischen den beiden ungleichen Seitenkräften ein rechter, und nachher, daß er ein beliebiger sei.

1) Es bezeichnen **P** und **Q** die unter einem rechten Winkel auf den Punkt **M** wirkenden Kräfte, und **MP, MQ** (Fig. 11) die sie darstellenden geraden Linien.

Man zeichne das Rechteck **MPRQ**, und ziehe die beiden Diagonalen desselben, welche sich in **C** schneiden und

gegenseitig halbiren; durch den Punkt **M** ziehe man die gerade Linie **AB** parallel mit der einen Diagonale **PQ**, so wie aus den Punkten **P** und **Q** die Linien **PA** und **QB** der andern Diagonale **MR** parallel, so erhält man die beiden Parallelogramme **AC** und **BC**, welche, wie leicht zu beweisen, gleichseitig sind. Nun ist

im □**AC**: **MA** = **MC** und ∠**PMA** = ∠**PMC**;

im □**BC**: **MB** = **MC** und ∠**QMB** = ∠**QMC**;

folglich ergiebt sich: **MA**=**MB**.

Da nun **MP** und **MQ** die Winkel **AMC** und **BMC** halbiren, so kann man, nach dem vorhergehenden Paragraphen, **MA** und **MC** als die Seitenkräfte von **MP**, so wie **MB** und **MC** als die von **MQ** ansehen, und umgekehrt. Die Mittelkraft dieser vier Seitenkräfte ist nun

MC+**MC** = 2**MC**;

weil die beiden Kräfte **MC**, **MC** in derselben graden Linie und nach einerlei Richtung wirken; die beiden andern **MA**, **MB** dagegen, als gleich und entgegengesetzt, sich aufheben. Nun ist aber auch die Diagonale **MR** = 2**MC**; folglich stellt diese die erwähnte Mittelkraft dar.

2) Die beiden ungleichen Kräfte **P** und **Q**, deren Richtungen und Größen durch die graden Linien **MP** und **MQ** (Fig. 12) dargestellt werden mögen, sollen jetzt unter einem beliebigen Winkel **PMQ** auf den Punkt **M** wirken.

Man beschreibe wieder auf den die Seitenkräfte vorstellenden Linien das Parallelogramm **MPRQ**, ziehe darin die Diagonale **MR**, und rechtwinklig mit dieser durch den Punkt **M** die Linie **AB**. Fällt man nun aus den Punkten **P** und **Q** auf **MR** die Perpendikel **PC** und **QD**, so wie auf **AB** die beiden **PA** und **QB**, so erhält man die beiden Rectangel **MAPC** und **MBQD**. Dem unmittelbar Vorhergehenden gemäß kann man nun **MA** und **MC** als die Seitenkräfte von **MP**, so wie **MB** und **MD** als die von **MQ**

betrachten, so daß man für diese vier Seitenkräfte dieselbe Mittelkraft finden muß, wie für die beiden gegebenen.

Aus leicht zu findenden Gründen ist aber

$$\Delta PCR \cong \Delta MQD; \text{ daher } PC = QD.$$

Auch ist $PC = MA$, und $QD = MB$; folglich $MA = MB$. Die beiden Seitenkräfte **MA** und **MB** heben sich daher, als gleich und entgegengesetzt, mit einander auf, und da die beiden andern **MC** und **MD** in derselben geraden Linie nach einerlei Richtung wirken, so ist die gesuchte Mittelkraft gleich der Summe der beiden letzteren; d. h.

$$R = MC + MD.$$

Aber aus der vorhin erwähnten Congruenz der Dreiecke **PCR** und **MQD** folgt $CR = MD$; demnach hat man

$$R = MC + CR = MR,$$

und die Diagonale **MR** stellt also auch hier die Mittelkraft **R** der Richtung und Größe nach vor.

§. 34.

Nach den in den drei vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultaten kann man nun folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Wenn zwei beliebige Kräfte unter einem ebenfalls beliebigen Winkel an einem materiellen Punkte wirken, und man construirt ein Parallelogramm auf den Linien, welche, von dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte aus auf den Richtungslinien der Kräfte genommen, die Intensitäten der letzteren vorstellen: so repräsentirt diejenige Diagonale desselben, welche mit den beiden obigen Linien den Angriffspunkt gemeinschaftlich hat, die Richtung und Größe der Mittelkraft.

Dieser wichtige Lehrsatz bildet die Grundlage der ganzen Statik, und wird gewöhnlich mit dem Namen: „Pa-

rallelogramm der Kräfte" belegt. Der zum Theil analytiſche Beweis dieſes Satzes, den wir ſo eben gegeben haben, iſt demjenigen nachgebildet, welchen Poiſſon in ſeinem vortrefflichen Werke: **Traité de Mécanique** *) mitgetheilt hat. Die Grundgleichung $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ hat zuerſt D'Alembert in den Memoiren der Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris vom Jahr 1784 aufgeſtellt, und daraus mittelſt Integral-Rechnung den Werth $2\cos x$ der Function $f(x)$ abgeleitet. Poiſſon a. a. O. und nach ihm Francoeur**), Navier ***) und mehrere andere franzöſiſche Mathematiker haben ſich hiezu bloß der Differenzial-Rechnung bedient. Die elementare Beſtimmung der Function $f(x)$ aus jener Grundgleichung, auf ähnliche Art, wie es in den vorhergehenden Paragraphen geſchehen iſt, findet man auch in „Grunert's Lehrbuch der Statik feſter Körper. Halle 1826."

Den ſehr einfachen Beweis des Lehrſatzes vom Parallelogramm der Kräfte, welchen Eytelwein in ſeinem allgemein geſchätzten „Handbuch der Statik feſter Körper" an die Spitze der ſtatiſchen Lehren ſtellt, mag man in dem genannten Werke ſelbſt nachleſen, da daſſelbe verbreitet genug iſt. Dagegen ſoll in den folgenden Paragraphen noch ein conſtructiver Beweis mitgetheilt werden, den man dem franzöſiſchen Mathematiker Duchaylat †) verdankt.

---

*) Unter dem Titel: „Lehrbuch der Mechanik von S. D. Poiſſon" nach der zweiten Auflage ins Deutſche überſetzt von Moritz A. Stern. Berlin 1835. 2 Thle. in 8.

**) Elementar-Lehrbuch der Mechanik von L. B. Francoeur. A. d. Franz. überſ. von Wilh. Opelt. Dresden 1825.

***) Résumé des leçons de mécanique etc. Paris 1841.

†) Correspondance sur l'école polytechnique. No. 4. p. 83.

§. 35.

Wir wollen zuerſt beweiſen, daß die Diagonale desjenigen Parallelogrammes, deſſen Seiten die Kräfte nach Richtung und Größe vorſtellen, die Richtung der Mittelkraft darſtellt.

Für zwei gleiche Kräfte iſt dies ohne Weiteres klar, da für dieſen beſondern Fall das entſtehende Parallelogramm ein Rhombus iſt, deſſen Diagonale den Winkel zwiſchen den Linien, welche die gleichen Kräfte vorſtellen, halbirt (vergl. §. 30.)

1) Zuerſt ſoll nun gezeigt werden, daß wenn der oben ausgeſprochene Satz für zwei Kräfte **Q** und **mQ** richtig iſt, derſelbe auch für die beiden Kräfte **Q** und **(m+1) Q** gilt; wo **m** eine ganze Zahl bedeutet. Zu dem Ende ſeien **P** und **Q** zwei Kräfte, welche unter dem beliebigen Winkel **AMB** (Fig. 13) auf den materiellen Punkt **M** wirken, und es ſei **P = mQ**. Ferner werde vorausgeſetzt, daß die Seiten **MA, MB** des auf den Richtungslinien der Kräfte conſtruirten Parallelogrammes **MACB** ſich wie dieſe Kräfte ſelbſt verhalten, d. h. **MA = m·MB**. Alsdann ſoll die Diagonale **MC** die Richtung der Mittelkraft **R** zwiſchen den genannten Kräften vorſtellen.

Die Vorausſetzung als richtig angenommen, kann man den Angriffspunkt der Kraft **R** in ihrer Richtungslinie nach **C** verlegen, indem man ſich dieſen Punkt mit **M** in einer feſten Verbindung denkt. In **C** zerlege man die Kraft **R** nach den mit **MA** und **MB** parallelen Richtungen **CE** und **CQ**, ſo ſtellt man offenbar die Kräfte **P** und **Q** wieder her, und dieſe werden von **C** aus, mittelſt des unverſchiebbaren Parallelogrammes **MACB**, noch eben ſo auf den materiellen Punkt **M** wirken, als wenn ſie unmittelbar daran angebracht wären. Nimmt man nun den Angriffspunkt von **Q** in dem auf ihrer Richtung liegenden Punkt **A** an, und denkt ſich noch

eine zweite Kraft Q' (gleich Q) nach der Richtung AD an dem Punkte A als wirksam, so kann man zwischen den gleichen Kräften Q und Q' die Mittelkraft R' nehmen, welche ihre vereinte Wirkung ersetzt, und deren Richtung AR' den Winkel CAD halbirt. Man hat nun die beiden Kräfte R' in A, und P in C wirksam, deren Richtungslinien sich in E schneiden. Wird dieser Punkt als ihr gemeinschaftlicher Angriffspunkt und mit M in einer festen Verbindung gedacht, so werden sie auf letzteren dieselbe Wirkung äußern, wie die Kräfte Q nach der Richtung MB, und $P + Q' = (m+1)Q$ nach der Richtung MD; daher werden auch die beiden ersteren Kräfte dieselbe Mittelkraft liefern wie die beiden letzteren. Die Richtungslinie dieser Mittelkraft muß aber durch die Punkte M und E gehen; folglich wird sie von der geraden Linie ME dargestellt.

Man ziehe ED parallel BM, so entsteht ein Parallelogramm BMDE, worin die Richtungslinie ME die Diagonale ist. Nun ist, wie leicht zu erweisen, AD = AC = MB; wenn also, nach der Voraussetzung, $MA = m \cdot MB$ ist, so hat man $MD = (m+1) \cdot MB$. Demnach verhalten sich die Seiten MD und MB eben so zu einander, wie die nach diesen Seiten wirkenden Kräfte $P + Q'$ und Q, deren Mittelkraft in der Richtung der Diagonale ME fällt. Wenn also der Satz für die beiden Kräfte Q und mQ gilt, dann ist er auch für Q und $(m+1)Q$ richtig. Nun gilt er für zwei gleiche Kräfte Q und Q, also für $m = 1$; mithin auch für die Kräfte Q und $(1+1)Q = 2Q$; also auch für Q und $(2+1)Q = 3Q$; dann wieder für Q und $(3+1)Q = 4Q$ u. s. f., folglich allgemein für zwei Kräfte Q und mQ.

2) Ferner soll gezeigt werden, daß wenn der Satz für zwei Kräfte P und Q, die sich wie $m:n$ verhalten, richtig ist, er auch ebenso für das Verhältniß der beiden Kräfte $= m:n+1$ gilt. Es sei q die Krafteinheit, worauf sich

die ganzen Zahlen m und n beziehen, dann iſt $P = mq$ und $Q = nq$.

In dem Parallelogramm MACB (Fig. 13) mögen ſich die Seiten MA und MB wie die nach ihnen wirkenden Kräfte P und Q verhalten, nemlich wie m : n, und es ſei die Diagonale MC die Richtung der Mittelkraft R von P und Q. Nimmt man C als den Angriffspunkt dieſer Mittelkraft, und zerlegt dieſelbe nach den mit MA und MB parallelen Richtungen CP und CG, ſo erhält man wieder die Seitenkräfte P und Q, welche vermittelſt des unverſchiebbaren Parallelogrammes MACB noch eben ſo auf den materiellen M wirken, als da ſie unmittelbar daran angebracht waren. Den Angriffspunkt von P verlege man auf der Richtungslinie dieſer Kraft nach B, und denke ſich an dieſem Punkte noch eine zweite Kraft q nach der Richtung BF wirkſam, ſo hat man die beiden Kräfte q und $P = mq$, welche wir durch ihre Mittelkraft R″ erſetzen wollen. Nimmt man nemlich $BF = \frac{1}{m}BC = \frac{1}{m}MA$, und vollendet das Parallelogramm BCGF, ſo repräſentirt deſſen Diagonale BG, nach dem erſten Theile dieſes Beweiſes, die Richtung der Mittelkraft R″ von den Kräften q und P, welche ſich wie die Seiten BF und BC, alſo wie 1 : m verhalten. Die in C nach der Richtung CG wirkende Kraft Q ſchneidet ſich mit R″ im Punkte G, den man als den gemeinſchaftlichen Angriffspunkt der beiden genannten Kräfte betrachten kann. Letztere werden dann, mittelſt des unverſchiebbaren Parallelogrammes MAGF, dieſelbe Wirkung auf den materiellen Punkt M hervorbringen, als die nach den Richtungen MA, MF wirkenden Kräfte $P = mq$ und $Q + q = (n + 1)q$. Jene müſſen daher auch dieſelbe Mittelkraft liefern wie dieſe, und die Richtung derſelben muß durch die beiden Punkte M und G gehen; woraus man ſieht, daß die gerade Linie MG

dieſe Richtung vorſtellt. Die genannte Linie iſt nun die Diagonale des Parallelogrammes MAGF, deſſen Seiten ſich wie die Kräfte P und Q + q verhalten. Denn es war nach der Vorausſetzung

$$MA : MB = m : n; \quad \text{alſo } MB = \frac{n}{m} MA.$$

Der Conſtruction gemäß iſt aber $BF = \frac{1}{m} MA$;

folglich hat man $MB + BF = MF = \frac{n+1}{m} MA$,

oder $MA : MF = m : n+1$,

und eben ſo verhalten ſich die nach MA und MF wirkenden Kräfte P und Q + q.

Iſt alſo der Satz für das Verhältniß zweier Kräfte $\frac{P}{Q} = \frac{m}{n}$ richtig, dann gilt er auch nothwendig für das Verhältniß $\frac{m}{n+1}$. Nach dem erſten Theil dieſes Beweiſes iſt er aber richtig für $\frac{P}{Q} = \frac{m}{1}$, oder für $n = 1$; folglich gilt er auch für $\frac{P}{Q} = \frac{m}{1+1} = \frac{m}{2}$; alſo auch für $\frac{P}{Q} = \frac{m}{2+1} = \frac{m}{3}$; eben ſo für $\frac{P}{Q} = \frac{m}{3+1} = \frac{m}{4}$ u. ſ. f. Demnach gilt er allgemein für $\frac{P}{Q} = \frac{m}{n}$.

3) Bei dem bisherigen Beweiſe wurde ſtillſchweigend vorausgeſetzt, daß die Zahlen, welche die Intenſitäten P und Q ausdrücken, commenſurabel ſeien. Iſt dies aber nicht der Fall, ſo kann man doch ſtets zwei Zahlen wie m und n nachweiſen, ſo daß $\frac{m}{n}$ dem Verhältniß der incommenſurablen Größen ſo nahe kommt, als man nur will; oder, daß der Unterſchied zwiſchen $\frac{m}{n}$ und jenem Verhältniſſe kleiner wird,

als jede angebbare Größe. Unter diesem Gesichtspunkte ist folglich der vorhin bewiesene Lehrsatz auch für zwei beliebige incommensurable Kräfte gültig.

§. 36.

Im vorigen Paragraphen war nur von der Richtung der Mittelkraft zweier auf einen Punkt wirkenden Seitenkräfte die Rede. Es bleibt uns also noch die Bestimmung ihrer Größe übrig.

Zu dem Ende seien wieder **P** und **Q** die unter dem beliebigen Winkel **PMQ** (Fig. 14) an dem materiellen Punkt **M** wirksamen Kräfte, und **MA**, **MB** die ihnen proportionalen Linien. Auf diesen, als Seiten, construire man das Parallelogramm **AMBC**, so repräsentirt dessen Diagonale **MC**, nach dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen, die Richtung der Mittelkraft **R**, deren Intensität aber noch unbekannt ist. Denkt man sich die Kraft **R** nach der von **MC** gerade entgegengesetzten Richtung **MD** wirkend, so wird sie mit den gegebenen Kräften **P** und **Q** im Gleichgewicht sein. Da also die Kräfte **P**, **Q** und **R** nach den Richtungen **MA**, **MB** und **MD** mit einander im Gleichgewicht sind, so kann man auch **P** als die entgegengesetzte Mittelkraft von **Q** und **R** betrachten; und wenn man diese Kraft nach der **MA** entgegengesetzten Richtung **ME** wirken läßt, so ist sie die Mittelkraft von den Kräften **Q** und **R**, deren Richtungen **MB** und **MD** sind.

Man mache **ME** = **MA**, verbinde **B** und **E** durch die gerade Linie **BE**, so ist diese mit **MC**, und also auch mit deren Verlängerung **MD**, parallel; weil nemlich **BC** parallel mit **MA**, also auch parallel mit **ME** ist. Zieht man nun noch aus dem Punkte **E** die Linie **ED** parallel mit **MB**, so entsteht ein Parallelogramm **MBED**, dessen Diagonale **ME**, dem vorigen Paragraphen gemäß, die Richtung der Mittelkraft **P** zweier Kräfte vorstellt, deren Intensitäten den Seiten **MB**

und **MD** proportional sind. Nun ist **MB** die geometrische Darstellung der Kraft **Q**, also muß dies ebenso mit **MD** in Bezug auf **R** der Fall sein. Denn gesetzt, es wäre möglich, daß eine andere Linie wie **MD**, z. B. **MD'**, die geometrische Darstellung der Kraft **R** sein könnte, so würde man **D'E'** parallel **MB** ziehen können, wodurch ein Parallelogramm **MD'E'B** entstände, dessen Diagonale **ME'** die Richtung der Mittelkraft von den durch **MB** und **MD'** dargestellten Kräfte **Q** und **R** sein müßte; was aber nicht möglich ist, da diese Mittelkraft in der Richtung **ME** fallen muß. Demnach kann keine andere Linie als **MD** die Intensität von **R** vorstellen. Nun ist **MD = BE**, als gegenüberliegende Seiten eines Parallelogrammes, und aus demselben Grunde ist **BE = MC**; folglich hat man auch **MC = MD**.

Demnach repräsentirt die Diagonale **MC** desjenigen Parallelogramms, dessen Seiten **MA**, **MB** sich wie die Kräfte **P** und **Q** verhalten, die Größe der Mittelkraft **R** von letzteren Kräften. Dies Resultat, in Verbindung mit dem im vorhergehenden § Bewiesenen, ist der bereits früher ausgesprochene Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte.

§. 37.

Vermittelst des Parallelogramms der Kräfte kann man leicht zwei unter einem gegebenen Winkel auf einen Punkt wirkende Kräfte zu einer gleich geltenden Mittelkraft zusammensetzen; und umgekehrt: jede gegebene Kraft nach zwei beliebigen Richtungen in Seitenkräfte zerlegen.

Sind nemlich **P** und **Q** zwei beliebige Kräfte, die unter dem Winkel α auf einen materiellen Punkt **M** wirken, und man soll die Größe und Richtung ihrer Mittelkraft **R** bestimmen, so nehme man auf ihren Richtungslinien **MP**, **MQ** (Fig. 15) die Stücke **MA** und **MB** den zugehörigen Intensitäten proportional, und vollende das Parallelogramm

AMBC. Die aus dem Punkte M gezogene Diagonale MC desselben wird sodann die Richtung und Größe der Mittelkraft R vorstellen, und es wird sich verhalten

$$MA : MB : MC = P : Q : R.$$

Nach trigonometrischen Lehren hat man im ΔMAC:

$$MC^2 = MA^2 + AC^2 - 2 \cdot AM \cdot AC \cdot \mathrm{Cos}\, A;$$

oder, weil $AC = MB$ und $\mathrm{Cos}\, A = -\mathrm{Cos}\,\alpha$ ist,

$$MC^2 = MA^2 + MB^2 + 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit MC^2, so kommt

$$1 = \left(\frac{MA}{MC}\right)^2 + \left(\frac{MB}{MC}\right)^2 + 2 \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Es ist aber $\frac{MA}{MC} = \frac{P}{R}$, und $\frac{MB}{MC} = \frac{Q}{R}$; daher hat man

$$1 = \frac{P^2}{R^2} + \frac{Q^2}{R^2} + 2 \cdot \frac{P}{R} \cdot \frac{Q}{R} \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit R^2 multiplicirt,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$R = \pm \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha};$$

wo nur das obere Vorzeichen (+) gelten kann, da sich das untere (—) auf die entgegengesetzte Mittelkraft bezieht.

Durch diese Gleichung ist die Größe der Mittelkraft bestimmt; und nun kommt es nur noch darauf an, den Winkel x anzugeben, den ihre Richtungslinie mit einer der Seitenkräfte, z. B. mit P, einschließt. Aus dem Dreieck MAC ergiebt sich nach einem bekannten trigonometrischen Lehrsatze die Proportion:

$$MC : AC = \mathrm{Sin}\, A : \mathrm{Sin}\, x;$$

oder, weil $AC = MB$, und $\mathrm{Sin}\, A = \mathrm{Sin}\,\alpha$ ist,

$$MC : MB = \mathrm{Sin}\,\alpha : \mathrm{Sin}\, x.$$

Da aber auch $MC : MB = R : Q$ ist,

so hat man $R : Q = \mathrm{Sin}\,\alpha : \mathrm{Sin}\, x;$

woraus sich demnächst ergiebt:

$$\text{Sin}\,x = \frac{Q \cdot \text{Sin}\,\alpha}{R}.$$

Ist der Winkel **AMB** $= \alpha$ ein rechter, so findet sich:

$$R^2 = P^2 + Q^2; \quad \text{folglich } R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Eben so entsteht $\text{Sin}\,x = \frac{Q}{R} = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$;

oder auch $\text{Tang}\,x = \frac{AC}{MA} = \frac{Q}{P}$.

§. 38.

Soll eine gegebene Kraft **R** (Fig. 15) in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, deren Richtungslinien **MP**, **MQ** mit der der gegebenen Kraft die Winkel **RMP** $= \alpha$ und **RMQ** $= \beta$ bilden, so nehme man auf der Geraden **MR**, welche die Richtungslinie von **R** vorstellen mag, das Stück **MC** $=$ **R**, und vollende das Parallelogramm **MACB**. Die Seiten **MA** und **MB** desselben werden dann eben so die Seitenkräfte **P** und **Q** vorstellen, wie dies mit **MC** hinsichtlich der gegebenen Kraft **R** der Fall ist.

Zur trigonometrischen Bestimmung dieser Seitenkräfte dienen nun die aus dem Dreieck **MAC** entnommenen Proportionen:

$$MC : MA = \text{Sin}(\alpha+\beta) : \text{Sin}\,\beta;$$
$$MC : CA = \text{Sin}(\alpha+\beta) : \text{Sin}\,\alpha;$$

oder, weil **MC** $=$ **R**, **MA** $=$ **P**, **CA** $=$ **MB** $=$ **Q** ist,

$$R : P = \text{Sin}(\alpha+\beta) : \text{Sin}\,\beta;$$
$$R : Q = \text{Sin}(\alpha+\beta) : \text{Sin}\,\alpha.$$

Hieraus ergeben sich für die Seitenkräfte folgende Ausdrücke:

$$P = \frac{R \cdot \text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}(\alpha+\beta)}; \quad Q = \frac{R \cdot \text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}(\alpha+\beta)}.$$

Ist in einem besonderen Falle $\alpha+\beta = 90^0$, so hat man:

$$P = R \cdot \text{Sin}\,\beta = R \cdot \text{Cos}\,\alpha;$$
$$Q = R \cdot \text{Sin}\,\alpha.$$

Sind ferner die beiden Winkel, nach welchen die Zer-

legung geschehen soll, einander gleich; d. h. $\alpha = \beta$, so gehen die allgemeinen Ausdrücke von P und Q in folgende über:

$$P = Q = \frac{R \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,2\alpha} = \frac{R \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha}{2 \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha};$$

oder $$P = Q = \tfrac{1}{2} R \cdot \mathrm{Sec}\,\alpha,$$

wie sich ohne Weiteres sofort ergiebt.

Das letzte Resultat läßt sich auch unmittelbar aus der Figur herleiten, und zwar folgendergestalt:

Es sei in Fig. 16 die Gerade $MC = R$ und $\square MACB$ sei das Parallelogramm der Kräfte, welches in diesem Falle ein Rhombus sein muß. In jedem Rhombus halbiren sich die beiden Diagonalen unter einem rechten Winkel; wenn man daher die Linie AB zieht, welche sich mit MC in D schneidet, so ist $MD = \tfrac{1}{2} MC = \tfrac{1}{2} R$, und die Dreiecke MDA und MDB sind beide bei D rechtwinklig. Man hat daher

$$MA = MB = MD \cdot \mathrm{Sec}\,\alpha,$$

oder $$P = Q = \tfrac{1}{2} R \cdot \mathrm{Sec}\,\alpha.$$

§. 39.

Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen drei Kräften an einem Punkte. Durch den Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte sind wir nun auch in den Stand gesetzt, die Bedingungen anzugeben, unter welchen drei gegebene Kräfte an einem Punkt mit einander im Gleichgewichte sein können. Als erste Bedingung haben wir schon im §. 22 gefunden, daß alle drei Richtungslinien in einer und derselben Ebene befindlich sein müssen. Jetzt kommt es noch darauf an, die Beziehung zu ermitteln, welche zwischen den Intensitäten der Kräfte und den von ihnen gebildeten Winkeln Statt finden muß, damit überhaupt ein Gleichgewicht möglich sein könne.

Es seien A, B, C (Fig. 17) die Intensitäten der Kräfte, welche an dem Punkte O mit einander im Gleichgewicht

sind, und α, β, γ die ihnen gegenüberliegenden Winkel. Man nehme die Stücke **OM**, **ON** den Kräften **A** und **C** proportional, und construire zu diesen beiden Linien und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel β das Parallelogramm **OMPN**, so giebt die Diagonale **OP** die Richtung und Größe der Mittelkraft **B'** der Kräfte **A** und **C**, und diese muß mit der dritten Kraft **B** von gleicher Größe, aber rücksichtlich der Richtung gerade entgegengesetzt sein. Zwischen den Kräften **A**, **C** und ihrer Mittelkraft **B'** finden nun dieselben Verhältnisse Statt, wie zwischen den Seiten des construirten Parallelogramms und dessen Diagonale. Da nun ist:

$$\mathbf{OM : OP : MP = Sin\,MPO : Sin\,PMO : Sin\,MOP}$$

und $\mathbf{OM : OP : (MP = ON) = A : (B' = B) : C}$;

so hat man auch

$$\mathbf{A : B : C = Sin\,MPO : Sin\,PMO : Sin\,MOP}.$$

Weil ferner **BB'** eine gerade Linie ist, so folgt

$$\mathbf{Sin\,MPO = Sin\,PON = Sin}\,\alpha,$$

$$\mathbf{Sin\,PMO = Sin}\,\beta,$$

und $$\mathbf{Sin\,MOP = Sin}\,\gamma.$$

Diese Werthe in der vorigen Proportion substituirt, geben die folgende:

$$\mathbf{A : B : C = Sin}\,\alpha : \mathbf{Sin}\,\beta : \mathbf{Sin}\,\gamma.$$

D. h. Wenn zwischen drei auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräften ein Gleichgewicht Statt finden soll, so müssen sich die Intensitäten derselben wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel verhalten.

§. 40.

Die Bedingungen des Gleichgewichts, welches zwischen den drei auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräften Statt findet, lassen sich auch noch auf eine andere Art durch Gleichungen darstellen. Bezeichnet man nemlich, wie vorhin, die Mittelkraft der beiden Kräfte **A** und **C**, deren Richtungs-

linien den Winkel β einschließen, mit B', so hat man nach §. 37 die Gleichung

$$B'^2 = A^2 + C^2 + 2AC \cdot \mathrm{Cos}\beta.$$

Da nun B die entgegengesetzte Mittelkraft von A und C, und deshalb $B' = -B$ ist, so folgt $B'^2 = (-B)^2 = B^2$; also auch

$$B^2 = A^2 + C^2 + 2AC \cdot \mathrm{Cos}\beta.$$

In gleicher Art kann man jede von den drei Kräften A, B und C als die entgegengesetzte Mittelkraft der beiden übrigen ansehen, und dadurch ergeben sich folgende drei Gleichungen als Bedingungen des Gleichgewichts:

$$(1) \quad \begin{cases} A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \cdot \mathrm{Cos}\alpha, \\ B^2 = A^2 + C^2 + 2AC \cdot \mathrm{Cos}\beta, \\ C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cdot \mathrm{Cos}\gamma; \end{cases}$$

d. h. Das Quadrat einer jeden Kraft ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen, vermehrt um das doppelte Product derselben multiplicirt mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Noch drei andere Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dreier Kräfte findet man auf folgendem Wege:

Man addire je zwei von den vorigen Gleichungen zusammen, so entsteht nach gehöriger Reduction

$$A + B \cdot \mathrm{Cos}\gamma + C \cdot \mathrm{Cos}\beta = 0,$$
$$B + A \cdot \mathrm{Cos}\gamma + C \cdot \mathrm{Cos}\alpha = 0,$$
$$C + A \cdot \mathrm{Cos}\beta + B \cdot \mathrm{Cos}\alpha = 0;$$

$$\text{oder } (2) \quad \begin{cases} A = -(B \cdot \mathrm{Cos}\gamma + C \cdot \mathrm{Cos}\beta), \\ B = -(A \cdot \mathrm{Cos}\gamma + C \cdot \mathrm{Cos}\alpha), \\ C = -(A \cdot \mathrm{Cos}\beta + B \cdot \mathrm{Cos}\alpha). \end{cases}$$

D. h. Von den drei an einem Punkt im Gleichgewicht befindlichen Kräften ist jede gleich der negativen Summe der Producte, die man erhält, wenn man die beiden andern einzeln mit dem Cosinus

des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersteren bilden.

Sowohl von diesen drei Gleichungen, als auch von den drei vorigen, bestimmen je zwei stets die dritte; so daß jedesmal zwei solcher Gleichungen fürs Gleichgewicht hinreichend sind. In den meisten Fällen werden wir uns aber der im vorigen §. aufgestellten Proportion bedienen, die ein einfacheres Kennzeichen des Gleichgewichts darbietet und eine bequemere Anwendung gestattet.

§. 41.

Aufgaben zur praktischen Anwendung der vorgetragenen Lehren.

1) Zwei feste Stangen **AC, BC** (Fig. 18) sind in einer vertikalen Ebene, ein sogenanntes Bockgerüste bildend, mit ihren oberen Enden gelenkartig mit einander verbunden, während sie sich mit ihren unteren Enden auf eine wagerechte Ebene stützen. Man soll die Pressungen bestimmen, welche durch das bei **C** aufgehängte Gewicht **P** in den Stützpunkten **A** und **B** hervorgebracht werden.

Zu diesem Ende zerlege man die vertikale Kraft **P** vermittelst des Parallelogrammes **CP'PP''** nach den Richtungen der beiden Stangen **CA, CB** in die Seitenkräfte **P'** und **P''**. Dieselben ergeben sich, wenn α und β die zwischen ihnen und der Kraft **P** enthaltenen Winkel sind, gemäß §. 38 durch folgende Proportionen:

$$P : P' = \operatorname{Sin}(\alpha+\beta) : \operatorname{Sin}\beta; \quad \text{also } P' = \frac{P \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)};$$

$$P : P'' = \operatorname{Sin}(\alpha+\beta) : \operatorname{Sin}\alpha; \quad \text{» } P'' = \frac{P \cdot \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}.$$

Man verlege die Angriffspunkte dieser Kräfte auf ihren Richtungen von **C** nach **A** und **B**, und zerlege sie hier wieder nach der Richtung der wagerechten Ebene **AB** und normal darauf je in zwei Seitenkräfte **Q, R** und **S, T**. Vermittelst

der beiden rechtwinkligen Parallelogramme AQP'R und BSP''T findet man nach einander:

$$Q = P' \operatorname{Sin}\alpha = P\frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)};\quad R = P' \operatorname{Cos}\alpha = P\frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)};$$

$$S = P'' \operatorname{Sin}\beta = P\frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)};\quad T = P'' \operatorname{Cos}\beta = P\frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}.$$

Hiernach ſind die horizontalen Seitenkräfte Q und S einander gleich, woraus hervorgeht, daß die ſchrägen Stangen AC, BC parallel der Ebene AB gleiche, aber entgegengeſetzte Seitenſchube ausüben. Denkt man ſich daher die unteren Enden der genannten Stangen durch ein horizontales Seil, oder durch einen undehnbaren Faden von hinreichender Feſtigkeit mit einander verbunden, ſo iſt

$$Q = S = P\frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}$$

die Spannung, welche dieſer Faden zu erleiden hat.

Was die beiden andern Seitenkräfte R und T betrifft, welche die beiden vertikalen Preſſungen auf die Stützpunkte A und B darſtellen, ſo geben die dafür gefundenen Ausdrücke zu folgenden Vergleichungen Anlaß:

$$R + T = P\frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)} = P;$$

$$R : T = \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\alpha : \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta = \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\alpha.$$

Beide Vertikalpreſſungen ſind alſo zuſammen genommen dem in C aufgehängten Gewichte P gleich, und einzeln verhalten ſie ſich umgekehrt wie die Tangenten der Winkel, welche die ſchrägen Stangen mit der Vertikale CP bilden.

2) Fig. 19 ſtellt das Princip der ſogenannten Kniehebelpreſſe vor. Dieſelbe beſteht aus zwei feſten Stangen oder Schenkeln AC, BC, die bei C gelenkartig an einander gefügt ſind, während der obere Schenkel CB durch eine ähnliche Zuſammenfügung mit dem unbeweglichen Obertheile des Preßgeſtelles, der untere CA hingegen mit der beweglichen

Preßplatte DE verbunden ist. Letztere kann sich nur im Sinne der Verbindungslinie AB auf und ab bewegen, so daß der Endpunkt A des unteren Schenkels bei jeder Stellung des Kniees ACB sich stets auf jener Linie befindet. Denkt man sich in C die auf AB normale Kraft P angebracht, so findet die vorige Theorie, wenn dieselbe Bezeichnung beibehalten wird, auf diese Anordnung ohne Weiteres Anwendung.

Hauptsächlich kömmt es hier auf die Kraft an, mit welcher die Preßplatte DE auf die unter derselben befindliche Substanz niedergedrückt wird, und diese ergiebt sich durch die Formel

$$Q = P \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}.$$

Dagegen ist

$$R = P \cdot \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}$$

die Kraft, mit welcher die Preßplatte seitwärts gegen das Gestell gedrückt wird. Ähnliche Wirkungen ergeben sich im Verbindungspunkte B am Obertheil der Presse.

Gewöhnlich ist, wie in der Zeichnung angenommen, das Knie ACB gleichschenklig und der Winkel ACB wird dann von der Kraft P halbirt. Bezeichnet man jede Hälfte mit α, so ergiebt sich für diese Annahme

$$Q = \tfrac{1}{2}P \cdot \operatorname{tg}\alpha; \quad R = \tfrac{1}{2}P.$$

Demnach wird die Pressung Q auf die bewegliche Platte desto größer, je mehr sich der Winkel α einem rechten, das Knie ACB also der geraden Linie nähert, und auf diese Weise kann die Pressung bis ins Unendliche zunehmen.

Beisp. Läßt man die Kraft P unbestimmt, so ergiebt sich:

für $\alpha = 80°$, $Q = 2{,}84 \cdot P$; für $\alpha = 88°$, $Q = 14{,}37 \cdot P$;
„ $\alpha = 85°$, $Q = 5{,}72 \cdot P$; „ $\alpha = 89°$, $Q = 28{,}65 \cdot P$.

3) Fig. 20 stellt das Prinzip einer Presse dar, die aus einer Zusammensetzung dreier gleichschenkliger Kniee besteht. Von diesen ist das eine ACB horizontal gelagert, während

die beiden andern DFE und DFE wie in Fig. 19 eine vertikale Stellung haben. Die oberen Schenkel der letzteren ſind durch Gelenke mit dem Obertheile DD des Preßgeſtelles, die unteren Schenkel aber auf gleiche Weiſe mit der Preßplatte EE verbunden. Die Schenkel des Kniees ACB ſtützen ſich mit ihren unteren Enden bei A und B auf horizontale, zu beiden Seiten des Geſtelles angebrachte Bahnen, und ſind außerdem durch die Zugſtangen AF, BF mit den Scheiteln F, F der vertikalen Kniee in Verbindung geſetzt.

Hiernach iſt die Wirkungsart der beſchriebenen Verrichtung leicht verſtändlich, und es bleibt alſo nur übrig, von den verſchiedenen, darin ſtattfindenden Preſſungen Rechenſchaft zu geben. Zu dem Ende ſeien α die gleichen Winkel, welche die in C angebrachte vertikale Kraft P mit den Schenkeln des Kniees ACB bildet, und β ſeien die ebenfalls gleichen Winkel, die von den beiden Zugſtangen mit den Schenkeln der Kniee DFE gebildet werden.

Durch eine wiederholte Anwendung des Parallelogramms der Kräfte ergeben ſich zuvörderſt in den Stützpunkten A und B des erſtgenannten Kniees die vertikalen Preſſungen R, R, jede $= \frac{1}{2}P$, und die mit den wagerechten Bahnen parallelen Seitenwirkungen Q, Q, jede von der Größe

$$Q = \tfrac{1}{2}P \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Jene erſten Preſſungen werden durch die Gegenwirkung der wagerechten Bahnen, worauf ſie ſenkrecht ſind, aufgehoben, während dieſe letzteren ſich mittelſt der Zugſtangen AF, BF auf die Kniee DFE fortpflanzen, und dieſe gerade zu biegen ſtreben. Betrachtet man ſie daher als Kräfte, die in den Scheiteln F, F dieſer Kniee wirken, ſo entſpringen daraus in den oberen und unteren Stützpunkten der Knieſchenkel die auf DE ſenkrechten Seitenwirkungen

$$V = \tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{4}P \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

und die mit der genannten Linie parallelen Pressungen

$$U = \tfrac{1}{2}Q \cdot tg\beta = \tfrac{1}{4}P \cdot tg\alpha tg\beta.$$

Jene werden durch die Festigkeit des Obertheiles **DD** und der Preßplatte **EE** aufgehoben; diese hingegen drücken die genannte Platte an beiden Enden mit gleicher Kraft herab, und es ist daher

$$2U = \tfrac{1}{2}P \cdot tg\alpha tg\beta$$

der gesammte Druck, den die Preßplatte auf die darunter befindliche Substanz ausübt*).

Beisp. Für $\alpha = 88°$, $\beta = 89°$ ergiebt sich die durch die unbestimmte Kraft **P** hervorgebrachte Pressung

$$2U = 57{,}29 \cdot 14{,}37 \cdot P = 822{,}96 \cdot P.$$

4) Es sei **AB** (Fig. 21) eine, um ihren oberen Endpunkt **A** drehbare Stange, die sich mit ihrem unteren Ende **B** auf die ebene Oberfläche der Platte **MN** stützt. Parallel mit dieser Platte wirkt eine gegebene Kraft **P** mit dem Bestreben, jene Stange dadurch in die auf der Platte senkrechte Lage **AG** zu bringen, daß sie das untere Ende **B** im Sinne ihrer Richtung fortzieht; wobei vorausgesetzt werden muß, daß die Platte **MN** auf einer elastischen Unterlage ruht.

Um den Druck zu bestimmen, den die Stange in irgend einer Stellung mit ihrem unteren Ende auf die Platte ausübt, zerlege man die Kraft **P** mittelst des Parallelogrammes **BDCE** in zwei Seitenkräfte **Q** und **R**, von welchen die eine auf **MN** senkrecht ist, die andere aber nach der Richtung **BA** wirkt. Ist α der Winkel, den die Stange in der angenommenen Stellung mit der Platte **MN** bildet, so findet man

$$Q = P \cdot tg\alpha; \quad R = P \cdot Sec\alpha.$$

Von diesen beiden Seitenkräften wird die zweite von der festen Stange aufgehoben, während die erste die Platte auf

*) Nach diesem Prinzip hat der hiesige Hofbuchbinder, Herr Leisegang, eine Presse zur Darstellung von Golddruck auf Sammet ꝛc. konstruirt, die sich als sehr zweckmäßig bewährt hat.

ihre Unterlage herabdrückt. Übrigens wachſen beide Kräfte mit der Zunahme des Winkels α ohne Gränzen, und werden mit $\alpha = 1\,R.$ zugleich unendlich groß.

Hierauf beruht die Einrichtung der ſogenannten Stangenpreſſe zum lithographiſchen Druck.

§. 42.

Zuſätze, das Gleichgewicht dreier Kräfte an einem materiellen Punkte betreffend.

1) Sind die drei Kräfte A, B, C (Fig. 22) unter den Gegenwinkeln α, β, γ an einem Punkt im Gleichgewicht, und zieht man mit ihren Richtungen die Linien $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ parallel, bis ſie ſich in den Punkten A', B' und C' ſchneiden, ſo entſteht ein Dreieck $A'B'C'$, deſſen Seiten denjenigen Kräften proportional ſind, mit deren Richtungslinien ſie parallel gehen.

Nach dem geometriſchen Satze, daß zwei Winkel gleich ſind, wenn ſie ſich nach derſelben Gegend hin öffnen und ihre Schenkel paarweiſe parallel mit einander ſind, folgt leicht, daß wenn man durch Verlängerung der Seiten die äußeren Winkel des Dreiecks bildet, alsdann der Außenwinkel bei $C' = \alpha$, der bei $A' = \beta$ und der bei $B' = \gamma$ ſein muß. Bezeichnet man nun die daſelbſt Statt findenden innern Winkel des Dreiecks, welche von jenen die Nebenwinkel ſind, analog mit α', β' und γ', ſo hat man:

$$\operatorname{Sin}\alpha' = \operatorname{Sin}\alpha;\quad \operatorname{Sin}\beta' = \operatorname{Sin}\beta;\quad \operatorname{Sin}\gamma' = \operatorname{Sin}\gamma.$$

Nun verhält ſich in dem conſtruirten Dreieck

$$A'B' : B'C' : C'A' = \operatorname{Sin}\alpha' : \operatorname{Sin}\beta' : \operatorname{Sin}\gamma',$$

folglich auch

$$A'B' : B'C' : C'A' = \operatorname{Sin}\alpha : \operatorname{Sin}\beta : \operatorname{Sin}\gamma.$$

Aber wegen des vorhandenen Gleichgewichtes findet nach §. 39 die Bedingung Statt.

$$A : B : C = \operatorname{Sin}\alpha : \operatorname{Sin}\beta : \operatorname{Sin}\gamma.$$

Demnach ergiebt sich aus der Verbindung der beiden vorigen Proportionen folgende behauptete:

$$A'B' : B'C' : C'A' = A : B : C.$$

2) Zieht man ferner drei gerade Linien A"B", B"C" und C"A" (Fig. 22) senkrecht auf die Richtungslinien der drei Kräfte A, B, C, die an einem materiellen Punkte mit einander im Gleichgewicht sind, so entsteht ein Dreieck A"B"C", dessen Seiten denjenigen Kräften proportional sind, auf deren Richtungslinien sie senkrecht stehen.

Denn nach der in der Figur angedeuteten Bezeichnung verhält sich im Dreieck A"B"C":

$$A''B'' : B''C'' : C''A'' = \sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma';$$

und weil unter den Kräften A, B, C ein Gleichgewicht vorausgesetzt ist, so hat man dafür die Bedingung

$$A : B : C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Nun ist aber leicht nachzuweisen, daß die Winkel α und α', β und β', γ und γ' sich paarweise zu zwei Rechten ergänzen, weshalb $\sin\alpha = \sin\alpha'$, $\sin\beta = \sin\beta'$ und $\sin\gamma = \sin\gamma'$ ist. Dies berücksichtigend, erhält man durch Vereinigung der beiden vorigen Proportionen die folgende:

$$A''B'' : B''C'' : C''A'' = A : B : C.$$

3) Wenn die drei Kräfte A, B, C an einem Punkte mit einander im Gleichgewichte sind, und man construirt die Dreiecke A', B', C' und A", B", C" (Fig. 22) so, daß zwei von ihren Seiten mit den Richtungslinien zweier Kräfte parallel oder auf denselben senkrecht sind, während sich ihre Längen wie die Intensitäten dieser Kräfte verhalten, so finden dieselben Beziehungen zwischen der dritten Seite des einen oder anderen Dreiecks und der dritten Kraft des im Gleichgewicht befindlichen Systemes statt.

Denn sind die beiden Seiten A'C', A'B' des Dreiecks A'B'C' bezüglich den Kräften A und B parallel, so ist der von ihnen gebildete Winkel γ' der Nebenwinkel des Winkels

γ, den die beiden Kräfte mit einander bilden. Daher ist $\mathrm{Cos}\gamma' = -\mathrm{Cos}\gamma$, und demgemäß hat man:

$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2\cdot A'B'\cdot A'C'\cdot \mathrm{Cos}\,\gamma'$$
$$= A'B'^2\left(1 + \frac{A'C'^2}{A'B'^2} + 2\frac{A'C'}{A'B'}\cdot \mathrm{Cos}\gamma\right).$$

Nach der Voraussetzung verhält sich aber

$$A'C' : A'B' = A : B;$$

mithin entsteht $B'C'^2 = A'B'^2\left(1 + \frac{A^2}{B^2} + 2\frac{A}{B}\mathrm{Cos}\gamma\right)$,

oder $B^2\cdot B'C'^2 = A'B'^2(B^2 + A^2 + 2BA\cdot \mathrm{Cos}\gamma)$.

Und da zufolge der Gleichungen (1) der vorigen §

$$B^2 + A^2 + 2BA\cdot \mathrm{Cos}\gamma = C^2,$$

so ist $B^2\cdot B'C'^2 = C^2\cdot A'B'^2$; oder $B\cdot B'C' = C\cdot A'B'$;

also $A'B' : B'C' = B : C.$

Demnach ist die dritte Seite $B'C'$ des fraglichen Dreiecks ebenso der Kraft C proportional, wie dies für die Seiten $A'C'$ und $A'B'$ in Bezug auf die mit ihnen parallelen Kräfte A und B vorausgesetzt wurde. Daß aber jene Seite auch mit der Richtung der Kraft C parallel ist, läßt sich leicht auf folgende Weise zeigen.

Mit Hinsicht auf die in der Figur angegebene Bezeichnung ergiebt sich nach einem bekannten Satze:

$$B'C' : A'B' = \mathrm{Sin}\gamma' : \mathrm{Sin}\beta',$$

und wegen des vorausgesetzten Gleichgewichtes hat man

$$C : B = \mathrm{Sin}\gamma : \mathrm{Sin}\beta.$$

Da nun $\mathrm{Sin}\gamma' = \mathrm{Sin}\gamma$, und, wie bewiesen,

$$B'C' : A'B' = C : B,$$

so folgt aus der Vergleichung der beiden vorigen Proportionen

$$\mathrm{Sin}\beta' = \mathrm{Sin}\beta; \quad \text{mithin } \beta' + \beta = 2\mathfrak{R};$$

woraus der Parallelismus zwischen $B'C'$ und C leicht erhellet, nachdem derselbe zwischen $A'C'$ und A vorausgesetzt worden ist.

Ganz auf dieselbe Weise ist der Satz für das Dreieck

A"B"C" zu beweisen, dessen Seiten auf den Richtungslinien der mit einander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte senkrecht stehen.

4) Da also drei Kräfte, die sich an einem Punkte gegenseitig im Gleichgewicht erhalten, jedesmal durch die drei Seiten eines Dreiecks dargestellt werden können, welche den Intensitäten derselben proportional sind, so folgt, daß die Summe zweier Kräfte stets größer sein muß, als die dritte. Wird dieser Bedingung kein Genüge geleistet, so ist auch ein Gleichgewicht unter den Kräften nicht möglich.

§. 43.

Aufgaben zur Anwendung vorstehender Sätze.

1) Drei gegebene Kräfte A, B, C, von denen jede kleiner als die Summe der beiden andern ist, sollen an einem zu bestimmenden Punkte O (Fig. 23) so angebracht werden, daß sie denselben im Gleichgewicht erhalten. Dabei sollen die Richtungen von A und B durch die gegebenen Punkte P, Q, und die Richtung der dritten Kraft C soll mit der gegebenen Linie xy parallel gehen.

Um diese Aufgabe zu lösen, beschreibe man über der Linie xy ein Dreieck xyz, dessen Seiten xy, xz und yz sich wie die gegebenen Kräfte C, B und A verhalten. Alsdann ziehe man durch den Punkt P die Linie OA parallel mit yz, so wie durch Q die Linie OB parallel mit xz; so werden sich diese beiden Linien in einem Punkte O schneiden, welcher der gesuchte Angriffspunkt ist. Zieht man nun noch OC parallel mit xy, so sind die drei Kräfte A, B, C nach den Richtungen OA, OB, OC mit einander im Gleichgewicht.

Der Beweis der Richtigkeit folgt unmittelbar aus dem ersten Satze des vorigen Paragraphen.

2) Drei gegebene Kräfte A, B, C, von denen jede kleiner ist als die Summe der beiden andern, sollen an einem

Punkte ſo ins Gleichgewicht gebracht werden, daß ihre Richtungen durch drei gegebene Punkte **P**, **Q** und **R** gehen.

Um die Lage des gemeinſchaftlichen Angriffspunktes **O** (Fig. 23) rückſichtlich der drei gegebenen Punkte zu beſtimmen, verbinde man zwei von den gegebenen Punkten, z. B. **Q** und **R** durch eine gerade Linie, und beſchreibe darüber ein Dreieck **QRS**, deſſen Seiten **QR**, **RS**, **SQ** ſich wie die gegebenen Kräfte **A**, **B**, **C** verhalten. Um dieſes Dreieck beſchreibe man einen Kreis, und lege durch **S** und **P** eine gerade Linie **SP**, ſo wird dieſe die Peripherie dieſes Kreiſes in einem Punkte **O** ſchneiden, welcher der geſuchte Angriffspunkt iſt. Zieht man nemlich aus **O** durch **P**, **Q** und **R** gerade Linien, ſo ſtellen dieſe die Richtungslinien der gegebenen Kräfte **A**, **B** und **C** dar, und nun muß bewieſen werden, daß letztere mit einander im Gleichgewichte ſind.

Im Dreieck **QRS** verhält ſich nemlich:

$$QR : RS : SQ = \operatorname{Sin} QSR : \operatorname{Sin} RQS : \operatorname{Sin} QRS.$$

Nun iſt aber $\angle QRS = \angle QOS$ } als Peripheriewinkel, die
und $\angle RQS = \angle ROS$ } auf gleichen Bogen ſtehn.

daher $\operatorname{Sin} QRS = \operatorname{Sin} QOS = \operatorname{Sin} AOB$;

$\operatorname{Sin} RQS = \operatorname{Sin} ROS = \operatorname{Sin} AOC$.

Auch iſt $\operatorname{Sin} QSR = \operatorname{Sin} BOC$; weil die zugehörigen Winkel zuſammen zwei rechte betragen. Dies in die obige Proportion geſetzt, giebt

$$QR : RS : SQ = \operatorname{Sin} BOC : \operatorname{Sin} AOC : \operatorname{Sin} AOB,$$

und da ſich nach der Conſtruction auch verhält:

$$QR : RS : SQ = A : B : C;$$

ſo folgt $A : B : C = \operatorname{Sin} BOC : \operatorname{Sin} AOC : \operatorname{Sin} AOB$;

woraus das Vorhandenſein des Gleichgewichts zwiſchen den drei Kräften hervorgeht.

3) Es ſei eine feſte gerade Linie **MN** (Fig. 24) und außerhalb derſelben ein Punkt **P** gegeben. Man ſoll auf jener Linie einen Punkt **O** ſo beſtimmen, daß daran zwei gegebene

Kräfte A und B, von welchen die eine durch den Punkt P geht, während die andere mit einer gegebenen Richtung xz parallel ist, unter Mitwirkung jener festen Linie einander das Gleichgewicht halten.

Nimmt man an, der Punkt O sei längs der festen Linie MN, wie ein Ring auf einem Stabe, frei beweglich, so kann er offenbar nur da im Gleichgewicht bleiben, wo die auf ihn wirkenden Kräfte A und B eine Mittelkraft C liefern, welche auf MN senkrecht steht. Denn wäre letzteres nicht der Fall, so könnte man die Kraft C nach der Richtung von MN und normal darauf in zwei Seitenkräfte zerlegen, von welchen die erste, im Widerspruch mit der Bedingung der Aufgabe, den Punkt O längs MN fortbewegen würde.

Um nun die Lage des fraglichen Punktes für den Zustand des Gleichgewichtes zu finden, ziehe man zu normal auf MN, nehme auf der gegebenen Richtung das Stück zx als Repräsentanten der damit parallelen Kraft B an, und beschreibe aus dem Punkte x mit einer Linie xy als Halbmesser, welche nach demselben Maaßstabe die Kraft A darstellt, einen Kreisbogen vw. Schneidet derselbe die Linie zu, so geschieht das allemal in zwei Punkten y, y', und es finden dann folgende zwei Auflösungen statt:

Durch den gegebenen Punkt P ziehe man entweder die Gerade PA parallel mit xy oder PA' parallel mit xy', und verlängere diese Geraden, bis sie die feste Linie MN bezüglich in O und O' schneiden, so werden beide Durchschnittspunkte der Bedingung der Aufgabe Genüge leisten. Zieht man nemlich aus ihnen die mit zx parallelen Linien OB, O'B', so sind die gegebenen Kräfte A und B sowohl am Punkte O als auch an O' unter Mitwirkung der festen Linie mit einander im Gleichgewicht, und zwar an jenem Punkte, wenn sie nach den Richtungen OA, OB, an diesem aber, wenn sie nach O'A', O'B' wirken.

Die in den Punkten O und O′ ſtattfindenden Preſſungen normal auf MN werden bezüglich durch zy und zy′ dargeſtellt. Oder dieſe Linien ſind das Maaß der Widerſtände C und C′, welche die genannte feſte Linie für den Zuſtand des Gleichgewichts in jenen Punkten dem vereinigten Druck der beiden gegebenen Kräfte entgegenſetzen muß. Der Beweis folgt aus Satz 3) des vorigen Paragraphen.

Die Aufgabe wird unmöglich, ſobald der Kreisbogen vw, deſſen Halbmeſſer die Kraft A darſtellt, die auf MN normale Linie zu nicht mehr ſchneidet. Demnach dürfen die Intenſitäten der beiden Kräfte A und B nicht ganz beliebig gegeben ſein; ſondern, wenn die eine B von der mit ihrer Richtung parallelen Linie zx dargeſtellt wird, ſo muß die andere A größer ſein, als der Perpendikel xt, der aus dem Punkte x auf die Gerade zu gefällt werden kann.

4) An dem materiellen Punkte O, der auf der feſten Linie MN (Fig. 25) nach der Richtung ihrer Länge frei beweglich iſt, ſich aber nicht von ihr entfernen kann, wirken zwei gegebene Kräfte A und B, deren Richtungslinien bei jeder Lage des Punktes ſtets durch die ebenfalls gegebenen Punkte P und Q gehen. Man ſoll auf der Linie MN den Ort des beweglichen Punktes beſtimmen, wo derſelbe unter Einwirkung der beiden Kräfte im Gleichgewichte bleibt.

Zu dieſem Ende beſchreibe man aus einem der gegebenen Punkte, z. B. aus P, zwei concentriſche Kreiſe, deren Halbmeſſer PD, PE ſich wie die Kräfte A und B verhalten. Da nun die Mittelkraft dieſer beiden Kräfte auf gleiche Weiſe wie bei der vorigen Aufgabe, für den Zuſtand des Gleichgewichtes auf MN ſenkrecht ſein muß, ſo ziehe man innerhalb der concentriſchen Kreiſe beliebig viele auf MN normale Linien DE, FG ꝛc., und aus den dadurch beſtimmten Punkten D, F ꝛc. der äußeren, ſo wie aus den entſprechenden Punkten E, G ꝛc. der inneren Peripherie nach dem

Mittelpunkt P die Halbmeſſer DP, FP, EP, GP ꝛc. Hiernach ziehe man aus dem zweiten gegebenen Punkte Q mit den Halbmeſſern EP, GP ꝛc. des innern Kreiſes die parallelen Linien QV, QW ꝛc., welche die entſprechenden Halbmeſſer PD, PF ꝛc. des äußeren Kreiſes, oder deren Verlängerungen, bezüglich in V, W ꝛc., ſchneiden. Dieſe Durchſchnittspunkte, ſtetig mit einander verbunden, bilden dann eine gewiſſe Curve VOW, und der Punkt O, in welchem dieſelbe ſich mit MN ſchneidet, iſt der geſuchte Ort des Gleichgewichtes für den beweglichen Punkt.

Denn man ziehe aus dem ſo beſtimmten Punkte O durch P und Q die geraden Linien OP, OQ, nach deren Richtungen die gegebenen Kräfte A und B wirken, und aus dem Punkte J, wo die erſte Linie den Umfang des äußeren Kreiſes ſchneidet, die auf MN ſenkrechte Linie JK, welche den Umfang des inneren Kreiſes auf der der Linie MN abgewendeten Seite in K trifft. Verbindet man nun letzteren Punkt mit dem Mittelpunkte P durch die Gerade KP, ſo iſt dieſelbe mit OQ parallel, und man erhält ſo das Dreieck JKP, deſſen zwei Seiten PJ, PK, bezüglich den mit ihnen parallelen Kräften A und B proportional ſind. Die dritte Seite JK ſtellt dann nach Satz 3) des vorigen §. die entgegengeſetzte Mittelkraft zu A und B, alſo den Widerſtand C vor, den die feſte Linie MN dem vereinigten Druck jener beiden Kräfte in O entgegenſetzen muß.

Anmerkung. Auf ähnliche Weiſe, wie bei der vorigen Aufgabe, finden hier auf der Verlängerung von MN mehrere Punkte des Gleichgewichtes Statt, deren conſtructive Beſtimmung jedoch dem Leſer überlaſſen bleiben möge.

§. 44.

Beliebig viele Kräfte an einem materiellen Punkte wirkſam. Wir wollen nun eine beliebige Anzahl von Kräften betrachten, die nach verſchiedenen Richtungen auf einen materiellen Punkt wirken, und deren Richtungslinien alle in

derselben Ebene befindlich sind. Wir setzen voraus, daß unter diesen Kräften kein Gleichgewicht vorhanden sei, und stellen die Aufgabe: ihre Mittelkraft zu bestimmen.

Es sei P (Fig. 26) der gemeinschaftliche Angriffspunkt und A, B, C... ꝛc. seien die Intensitäten der daran wirksamen Kräfte. Um deren Richtungen angeben zu können, ziehe man durch den Punkt P zwei auf einander normale Linien XX' und YY', normale Achsen genannt, und bezeichne die Winkel, welche die Kräfte mit einer dieser Achsen, z. B. mit XX' bilden, nach der Reihe mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ꝛc. Dabei soll, der Gleichförmigkeit wegen, jeder dieser Winkel in demselben Sinne, von der Linie PX an rechts herum, von 0 bis 360 Grad gezählt werden. Demnach ist der Bogen pa das Maaß des Winkels α, der Bogen pab das des Winkel β, der Bogen pqc das des Winkels γ u. s. w.

Man zerlege nun jede von den gegebenen Kräften nach den Richtungen der Achsen XX' und YY' in Seitenkräfte, so ergeben sich dafür die folgenden Ausdrücke:

$$A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha, \quad B \cdot \mathrm{Cos}\,\beta, \quad C \cdot \mathrm{Cos}\,\gamma, \quad D \cdot \mathrm{Cos}\,\delta \ldots \text{ ꝛc.}$$

$$A \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha, \quad B \cdot \mathrm{Sin}\,\beta, \quad C \cdot \mathrm{Sin}\,\gamma, \quad D \cdot \mathrm{Sin}\,\delta \ldots \text{ ꝛc.}$$

Von diesen Seitenkräften müßten eigentlich diejenigen, welche nach den Richtungen PX und PY wirken, positiv, und die, welche nach den entgegengesetzten Richtungen PX' und PY' wirksam sind, negativ in Rechnung kommen. Durch die gewählte Bezeichnung der Winkel ist man jedoch dessen überhoben, auf diesen Gegensatz der Richtungen noch besonders Rücksicht zu nehmen, weil letztere für jeden besondern Fall schon durch die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus bestimmt werden.

Um dies hier ein für allemal klar zu machen, sei AA'PA'' das Parallelogramm, wodurch die Kraft A, deren Richtungslinie im ersten Quadranten XPY enthalten ist, in die Seitenkräfte $PA' = A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha$ und $PA'' =$

$A \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$ zerlegt wird. Nun ist es augenscheinlich, daß diese nach den positiv genannten Richtungen PX und PY wirksam sind. Die Richtungslinie der Kraft D liegt im dritten Quadranten X'PY'; und wenn sie hier mittelst des Parallelogramms DD'PD'' in die Seitenkräfte $PD' = D \cdot \mathrm{Cos}\,(rd)$ und $PD'' = D \cdot \mathrm{Sin}\,(rd)$ zerlegt wird, so lehrt ebenfalls der Augenschein, daß sich die Wirksamkeit derselben nach den negativen Richtungen PX' und PY' erstreckt. Wenn man also die Seitenkräfte von A durch $+ A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha$ und $+ A \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$ bezeichnet, so muß man die von D, im Gegensatz der vorigen, durch $- D \cdot \mathrm{Cos}\,(rd)$ und $- D \cdot \mathrm{Sin}\,(rd)$ bezeichnen. Es ist aber $\angle rd = \delta - 180^0$; daher

$$\mathrm{Cos}\,(rd) = \mathrm{Cos}\,(\delta - 180) = - \mathrm{Cos}\,\delta,$$

und $$\mathrm{Sin}\,(rd) = \mathrm{Sin}\,(\delta - 180) = - \mathrm{Sin}\,\delta;$$

folglich ist auch, wenn dies berücksichtigt wird,

$$PD' = - D \cdot \mathrm{Cos}\,(rd) = D \cdot \mathrm{Cos}\,\delta;$$

$$PD'' = - D \cdot \mathrm{Sin}\,(rd) = D \cdot \mathrm{Sin}\,\delta.$$

Hieraus geht hervor, daß alle Seitenkräfte, die man durch die erwähnte Zerlegung der gegebenen Kräfte erhält, in der Rechnung als positiv behandelt werden können, und daß man nur dann erst nöthig hat, auf die entgegengesetzten Vorzeichen Rücksicht zu nehmen, wenn für die Winkel α, β, γ ... &c. besondere Zahlenwerthe gegeben sind.

Zufolge §. 16 erhält man nun für die Gesammtwirkung der Seitenkräfte:

nach der Achse XX';

$$A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha + B \cdot \mathrm{Cos}\,\beta + C \cdot \mathrm{Cos}\,\gamma + \cdots \text{ &c.} = \Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha;$$

nach der Achse YY';

$$A \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha + B \cdot \mathrm{Sin}\,\beta + C \cdot \mathrm{Sin}\,\gamma + \cdots \text{ &c.} = \Sigma A \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha;$$

wo das Zeichen Σ die algebraische Summe derjenigen Seitenkräfte bezeichnet, welche nach derselben Achse wirksam sind, und deren Intensitäten alle von derselben Form sind, wie die der ersten Kraft A, welche hinter den beiden Σ stehen.

Was nun die Mittelkraft der gegebenen Kräfte anbelangt, ſo hat ſie mit dieſen den Angriffspunkt P gemeinſchaftlich, und es iſt daher nur nöthig, ihre Intenſität M und ihren Richtungswinkel μ zu beſtimmen; letzteren in demſelben Sinne genommen, wie die Winkel der gegebenen Kräfte.

Zerlegt man dieſe Kraft ebenfalls nach den beiden Achſen XX′ und YY′, ſo ergiebt ſich:

nach der Achſe XX′ die Seitenkraft $= M \cdot \mathrm{Cos}\mu$;

» » » YY′ » » $= M \cdot \mathrm{Sin}\mu$.

Soll nun M die vereinte Wirkung ſämmtlicher Kräfte in jeder Beziehung erſetzen, ſo muß dies auch nach den Richtungen der beiden Achſen der Fall ſein, und daher hat man die beiden Gleichungen

(1) $\qquad M \cdot \mathrm{Cos}\mu = \Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\alpha,$

(2) $\qquad M \cdot \mathrm{Sin}\mu = \Sigma A \cdot \mathrm{Sin}\alpha;$

durch welche die beiden unbekannten Größen M und μ vollkommen beſtimmt ſind.

Quadrirt man nemlich beide Gleichungen, und addirt ſie hierauf, ſo findet man

(3) $\qquad M^2 = (\Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\alpha)^2 + (\Sigma A \cdot \mathrm{Sin}\alpha)^2;$

alſo $\qquad M = \sqrt{(\Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\alpha)^2 + (\Sigma A \cdot \mathrm{Sin}\alpha)^2}.$

Dividirt man dagegen die zweite Gleichung durch die erſte, ſo ergiebt ſich

(4) $$\mathrm{Tang}\mu = \frac{\Sigma A \cdot \mathrm{Sin}\alpha}{\Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\alpha}.$$

Der Werth von $\mathrm{Tang}\mu$ giebt aber allein noch nicht die wahre Richtung der Mittelkraft, inſofern eine poſitive Tangente für den erſten und dritten, eine negative aber für den zweiten und vierten Quadranten gilt. Um dieſen Zweifel zu heben, kann man, da M bekannt iſt, aus der 2ten Gleichung noch den Sinus entwickeln, wofür man erhält

(5) $$\mathrm{Sin}\mu = \frac{\Sigma A \cdot \mathrm{Sin}\alpha}{M};$$

und nun ist, wie leicht einzusehen, hinsichtlich der Lage der Mittelkraft nichts mehr zweideutig.

Zahlenbeispiel. Es seien folgende fünf Kräfte gegeben:

$A = 100$; $B = 180$; $C = 120$; $D = 87$; $E = 150$;
$\alpha = 40°$; $\beta = 128°$; $\gamma = 198°$; $\delta = 248°$; $\eta = 295°$;

Mit Zugrundelegung der Vegaschen Tafeln findet man hiernach:

$\cos\alpha = +0{,}766$	$A\cos\alpha = +76.600.$	$\sin\alpha = +0{,}643$	$A\sin\alpha = +64{,}300.$
$\cos\beta = -0{,}618$	$B\cos\beta = -111{,}240.$	$\sin\beta = -0{,}786$	$B\sin\beta = +141{,}480.$
$\cos\gamma = -0{,}951$	$C\cos\gamma = -114{,}120.$	$\sin\gamma = -0{,}309$	$C\sin\gamma = -37{,}080.$
$\cos\delta = -0{,}375$	$D\cos\delta = -32{,}625.$	$\sin\delta = -0{,}927$	$D\sin\delta = -80{,}649.$
$\cos\eta = +0{,}423$	$E\cos\eta = +63{,}450.$	$\sin\eta = -0{,}906$	$E\sin\eta = -133{,}900.$
	$\Sigma A\cos\alpha = -117{,}935.$		$\Sigma A\sin\alpha = -47{,}849.$

Zufolge der Gleichungen (3), (4) und (5) erhält man nunmehr

$$M = \sqrt{(117{,}935)^2 + (47{,}849)^2} = 127{,}28 \text{ Krafteinheiten};$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{-47{,}849}{-117{,}935} = +0{,}4057; \quad \sin\mu = \frac{-47{,}849}{+127{,}28} = -0{,}3759.$$

Nach dem Vorzeichen der Tangente liegt die Richtungslinie entweder im ersten oder dritten, nach dem des Sinus aber im dritten oder vierten Quadranten; folglich kann sie überhaupt nur im dritten Quadranten liegen. Unmittelbar in den trigonom. Tafeln findet man nun den Winkel, dessen Tangente die Zahl 0,4057 ist, gleich 22° 5′, und daher ist $\mu = 180° + 22° 5' = 202° 5'$ der gesuchte Richtungswinkel der Mittelkraft.

§. 45.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Intensität der Mittelkraft aus der Gleichung Nr. 3 bestimmt, welche ist:

$$M^2 = (\Sigma A \cdot \cos\alpha)^2 + (\Sigma A \cdot \sin\alpha)^2.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich noch ein anderer Ausdruck für die Mittelkraft ableiten, wenn man die beiden Glieder auf der rechten Seite wirklich zur zweiten Potenz entwickelt. Man erhält dann nach einander:

$$(\Sigma A \cdot \cos\alpha)^2 =$$
$$A^2 \cdot \cos\alpha^2 + B^2 \cdot \cos\beta^2 + C^2 \cdot \cos\gamma^2 + D^2 \cdot \cos\delta^2 + \cdots$$
$$+ 2AB \cdot \cos\alpha\cos\beta + 2AC \cdot \cos\alpha\cos\gamma + 2AD \cdot \cos\alpha\cos\delta + \cdots$$
$$+ 2BC \cdot \cos\beta\cos\gamma + 2BD \cdot \cos\beta\cos\delta + \cdots$$
$$+ 2CD \cdot \cos\gamma\cos\delta + \cdots \text{ ꝛc.}$$

$$(\Sigma A \cdot \sin\alpha)^2 =$$
$$A^2 \cdot \sin\alpha^2 + B^2 \cdot \sin\beta^2 + C^2 \cdot \sin\gamma^2 + D^2 \cdot \sin\delta^2 + \cdots$$

$$+2AB\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta+2AC\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma+2AD\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\delta+\cdots$$
$$+2BC\cdot\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma+2BD\cdot\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\delta+\cdots$$
$$+2CD\operatorname{Sin}\gamma\operatorname{Sin}\delta+\cdots \text{ ꝛc.}$$

Addirt man dieſe beiden Entwicklungen, und nimmt dabei die gleichartigen Glieder zuſammen, ſo findet man:

$$M^2 = A^2+B^2+C^2+D^2+\cdots$$
$$+2AB\cdot\operatorname{Cos}(\beta-\alpha)+2AC\cdot\operatorname{Cos}(\gamma-\alpha)+2AD\cdot\operatorname{Cos}(\delta-\alpha)+\cdots$$
$$+2BC\cdot\operatorname{Cos}(\gamma-\beta)+2BD\cdot\operatorname{Cos}(\delta-\beta)+\cdots$$
$$+2CD\cdot\operatorname{Cos}(\delta-\gamma)+\cdots \text{ u. ſ. w.}$$

In dieſer Gleichung iſt $(\beta-\alpha)$ der Winkel zwiſchen den Kräften A, B; $(\gamma-\alpha)$ der Winkel zwiſchen A, C; $(\gamma-\beta)$ der zwiſchen B, C; $(\delta-\gamma)$ der zwiſchen C, D u. ſ. w.; daher kann man ſetzen:

$$M^2 = A^2+B^2+C^2+D^2+\cdots$$
$$+2AB\cdot\operatorname{Cos}(AB)+2AC\cdot\operatorname{Cos}(AC)+2AD\cdot\operatorname{Cos}(AD)+\cdots$$
$$+2BC\cdot\operatorname{Cos}(BC)+2BD\cdot\operatorname{Cos}(BD)+\cdots$$
$$+2CD\cdot\operatorname{Cos}(CD)+\cdots \text{ u. ſ. w.}$$

D. h. Das Quadrat der Mittelkraft iſt gleich der Summe der Quadrate der andern Kräfte, vermehrt um die Summe der doppelten Produkte aus je zweien dieſer Kräfte multiplicirt mit dem Coſinus des von ihnen eingeſchloſſenen Winkels.

§. 46.

In dem Vorhergehenden haben wir geſehen, wie die Mittelkraft von beliebig vielen, an einem materiellen Punkt wirkenden Kräften durch Berechnung gefunden werden kann. Dieſelbe läßt ſich aber auch mittelſt wiederholter Anwendung des Parallelogramms der Kräfte durch eine geometriſche Conſtruction darſtellen, was hier noch gezeigt werden ſoll.

Um einen beſondern Fall vor Augen zu haben, mögen ſechs Kräfte A, B, C, D, E und F (Fig. 27), nach den Richtungen der entſprechenden Pfeile, auf den materiellen

Punkt P wirken, und es sei M die gesuchte Mittelkraft derselben. Die beiden Kräfte A und B seien durch die auf ihren Richtungen genommenen Stücke PA und PB dargestellt. Construirt man auf diese das Parallelogramm AB, so stellt dessen Diagonale PN die Richtung und Intensität einer Kraft N vor, welche die vereinte Wirkung von A und B vollkommen zu ersetzen im Stande ist. Diese Kraft mit der gegebenen dritten C, welche durch PC dargestellt sei, durch das Parallelogramm CN zusammengesetzt, liefert eine neue Kraft Q = PQ, welche ihre Wirkungen ersetzt und zugleich die Mittelkraft der drei Kräfte A, B und C vorstellt. Ist ferner PD die geometrische Darstellung der Kraft D, so giebt die Diagonale PR des auf PQ und PD construirten Parallelogrammes QD eine mit Q und D gleichgeltende Kraft R, welche die Mittelkraft von den vier Kräften A, B, C und D ist. In derselben Art ergiebt sich die Diagonale PS des Parallelogrammes RE als Mittelkraft von R = PR und E = PE, folglich auch als solche von den fünf Kräften A, B, C, D und E; so wie endlich im Parallelogramm PSMF die Diagonale PM die gesuchte Mittelkraft vom ganzen Systeme darstellt.

Man wird leicht bemerken, daß durch diese Construction ein Polygon PANQRSM entsteht, von welchem die eine Seite PM die Mittelkraft nach Richtung und Intensität vorstellt, während die andern Seiten die Intensitäten der Seitenkräfte darstellen, mit deren Richtungen sie parallel sind. Schließt sich das Polygon der Kräfte von selbst, so daß der Punkt M mit P zusammenfällt, so ist dies ein Zeichen, daß die gegebenen Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind; denn ihre Mittelkraft ist dann gleich Null.

§. 47.

Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen beliebig vielen Kräften. Sind die gegebenen Kräfte A,

B, C... ꝛc. an dem Punkte P mit einander im Gleichgewichte, ſo iſt ihre Geſammtwirkung auf denſelben gleich Null; daher muß auch ihre Mittelkraft, welche die vereinte Wirkung ſämmtlicher Kräfte erſetzen ſoll, ebenfalls gleich Null ſein.

Um daher die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen das Gleichgewicht ſtattfinden kann, hat man nur nöthig, in den Gleichungen (1) und (2) des §. 44, indem man die dort gewählte Bezeichnung auch hier beibehält, die Intenſität $M = 0$ zu ſetzen, wodurch man folgende Bedingungs-Gleichungen erhält:

1) $\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha = A \cdot \operatorname{Cos}\alpha + B \cdot \operatorname{Cos}\beta + C \cdot \operatorname{Cos}\gamma + \cdots$ ꝛc. $= 0$.

2) $\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha = A \cdot \operatorname{Sin}\alpha + B \cdot \operatorname{Sin}\beta + C \cdot \operatorname{Sin}\gamma + \cdots$ ꝛc. $= 0$.

Wenn alſo mehrere, an einem materiellen Punkte wirkende Kräfte mit einander im Gleichgewicht ſind, ſo ergiebt ſich ſowohl die Summe der Producte aus den Kräften in die Coſinus, als auch die Summe der Producte aus den Kräften in die Sinus ihrer Richtungswinkel, jede für ſich gleich Null. Oder, mit andern Worten: Das Gleichgewicht erfordert, daß die algebraiſche Summe der Seitenkräfte, welche durch die Zerlegung der gegebenen Kräfte nach zwei auf einander normalen Richtungen entſtehen, in Bezug auf jede dieſer Richtungen gleich Null ſei.

Man hätte dieſe beiden Gleichungen auch unmittelbar aus dem Begriffe des Gleichgewichtes ableiten können. Werden nemlich die gegebenen Kräfte nach den beiden normalen Achſen XX′ und YY′ in Seitenkräfte zerlegt, ſo ergeben ſich für die Geſammtwirkungen jener Kräfte nach den Richtungen dieſer Achſen die Ausdrücke $\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha$ und $\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha$. Das Gleichgewicht beſteht nun darin, daß nach keiner einzigen Richtung, alſo auch nicht nach den Richtungen der beiden Achſen, irgend eine Wirkung ſtattfindet, und daher müſſen jene Ausdrücke einzeln gleich Null ſein.

§. 48.

Umgekehrt, wenn für beliebig viele Kräfte, die in einer Ebene nach verschiedenen Richtungen auf einen materiellen Punkt wirken, die beiden Gleichungen

$$\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha = 0, \quad \Sigma A \operatorname{Sin}\alpha = 0$$

zu gleicher Zeit stattfinden, so sind die Kräfte allemal mit einander im Gleichgewicht.

Dies erhellet leicht, weil in Folge der beiden vorausgesetzten Gleichungen die Mittelkraft aller Kräfte gleich Null ist. Sodann läßt sich der Satz aber auch dadurch beweisen, daß man von den gegebenen Kräften irgend eine, etwa die Kraft A, als die entgegengesetzte Mittelkraft aller übrigen nachweiset (§. 10).

Schließt man nemlich die Kraft A aus, und bestimmt man von den übrigen Kräften B, C, D... ꝛc. die Mittelkraft, so sei M die Intensität und μ der Richtungswinkel derselben. Alsdann hat man nach §. 44

$$M \operatorname{Cos}\mu = \Sigma B \operatorname{Cos}\beta; \quad M \operatorname{Sin}\mu = \Sigma B \operatorname{Sin}\beta.$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha = A \operatorname{Cos}\alpha + \Sigma B \operatorname{Cos}\beta = 0,$$

und $$\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha = A \operatorname{Sin}\alpha + \Sigma B \operatorname{Sin}\beta = 0;$$

folglich ergiebt sich, wenn man diese beiden Gleichungen mit den beiden vorhergehenden verbindet,

$$A \cdot \operatorname{Cos}\alpha = -M \cdot \operatorname{Cos}\mu,$$

$$A \operatorname{Sin}\alpha = -M \operatorname{Sin}\mu.$$

Quadrirt man diese Ausdrücke und addirt sie dann, so entsteht

$$A^2 = M^2; \quad \text{mithin} \quad A = M,$$

so daß also die Kraft A der Mittelkraft aller übrigen Kräfte gleich ist. In Folge dessen ergiebt sich aber sofort

$$\operatorname{Cos}\alpha = -\operatorname{Cos}\mu; \quad \operatorname{Sin}\alpha = -\operatorname{Sin}\mu;$$

woraus hervorgeht, daß beide Kräfte einander gerade entgegengesetzt sind, da ihre Richtungswinkel α und μ gegen dieselbe feste Linie um 2 R. von einander abweichen.

II. Von Kräften, die auf einen materiellen Punkt wirken, und deren Richtungslinien ſich in verſchiedenen Ebenen befinden.

§. 49.

Drei Kräfte an einem materiellen Punkte wirkſam. Parallelepipedum der Kräfte. Wirken drei beliebige Kräfte auf einen materiellen Punkt, und befinden ſich ihre Richtungslinien *nicht* in derſelben Ebene, ſo kann nach §. 22 kein Gleichgewicht ſtattfinden. Dies vorausſetzend, ſtellen wir uns die Aufgabe: von den drei Kräften **A**, **B**, **C** (Fig. 28), welche nach ganz beliebigen Richtungen auf den Punkt **P** wirken, die Mittelkraft **M** zu beſtimmen.

Wir wollen dieſe Aufgabe zuerſt durch eine einfache geometriſche Conſtruction auflöſen, demnächſt aber die Richtung und Intenſität der Mittelkraft durch trigonometriſche Berechnungen finden.

Man nehme auf den Richtungslinien der beiden Kräfte **B** und **C** die Stücke **PB** und **PC** dieſen Kräften proportional, conſtruire mit dieſen beiden Linien und dem eingeſchloſſenen Winkel **BPC** das Parallelogramm **PBRC**, ſo ſtellt deſſen Diagonale **PR** die Richtung und Intenſität der Mittelkraft **R** von den Kräften **B** und **C** vor. Auf die Richtungslinie der dritten Kraft **A** trage man das Stück **PA**, der Intenſität **A** proportional, conſtruire aus den Linien **AP**, **PR** und dem eingeſchloſſenen Winkel **APR**, in der Ebene dieſes Winkels, das Parallelogramm **APRM**, ſo ſtellt die Diagonale **PM** deſſelben, die Richtung und Intenſität der Mittelkraft **M** von den beiden Kräften **A** und **R**, alſo auch die der drei gegebenen Kräfte **A**, **B** und **C** dar.

Denkt man ſich durch die Winkel **APB**, **APC**, **BRM** und **CRM** Ebenen gelegt, ſo ſchneiden ſich dieſe paarweiſe in den Linien **BE** und **CD**, welche unter ſich und mit den

bereits construirten Linien **PA** und **RM** parallel sein müssen, weil die beiden letzteren, der Construction gemäß, parallel zu einander sind. Endlich lege man auch noch durch die Linie **AM** eine Ebene **AEMD**, parallel mit der Ebene **PBRC** (was immer möglich ist, da nach der Construction **AM** parallel mit **PR** ist), so schließen diese Ebenen einen Körper ein, der, wie aus dem so eben Gesagten hervorgeht, ein Parallelepipedum ist.

Man sieht aus dieser Darstellung, daß die Mittelkraft **M** der drei gegebenen Kräfte **A, B, C**, deren Richtungslinien in **P** eine körperliche Ecke bestimmen, der Richtung und Größe nach durch die Diagonale **PM** desjenigen Parallelepipedums dargestellt werden kann, dessen Kanten **PA, PB, PC** in demselben Sinne die Seitenkräfte vorstellen. Dieses Gesetz nennt man das **Parallelepipedum der Kräfte.**

§. 50.

Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar, daß zwischen den drei Kanten des Parallelepipedums der Kräfte und seiner Diagonale dieselben Beziehungen stattfinden müssen, wie zwischen den drei Seitenkräften und ihrer Mittelkraft. Nun ist nach einem bekannten Lehrsatze der Stereometrie in dem Parallelepipedum Fig. 28

$$PM^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + 2 \cdot PA \cdot PB \cdot \mathrm{Cos}\, APB + 2 \cdot PA \cdot PC \cdot \mathrm{Cos}\, APC + 2 \cdot PB \cdot PC \cdot \mathrm{Cos}\, BPC.$$

Setzt man nun für die Linien **PM, PA, PB, PC** die ihnen proportionalen Kräfte **M, A, B, C**, und bezeichnet man die Winkel **APB, APC, BPC**, welche zwischen je zwei Kräften enthalten sind, durch **(AB), (AC), (BC)**, so geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$(1) \qquad M^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB \cdot \mathrm{Cos}(AB) + 2AC \cdot \mathrm{Cos}(AC) + 2BC \cdot \mathrm{Cos}(BC);$$

aus welcher die Intensität **M** leicht gefunden werden kann,

wenn man die Quadratwurzel auszieht und dieſe poſitiv nimmt; während das negative Vorzeichen der entgegengeſetzten Mittelkraft entſpricht.

Um die Richtung der Mittelkraft zu beſtimmen, ſollen die drei Winkel, welche ſie mit den Seitenkräften **A**, **B** und **C** bildet, bezüglich durch α, β und γ bezeichnet und als unbekannt betrachtet werden.

Man ziehe in den Seitenflächen des Parallelepipedums die Diagonalen **PE**, **PD**, **MB** und **MC**, und bezeichne, der Kürze wegen, die Längen der Linien **PA**, **PB**, **PC** und **PM** nach der Reihe mit **A**, **B**, **C** und **M**, ſo laſſen ſich folgende Vergleichungen aufſtellen:

Im Δ**PAE** iſt $\quad PE^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cdot \mathrm{Cos}(AB)$;

und im Δ**PMC** $\quad MC^2 = M^2 + C^2 - 2MC \cdot \mathrm{Cos}\,\gamma$.

Nun iſt $PE = MC$, alſo auch $PE^2 = MC^2$; daher

$$A^2 + B^2 + 2AB \cdot \mathrm{Cos}(AB) = M^2 + C^2 - 2MC \cdot \mathrm{Cos}\,\gamma.$$

Auf gleiche Weiſe liefern die Dreiecke **PAD** und **PBM**, vermöge Gleichheit der Seiten **PD** und **BM**,

$$A^2 + C^2 + 2AC \cdot \mathrm{Cos}(AC) = M^2 + B^2 - 2MB \cdot \mathrm{Cos}\,\beta;$$

und nicht minder die Dreiecke **PBR**, **PAM**, in welchen **PR** = **AM** iſt,

$$B^2 + C^2 + 2BC \cdot \mathrm{Cos}(BC) = M^2 + A^2 - 2MA \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Die ſo gewonnenen drei Gleichungen laſſen ſich noch etwas vereinfachen, wenn man darin für M^2 den zugehörigen Ausdruck (1) einſetzt. Dadurch geſtalten ſie ſich, nach gehöriger Reduction, wie folgt:

$$(2)\quad \begin{cases} M \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = A + B \cdot \mathrm{Cos}(AB) + C \cdot \mathrm{Cos}(AC); \\ M \cdot \mathrm{Cos}\,\beta = B + A \cdot \mathrm{Cos}(AB) + C \cdot \mathrm{Cos}(BC); \\ M \cdot \mathrm{Cos}\,\gamma = C + A \cdot \mathrm{Cos}(AC) + B \cdot \mathrm{Cos}(BC). \end{cases}$$

Hieraus findet man endlich für die Coſinuſſe der geſuchten Winkel α, β und γ die Ausdrücke:

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\alpha = \dfrac{A + B\cdot\operatorname{Cos}(AB) + C\cdot\operatorname{Cos}(AC)}{M}; \\ \operatorname{Cos}\beta = \dfrac{B + A\cdot\operatorname{Cos}(AB) + C\cdot\operatorname{Cos}(BC)}{M}; \\ \operatorname{Cos}\gamma = \dfrac{C + A\cdot\operatorname{Cos}(AC) + B\cdot\operatorname{Cos}(BC)}{M}; \end{cases}$$

durch welche nunmehr die Richtung der Mittelkraft **M** bestimmt ist, nachdem ihre Intensität mittelst der Gleichung (1) bereits gefunden worden. Auch sieht man leicht ein, daß hiebei keine Zweideutigkeit in Absicht auf die Lage der Mittelkraft eintreten kann, da die Winkel α, β und γ stets kleiner als 2 R. sein müssen.

§. 51.

Aus dem vorigen Paragraphen ergeben sich noch folgende Gesetze:

1) Man multiplicire die drei Gleichungen (2) nach der Reihe mit **A**, **B**, **C**, und addire sie dann, so entsteht mit Berücksichtigung der Gleichung (1)

$$A\cdot\operatorname{Cos}\alpha + B\cdot\operatorname{Cos}\beta + C\cdot\operatorname{Cos}\gamma = M.$$

Demnach ist die Mittelkraft von drei nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirkenden Kräften gleich der Summe der Producte dieser Kräfte in die Cosinusse der Winkel, welche sie mit ihrer Mittelkraft bilden. Mit andern Worten: Die Mittelkraft ist gleich der Summe der Projektionen der Seitenkräfte auf ihre Richtung.

2) Sind die Winkel zwischen den gegebenen Kräften alle drei rechte, also $\angle(AB) = \angle(AC) = \angle(BC) = 90^0$, so reduciren sich die Gleichungen des vorigen Paragraphen, indem man darin die Cosinusse der genannten Winkel gleich Null setzt, auf folgende:

$$M^2 = A^2 + B^2 + C^2; \quad \text{also } M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{A}{M}; \quad \operatorname{Cos}\beta = \frac{B}{M}; \quad \operatorname{Cos}\gamma = \frac{C}{M}.$$

Dieſe Ausdrücke beſtimmen die Intenſität und Richtung der Mittelkraft von drei an einem Punkt wirkenden Kräften, die paarweiſe rechtwinklig zu einander ſind.

3) Durch dieſelbe Subſtitution reduciren ſich die Gleichungen (2) im vorigen Paragraphen auf folgende:

$$M\cdot\mathrm{Cos}\alpha = A;\quad M\cdot\mathrm{Cos}\beta = B;\quad M\cdot\mathrm{Cos}\gamma = C,$$

welche Ausdrücke uns in den Stand ſetzen, jede gegebene Kraft M nach drei auf einander normalen Richtungen, welche mit jener Kraft die beſtimmten Winkel α, β und γ bilden, in Seitenkräfte zu zerlegen. Für die Intenſität einer jeden Seitenkraft erhält man dann das Product der gegebenen Kraft in den Coſinus des Winkels, den ſie mit jener bildet.

Dabei muß jedoch bemerkt werden, daß die gegebenen Winkel α, β, γ, ſofern die drei Richtungen, nach welchen die Zerlegung geſchehen ſoll, rechtwinklig zu einander ſind, nicht beliebig ſein können. Denn wenn man die drei letzten Gleichungen quadrirt und addirt, ſo findet man mit Rückſicht darauf, daß $M^2 = A^2 + B^2 + C^2$ iſt,

$$\mathrm{Cos}\alpha^2 + \mathrm{Cos}\beta^2 + \mathrm{Cos}\gamma^2 = 1;$$

und dieſer Gleichung müſſen die für α, β und γ gegebenen Zahlenwerthe Genüge leiſten. (Vergl. Anh. IV. Nr. 31.)

§. 52.

Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungen im Raume. Im vorigen §. haben wir geſehen, wie jede gegebene Kraft nach drei auf einander normalen Richtungen in Seitenkräfte zerlegt werden kann. Nicht ſo einfach iſt das Verfahren, wenn die gegebenen Richtungen der Seitenkräfte ſchiefe Winkel mit einander bilden. In dieſem Falle muß man zu den Gleichungen (2) in §. 50 zurückkehren, um daraus die Intenſitäten der Seitenkräfte A, B, C zu entwickeln, wenn alle übrigen Größen als bekannt vorausgeſetzt werden.

Man bezeichne die Winkel (BC), (AC) und (AB) der Kürze wegen bezüglich mit a, b und c, so hat man

$$A + B\cdot\mathrm{Cos}\,c + C\cdot\mathrm{Cos}\,b = M\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha,$$
$$B + A\cdot\mathrm{Cos}\,c + C\cdot\mathrm{Cos}\,a = M\cdot\mathrm{Cos}\,\beta,$$
$$C + A\cdot\mathrm{Cos}\,b + B\cdot\mathrm{Cos}\,a = M\cdot\mathrm{Cos}\,\gamma,$$

worin A, B und C die unbekannten Größen sind. Um zunächst C zu eliminiren, multiplicire man die dritte Gleichung zuerst mit Cos b, darauf mit Cos a, und subtrahire die Producte von den beiden ersten Gleichungen. Dadurch erhält man

$$A\cdot\mathrm{Sin}\,b^2 + B(\mathrm{Cos}\,c - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b) = M(\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,\gamma);$$
$$B\cdot\mathrm{Sin}\,a^2 + A(\mathrm{Cos}\,c - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b) = M(\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,\gamma).$$

Die Richtungslinien der Seitenkräfte A, B, C bilden eine schiefwinklige körperliche Ecke, in Fig. 29 perspectivisch dargestellt, innerhalb welcher die gegebene Kraft M liegt. Denkt man sich mit einem Halbmesser = 1 aus dem Angriffspunkte P eine Kugelfläche beschrieben, so entsteht das sphärische Dreick ABC, welches in D von der Kraft M geschnitten wird. Darin stellen die Kreisbogen BC = a, AC = b und AB = c die Maaße der Winkel vor, welche die Richtungen der Seitenkräfte unter sich bilden, und die Bogen DA = α, DB = β und DC = γ sind die Maaße der Winkel, welche die Seitenkräfte mit ihrer Mittelkraft M bilden. Nach den ersten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie*) hat man nun folgende Gleichungen:

*) Die ersten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, welche ihrer seltenen Anwendung wegen vielleicht nicht jedem Leser gleich zur Hand sein möchten, lassen sich leicht auf folgendem Wege unmittelbar aus der Figur herleiten.

Man fälle aus der Spitze A des sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 29) den Perpendikel AE auf die Ebene des Winkels BPC, und aus dessen Fußpunkte E ziehe man EF und EG bezüglich senkrecht auf PB und PC. Verbindet man nun F und G mit A durch die Geraden FA, GA, so sind dieselben ebenfalls senkrecht auf PB und PC; daher sich ergiebt:

Im ΔABC; $\mathrm{Cos}\,c - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,C$;

» ΔACD; $\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,\gamma = \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,x$;

» ΔBCD; $\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,\gamma = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,y$;

wo C, x und y die Winkel bei C in den genannten ſphäriſchen Dreiecken bezeichnen. Subſtituirt man dieſe Ausdrücke in den beiden vorigen Gleichungen, ſo verwandeln ſie ſich in folgende:

$$A\cdot\mathrm{Sin}\,b + B\cdot\mathrm{Sin}\,a\cdot\mathrm{Cos}\,C = M\,\mathrm{Sin}\,\gamma\cdot\mathrm{Cos}\,x;$$

$$B\cdot\mathrm{Sin}\,a + A\cdot\mathrm{Sin}\,b\cdot\mathrm{Cos}\,C = M\,\mathrm{Sin}\,\gamma\cdot\mathrm{Cos}\,y.$$

Um nun ferner zwiſchen dieſen beiden Gleichungen die Unbekannte B zu eliminiren, multiplicire man die zweite mit Cos C und ſubtrahire ſie von der erſten, wodurch man erhält:

$$A\cdot\mathrm{Sin}\,b\cdot\mathrm{Sin}\,C^2 = M\cdot\mathrm{Sin}\,\gamma\,(\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Cos}\,y\cdot\mathrm{Cos}\,C).$$

Nun iſt aber $x = C - y$; daher

$$\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,(C-y) = \mathrm{Cos}\,C\cdot\mathrm{Cos}\,y + \mathrm{Sin}\,C\cdot\mathrm{Sin}\,y.$$

Folglich entſteht, wenn dies ſubſtituirt und dann mit Sin C gehoben wird,

$$A\cdot\mathrm{Sin}\,b\cdot\mathrm{Sin}\,C = M\cdot\mathrm{Sin}\,\gamma\cdot\mathrm{Sin}\,y;$$

alſo

$$A = M\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\gamma\cdot\mathrm{Sin}\,y}{\mathrm{Sin}\,b\cdot\mathrm{Sin}\,C}.$$

In dieſem Ausdrucke kommen nun noch die Winkel C und

AF = Sin c; PF = Cos c; AG = Sin b, und PG = Cos b. Ferner ſind AFE und AGE die Neigungswinkel der Ebenen APB und APC gegen die Ebene BPC, alſo den Winkeln B und C des ſphär. Dreiecks bezüglich gleich. Mit Rückſicht hierauf hat man nun, wenn $\angle APE = \varphi$ geſetzt wird,

$$AE = AP\cdot\mathrm{Sin}\,\varphi = AF\cdot\mathrm{Sin}\,B = AG\cdot\mathrm{Sin}\,C;\ \text{mithin}$$

(I.) $$\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Sin}\,c\cdot\mathrm{Sin}\,B = \mathrm{Sin}\,b\cdot\mathrm{Sin}\,C.$$

Auch iſt $$EF = AF\cdot\mathrm{Cos}\,B = \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,B,$$

und $$EG = AG\cdot\mathrm{Cos}\,C = \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,C.$$

Zieht man nun noch GH ſenkrecht auf PB, und EJ parallel mit PB, ſo entſtehen die beiden Dreiecke EGJ und PGH, welche bei J und H rechtwinklig, außerdem aber einander ähnlich ſind. Daher iſt $\angle EGJ = \angle GPH = a$; alſo $EJ = EG\cdot\mathrm{Sin}\,a = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,C$; $PH = PG\cdot\mathrm{Cos}\,a = \mathrm{Cos}\,b\cdot\mathrm{Cos}\,a$. Nun iſt aber $PF = PH + HF = PH + EJ$; mithin entſteht

(II.) $$\mathrm{Cos}\,c = \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,C.$$

In den Gleichungen I. und II. ſind ſämmtliche Geſetze der ſphäriſchen Trigonometrie enthalten.

y vor, welche zwar nicht unmittelbar gegeben sind, sich aber aus den gegebenen Stücken leicht auf folgende Weise bestimmen lassen. Aus der vorhin angeführten Grundformel für das sphärische Dreieck ABC ergiebt sich

$$\mathrm{Cos\,C} = \frac{\mathrm{Cos\,c} - \mathrm{Cos\,a}\cdot\mathrm{Cos\,b}}{\mathrm{Sin\,a}\cdot\mathrm{Sin\,b}}.$$

Verbindet man diesen Ausdruck durch Addition und Subtraction mit 1, so entsteht nach einander

$$1 + \mathrm{Cos\,C} = \frac{\mathrm{Cos\,c} - \mathrm{Cos\,(a+b)}}{\mathrm{Sin\,a}\cdot\mathrm{Sin\,b}};$$

$$1 - \mathrm{Cos\,C} = \frac{\mathrm{Cos\,(a-b)} - \mathrm{Cos\,c}}{\mathrm{Sin\,a}\cdot\mathrm{Sin\,b}}.$$

Nach der bekannten goniometrischen Formel:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\psi = 2\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(\psi-\varphi)$$

reduciren sich die letzten Gleichungen auf folgende:

$$1 + \mathrm{Cos\,C} = \frac{2\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin\,a}\cdot\mathrm{Sin\,b}};$$

$$1 - \mathrm{Cos\,C} = \frac{2\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a-b+c)\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{Sin\,a}\cdot\mathrm{Sin\,b}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, und zieht dann die Wurzel aus, so findet man endlich

$$\mathrm{Sin\,C} = \frac{2}{\mathrm{Sin\,a\,Sin\,b}}\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{a+b+c}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{a+b-c}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{a+c-b}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{b+c-a}{2}}.$$

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich für das Dreieck BCD:

$$\mathrm{Sin\,y} = \frac{2}{\mathrm{Sin\,a\,Sin}\,\gamma}\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{a+\beta+\gamma}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{a+\beta-\gamma}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{a+\gamma-\beta}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{\beta+\gamma-a}{2}}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke anstatt Sin C und Sin y in dem obigen Ausdrucke von A, und setzt dabei zur Abkürzung die Wurzelgröße

$$\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{a+b+c}{2}\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{a+b-c}{2}\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{a+c-b}{2}\cdot\mathrm{Sin}\tfrac{b+c-a}{2}} = \mathrm{N},$$

da sie in den Ausdrücken für die übrigen Seitenkräfte in gleicher Weise vorkommt, so findet man

$$(1)\quad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\sqrt{\mathrm{Sin}\tfrac{a+\beta+\gamma}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{a+\beta-\gamma}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{a+\gamma-\beta}{2}\mathrm{Sin}\tfrac{\beta+\gamma-a}{2}}.$$

In derselben Art, wie sich hier die Seitenkraft **A** als abhängig von den Seiten des ihr gegenüber liegenden sphärischen Dreiecks **BCD** zeigt, sind auch die beiden andern Seitenkräfte **B** und **C** von den Seiten der ihnen gegenüber liegenden Dreiecke **ACD** und **ABD** abhängig. Dieser Analogie zufolge hat man nun

$$(2)\quad B = \frac{M}{N}\sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+b+\gamma}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+b-\gamma}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\gamma-b}{2}\operatorname{Sin}\frac{b+\gamma-\alpha}{2}};$$

$$(3)\quad C = \frac{M}{N}\sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta+c}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta-c}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+c-\beta}{2}\operatorname{Sin}\frac{\beta+c-\alpha}{2}}.$$

§. 53.

Anwendung obiger Theorie auf einen besondern Fall. In Fig. 30 sei ein Bockgerüste dargestellt, bestehend aus drei festen Stangen **PS**, **QS** und **RS**, die an ihren oberen Enden gelenkartig mit einander verbunden sind, während ihre unteren Enden sich auf eine wagerechte Ebene stützen. In dem oberen Verbindungspunkte ist ein Gewicht **M** aufgehängt, dessen Wirkungen in den Stützpunkten **P**, **Q** und **R** bestimmt werden sollen.

Um diese Aufgabe zu lösen, zerlege man das als eine lothrechte Kraft zu betrachtende Gewicht **M** nach den Richtungen der drei festen Stangen in Seitenkräfte, wofür man nach der in der Figur angegebenen Bezeichnung, und mit Beibehaltung der im vorigen Paragraphen angenommenen Bedeutung von **N**, folgende Ausdrücke erhält:

$$(1)\quad \begin{cases} A = \frac{M}{N}\sqrt{\operatorname{Sin}\frac{a+\beta+\gamma}{2}\operatorname{Sin}\frac{a+\beta-\gamma}{2}\operatorname{Sin}\frac{a+\gamma-\beta}{2}\operatorname{Sin}\frac{\beta+\gamma-a}{2}}; \\ B = \frac{M}{N}\sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+b+\gamma}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+b-\gamma}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\gamma-b}{2}\operatorname{Sin}\frac{b+\gamma-\alpha}{2}}; \\ C = \frac{M}{N}\sqrt{\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta+c}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+\beta-c}{2}\operatorname{Sin}\frac{\alpha+c-\beta}{2}\operatorname{Sin}\frac{\beta+c-\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Man nehme die Angriffspunkte dieser Kräfte in **P**, **Q**, **R** an und zerlege hier jede Kraft nach zwei auf einander notmalen Richtungen in Seitenkräfte, von welchen die eine

nach der Richtung der Projection der schrägen Stange auf die wagerechte Ebene, die zweite aber senkrecht auf diese Ebene wirkt. Ist O der Punkt, wo die Verlängerung der vertikalen Kraft M die wagerechte Ebene schneidet, also OP, OQ, OR die Projection der drei schrägen Stangen, welche das Bockgerüst bilden, so findet man durch Hülfe des Parallelogramms der Kräfte für die Seitenkräfte nach den Richtungen dieser Projectionen

(2) $A' = A \cdot \mathrm{Sin}\alpha$; $B' = B \cdot \mathrm{Sin}\beta$; $C' = C \cdot \mathrm{Sin}\gamma$;

und für die vertikalen Pressungen in den drei Stützpunkten findet man ebenso die Ausdrücke

(3) $A'' = A \cdot \mathrm{Cos}\alpha$; $B'' = B \cdot \mathrm{Cos}\beta$; $C'' = C \cdot \mathrm{Cos}\gamma$;

Die vorhin für A, B und C gefundenen Ausdrücke lassen sich noch einfacher darstellen, wenn man die um den Punkt O liegenden Winkel a', b', c', welche die horizontalen Projectionen der ebenen Seitenwinkel a, b, c vorstellen, dabei in Rechnung bringt. Bezeichnet man nämlich die Höhe SO des pyramidalischen Bockgerüstes mit h, so ergiebt sich

$SP = h \cdot \mathrm{Sec}\alpha$; $SQ = h \cdot \mathrm{Sec}\beta$; $SR = h \cdot \mathrm{Sec}\gamma$;

$OP = h \cdot \mathrm{tg}\alpha$; $OQ = h \cdot \mathrm{tg}\beta$; $OR = h \cdot \mathrm{tg}\gamma$;

Aus den beiden Dreiecken QOR und QSR ergeben sich nun nach bekannten Lehren die Gleichungen

$$QR^2 = OQ^2 + OR^2 - 2OQ \cdot OR \cdot \mathrm{Cos}a',$$

und $$QR^2 = SQ^2 + SR^2 - 2SQ \cdot SR \cdot \mathrm{Cos}a.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit einander, setzt dabei zugleich für OQ, OR, SQ und SR die obigen Werthe ein, und entwickelt dann Cos a', so findet man nach einer sehr einfachen Reduction die Formel

$$\mathrm{Cos}a' = \frac{\mathrm{Cos}a - \mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{Cos}\gamma}{\mathrm{Sin}\beta \cdot \mathrm{Sin}\gamma}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren, wie es im vorigen Paragr. mit Hülfe der zweiten Grundformel der sphär. Trigonometrie ausgeführt wurde, erhält man aus obiger Gleichung die folgende:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\operatorname{Sin}a' = \sqrt{\operatorname{Sin}\tfrac{a+\beta+\gamma}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{a+\beta-\gamma}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{a+\gamma-\beta}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{\beta+\gamma-a}{2}}.$$

Und auf gleiche Weiſe ergeben ſich für die Wurzelgrößen, welche in den beiden andern Gleichungen der Gruppe (1) vorkommen, die entſprechenden Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}b'; \quad \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\cdot\operatorname{Sin}c'.$$

Nach Subſtitution dieſer Ausdrücke geſtalten ſich nun die Gleichungen (1) wie folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} A = \dfrac{M}{2N}\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\operatorname{Sin}a'; \quad B = \dfrac{M}{2N}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma\operatorname{Sin}b'; \\ \text{und} \quad C = \dfrac{M}{2N}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}c'. \end{cases}$$

Dieſe Werthe an der Stelle von A, B, C in (2) und (3) eingeſetzt, liefern demnächſt

$$(5)\quad \begin{cases} A' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}a', \\ B' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}b', \\ C' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}c'; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} A'' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}a', \\ B'' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}b', \\ C'' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Cos}\gamma\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\cdot\operatorname{Sin}c'. \end{cases}$$

Aus d…chungen (5) ergiebt ſich die Proportion

…B′ : C′ = Sin a′ : Sin b′ : Sin c′,

…e drei wagerechten Seitenſchube, deren Rich…
… O ſchneiden, ein Syſtem von Kräften vor…
…es um dieſen Punkt im Gleichgewichte iſt.

…Gleic… (6) laſſen ſich durch eine ſehr einfache
…ung …ergeſtalt reduciren. Sind nemlich p,
…ie … Dreiecke QOR, POR und POQ, ſo
…A mo… …unten Lehren

…OR·Sin a′ = ½h²·tg β tg γ Sin a′,

und daraus $\frac{2p}{h^2}\cdot\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma = \mathrm{Sin}\beta\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Sin}a'.$

Eben ſo iſt $\frac{2p}{h^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\gamma = \mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\gamma\cdot\mathrm{Sin}b',$

und $\frac{2p}{h^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta = \mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Sin}c'.$

Subſtituirt man dieſe Ausdrücke in (6), ſo entſteht

$$(7)\quad \begin{cases} A'' = \frac{Mp}{Nh^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma; \\ B'' = \frac{Mq}{Nh^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma; \\ \text{und } C'' = \frac{Mr}{Nh^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma; \end{cases}$$

woraus ſich demnächſt die Proportion ergiebt

$$A'' : B'' : C'' = p : q : r.$$

Die vertikalen Preſſungen in den Stützpunkten **P, Q** und **R** verhalten ſich demnach wie die Inhalte der dieſen Punkten gegenüber liegenden Dreiecke **QOR, POR** und **POQ**. Zuſammen genommen ſind aber dieſe Preſſungen dem Gewichte **M** gleich. Denn man erhält durch Addition der obigen Ausdrücke:

$$A''+B''+C'' = \frac{M}{Nh^2}(p+q+r)\,\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma,$$

und nun läßt ſich leicht beweiſen, daß in dieſer Gleichung

$$p+q+r = \Delta PQR = \frac{Nh^2}{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma},$$

der Ausdruck auf ihrer rechten Seite alſo = **M** iſt.

Um dies noch darzuthun, denke man aus **P** auf die Ebene **QRS** den Perpendikel **PE** gefällt, und bezeichne mit φ den Winkel **PSE**, unter welchem die Linie **PS** gegen die Ebene **QRS** geneigt iſt. Dann hat man

$$PE = PS\cdot\mathrm{Sin}\varphi = h\,\mathrm{Sec}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\varphi.$$

Ferner ergiebt ſich der Inhalt des Dreiecks **QRS** gleich

$$\tfrac{1}{2}QS\cdot RS\cdot\mathrm{Sin}a = \tfrac{1}{2}h^2\mathrm{Sec}\beta\mathrm{Sec}\gamma\cdot\mathrm{Sin}a,$$

und alſo der Kubikinhalt der dreikantigen Pyramide

$$QRSP = \tfrac{1}{6}h^3\mathrm{Sec}\alpha\mathrm{Sec}\beta\mathrm{Sec}\gamma\cdot\mathrm{Sin}a\mathrm{Sin}\varphi.$$

Derſelbe Inhalt iſt aber auch $= \frac{1}{3}h\cdot\Delta PQR$, und wenn man

diesen Ausdruck mit dem vorigen vergleicht, so kömmt

$$(8) \qquad \Delta PQR = \tfrac{1}{2}h^2 \cdot \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma}.$$

Nach der ersten Grundformel der sphärischen Trigonometrie (siehe die Note zum vorigen §.) hat man nun:
$\operatorname{Sin}\varphi = \operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} C$; daher $\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}\varphi = \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \cdot \operatorname{Sin} C$.
Ferner ist nach dem im vorigen Paragr. gefundenen Resultate

$$\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} C = 2\sqrt{\operatorname{Sin}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{Sin}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{Sin}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{Sin}\frac{b+c-a}{2}}.$$

Und wenn dieser Werth, der in abgekürzter Bezeichnung $= 2N$ ist, statt $\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}\varphi$ in (8) eingesetzt wird, so entsteht

$$\Delta PQR = \frac{h^2 N}{\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma},$$

wodurch das vorhin ausgesprochene Gesetz dargethan ist.

§. 54.

Beliebig viele Kräfte im Raume an einem Punkte wirksam. Wir betrachten nun eine beliebige Anzahl von Kräften, die nach beliebigen Richtungen im Raume auf einen und denselben materiellen Punkt wirken, und setzen dabei voraus, daß unter diesen Kräften kein Gleichgewicht vorhanden, also ihre Mittelkraft zu bestimmen sei.

Mögen **A, B, C**... ꝛc. die Intensitäten der gegebenen Kräfte und **M** die Intensität ihrer Mittelkraft bezeichnen.

Man zerlege jede der gegebenen Kräfte nach drei auf einander normalen, durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt **P** gelegten Achsen **PX, PY, PZ** (Fig. 31)*) in Seitenkräfte, nehme von denen, die nach einer und derselben Achse wirken, die Mittelkraft, und verbinde die so gewonnenen drei partiellen Mittelkräfte zu einer einzigen gleichgeltenden Kraft, so ist diese die gesuchte Mittelkraft selbst.

*) In der Figur sind, um die Zeichnung nicht zu verwirren, nur zwei Kräfte mit ihren Richtungswinkeln angegeben. Dies wird aber für die Deutlichkeit hinreichend sein, da für die andern Kräfte ganz dieselben Bezeichnungen stattfinden.

Zu dem Ende ſeien α, α', α'' die Winkel, welche die Kraft **A** mit den Achſen **PX**, **PY**, **PZ** macht. Eben ſo ſeien β, β', β'' die Richtungswinkel der Kraft **B**; γ, γ', γ'' die der Kraft **C**; δ, δ', δ'' die von **D** u. ſ. w., welche Winkel, wie leicht einzuſehen iſt, bloß von 0 bis 180 Graden gezählt zu werden brauchen, da größere Winkel nicht vorkommen können. Die Seitenkräfte nach den drei genannten Achſen ergeben ſich nun, zufolge (3) des vorigen Paragraphen, durch folgende Ausdrücke:

Nach der Achſe **PX**;

$\mathbf{A}\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha$, $\mathbf{B}\cdot\mathrm{Cos}\,\beta$, $\mathbf{C}\cdot\mathrm{Cos}\,\gamma$, $\mathbf{D}\cdot\mathrm{Cos}\,\delta$, u. ſ. w.

Nach der Achſe **PY**;

$\mathbf{A}\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha'$, $\mathbf{B}\cdot\mathrm{Cos}\,\beta'$, $\mathbf{C}\cdot\mathrm{Cos}\,\gamma'$, $\mathbf{D}\cdot\mathrm{Cos}\,\delta'$, u. ſ. w.

Nach der Achſe **PZ**;

$\mathbf{A}\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha''$, $\mathbf{B}\cdot\mathrm{Cos}\,\beta''$, $\mathbf{C}\cdot\mathrm{Cos}\,\gamma''$, $\mathbf{D}\cdot\mathrm{Cos}\,\delta''$, u. ſ. w.

Von dieſen drei Syſtemen von Kräften wirkt jedes in derſelben geraden Linie; daher ergeben ſich die Mittelkräfte derſelben durch folgende Gleichungen:

$$\Sigma\mathbf{A}\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \mathbf{A}\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathbf{B}\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathbf{C}\,\mathrm{Cos}\,\gamma + \mathbf{D}\,\mathrm{Cos}\,\delta + \cdots\text{ꝛc.}$$
$$\Sigma\mathbf{A}\,\mathrm{Cos}\,\alpha' = \mathbf{A}\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathbf{B}\,\mathrm{Cos}\,\beta' + \mathbf{C}\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + \mathbf{D}\,\mathrm{Cos}\,\delta' + \cdots\text{ꝛc.}$$
$$\Sigma\mathbf{A}\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' = \mathbf{A}\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' + \mathbf{B}\,\mathrm{Cos}\,\beta'' + \mathbf{C}\,\mathrm{Cos}\,\gamma'' + \mathbf{D}\,\mathrm{Cos}\,\delta'' + \cdots\text{ꝛc.}$$

Bezeichnet man nun die Winkel, welche die Mittelkraft **M** mit eben denſelben Achſen bildet, der vorigen Bezeichnung analog, mit μ, μ', μ'', und denkt man ſich dieſe Kraft in gleicher Art nach denſelben Achſen zerlegt, ſo ergeben ſich die Seitenkräfte bezüglich gleich

$$\mathbf{M}\cdot\mathrm{Cos}\,\mu;\quad \mathbf{M}\cdot\mathrm{Cos}\,\mu' \text{ und } \mathbf{M}\cdot\mathrm{Cos}\,\mu''.$$

Mit Rückſicht auf das vorhin Geſagte erhält man nun folgende Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{M}\cdot\mathrm{Cos}\,\mu = \Sigma\mathbf{A}\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha; \\ \mathbf{M}\cdot\mathrm{Cos}\,\mu' = \Sigma\mathbf{A}\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha'; \\ \mathbf{M}\cdot\mathrm{Cos}\,\mu'' = \Sigma\mathbf{A}\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha''. \end{cases}$$

Dieſe drei Gleichungen würden zur Beſtimmung der

vier unbekannten Größen M, μ, μ' und μ'' nicht hinreichend sein; aber außer ihnen findet allemal noch die nachstehende Gleichung Statt:

(2) $$\mathrm{Cos}\,\mu^2 + \mathrm{Cos}\,\mu'^2 + \mathrm{Cos}\,\mu''^2 = 1;$$

so daß also die Anzahl der Gleichungen eben so groß ist, wie die der unbekannten Größen, und daher können diese durch jene nunmehr bestimmt werden.

Quadrirt man nemlich die drei ersten Gleichungen und addirt sie hierauf zusammen, so erhält man mit Berücksichtigung der zweiten Gleichung:

(3) $$M^2 = (\Sigma A\,\mathrm{Cos}\,\alpha)^2 + (\Sigma A\,\mathrm{Cos}\,\alpha')^2 + (\Sigma A\,\mathrm{Cos}\,\alpha'')^2,$$

woraus sich durch Ausziehung der Quadratwurzel die Intensität M finden läßt.

Ferner erhält man aus den drei ersten Gleichungen für die Cosinusse der Richtungswinkel der Mittelkraft, deren Intensität M als bekannt vorausgesetzt, die Ausdrücke:

(4) $$\begin{cases} \mathrm{Cos}\,\mu = \dfrac{\Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha}{M}; \\ \mathrm{Cos}\,\mu' = \dfrac{\Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha'}{M}; \\ \mathrm{Cos}\,\mu'' = \dfrac{\Sigma A \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha''}{M}; \end{cases}$$

wo jeder Cosinus nur einen einzigen Winkel anzeigen kann, weil diese bloß von 0 bis 180° gezählt werden.

In Absicht auf die algebraischen Vorzeichen der Seitenkräfte nach den drei Achsen muß noch bemerkt werden, daß diejenigen positiv sind, welche nach den Richtungen der Achsen wirken, von welchen an die Winkel gezählt werden; dagegen sind diejenigen Seitenkräfte, welche in die entgegengesetzten Verlängerungen dieser Achse fallen, negativ in Rechnung zu bringen. Daß dieser Gegensatz der Richtungen für besondere numerisch gegebene Werthe der Winkel schon durch die Cosinusse angedeutet wird, ist ohne weitere Auseinander-

setzung einleuchtend, und man hat daher nicht nöthig, im allgemeinen Calcül darauf Rücksicht zu nehmen.

§. 55.

Um noch ein anderes Gesetz für die Beziehung der Mittelkraft zu den Seitenkräften und deren Richtungswinkel nachzuweisen, kehren wir zu der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen zurück, wo wir gefunden haben

$$M^2 = (\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha)^2 + (\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha')^2 + (\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha'')^2.$$

Entwickelt man nemlich die zweiten Potenzen der Ausdrücke $\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha$, $\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha'$, $\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha''$, indem man dafür die algebraischen Summen substituirt, welche durch sie dargestellt werden, so kommt:

$$\begin{aligned}
(\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha)^2 &= A^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 + B^2 \operatorname{Cos}\beta^2 + C^2 \operatorname{Cos}\gamma^2 + \cdots \text{ ꝛc.} \\
&\quad + 2AB \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta + 2AC \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma + \cdots \text{ ꝛc.} \\
&\quad + 2BC \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma + \cdots \text{ ꝛc.} \\
(\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha')^2 &= A^2 \operatorname{Cos}\alpha'^2 + B^2 \operatorname{Cos}\beta'^2 + C^2 \operatorname{Cos}\gamma'^2 + \cdots \text{ ꝛc.} \\
&\quad + 2AB \operatorname{Cos}\alpha' \operatorname{Cos}\beta' + 2AC \operatorname{Cos}\alpha' \operatorname{Cos}\gamma' + \cdots \text{ ꝛc.} \\
&\quad + 2BC \operatorname{Cos}\beta' \operatorname{Cos}\gamma' + \cdots \text{ ꝛc.} \\
(\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha'')^2 &= A^2 \operatorname{Cos}\alpha''^2 + B^2 \operatorname{Cos}\beta''^2 + C^2 \operatorname{Cos}\gamma''^2 + \cdots \text{ ꝛc.} \\
&\quad + 2AB \operatorname{Cos}\alpha'' \operatorname{Cos}\beta'' + 2AC \operatorname{Cos}\alpha'' \operatorname{Cos}\gamma'' + \cdots \text{ ꝛc.} \\
&\quad + 2BC \operatorname{Cos}\beta'' \operatorname{Cos}\gamma'' + \cdots \text{ ꝛc.}
\end{aligned}$$

Zwischen den Winkeln, die jede von den gegebenen Kräften mit den drei Achsen macht, finden nun die nachstehenden bekannten Gleichungen Statt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\alpha'^2 + \operatorname{Cos}\alpha''^2 &= 1; \\
\operatorname{Cos}\beta^2 + \operatorname{Cos}\beta'^2 + \operatorname{Cos}\beta''^2 &= 1; \\
\operatorname{Cos}\gamma^2 + \operatorname{Cos}\gamma'^2 + \operatorname{Cos}\gamma''^2 &= 1; \\
\text{u. s. w.} \qquad & \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Eben so hat man bekanntlich für die Beziehungen zwischen den Winkeln, die je zwei Kräfte mit den Achsen und unter sich einschließen, nach Anhang IV, Nr. 23, die folgenden Vergleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\operatorname{Sin}a' = \sqrt{\operatorname{Sin}\tfrac{a+\beta+\gamma}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{a+\beta-\gamma}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{a+\gamma-\beta}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{\beta+\gamma-a}{2}}.$$

Und auf gleiche Weise ergeben sich für die Wurzelgrößen, welche in den beiden andern Gleichungen der Gruppe (1) vorkommen, die entsprechenden Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}b';\quad \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\cdot\operatorname{Sin}c'.$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke gestalten sich nun die Gleichungen (1) wie folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} A = \dfrac{M}{2N}\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\operatorname{Sin}a';\quad B = \dfrac{M}{2N}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma\operatorname{Sin}b'; \\ \text{und}\quad C = \dfrac{M}{2N}\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}c'. \end{cases}$$

Diese Werthe an der Stelle von A, B, C in (2) und (3) eingesetzt, liefern demnächst

$$(5)\quad \begin{cases} A' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}a', \\ B' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}b', \\ C' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}c'; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} A'' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}a', \\ B'' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma\cdot\operatorname{Sin}b', \\ C'' = \dfrac{M}{2N}\cdot\operatorname{Cos}\gamma\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\cdot\operatorname{Sin}c'. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (5) ergiebt sich die Proportion

$$A' : B' : C' = \operatorname{Sin}a' : \operatorname{Sin}b' : \operatorname{Sin}c',$$

wonach also die drei wagerechten Seitenschube, deren Richtungen sich in O schneiden, ein System von Kräften vorstellen, welches um diesen Punkt im Gleichgewichte ist.

Die Gleichungen (6) lassen sich durch eine sehr einfache Umformung noch folgendergestalt reduciren. Sind nemlich p, q, r die Inhalte der Dreiecke QOR, POR und POQ, so findet man nach bekannten Lehren

$$\Delta p = \tfrac{1}{2}OQ\cdot OR\cdot\operatorname{Sin}a' = \tfrac{1}{2}h^2\cdot\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{Sin}a',$$

und daraus $\frac{2p}{h^2}\cdot\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma = \mathrm{Sin}\beta\mathrm{Sin}\gamma\mathrm{Sin}a'.$

Eben so ist $\frac{2p}{h^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\gamma = \mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\gamma\cdot\mathrm{Sin}b',$

und $\frac{2p}{h^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta = \mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Sin}c'.$

Substituirt man diese Ausdrücke in (6), so entsteht

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{rl} & A'' = \frac{Mp}{Nh^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma; \\ & B'' = \frac{Mq}{Nh^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma; \\ \text{und} & C'' = \frac{Mr}{Nh^2}\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma; \end{array}\right.$$

woraus sich demnächst die Proportion ergiebt

$$A'' : B'' : C'' = p : q : r.$$

Die vertikalen Pressungen in den Stützpunkten **P, Q** und **R** verhalten sich demnach wie die Inhalte der diesen Punkten gegenüber liegenden Dreiecke **QOR, POR** und **POQ**. Zusammen genommen sind aber diese Pressungen dem Gewichte **M** gleich. Denn man erhält durch Addition der obigen Ausdrücke:

$$A''+B''+C'' = \frac{M}{Nh^2}(p+q+r)\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma,$$

und nun läßt sich leicht beweisen, daß in dieser Gleichung

$$p+q+r = \Delta PQR = \frac{Nh^2}{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma},$$

der Ausdruck auf ihrer rechten Seite also $= M$ ist.

Um dies noch darzuthun, denke man aus **P** auf die Ebene **QRS** den Perpendikel **PE** gefällt, und bezeichne mit φ den Winkel **PSE**, unter welchem die Linie **PS** gegen die Ebene **QRS** geneigt ist. Dann hat man

$$PE = PS\cdot\mathrm{Sin}\varphi = h\,\mathrm{Sec}\alpha\cdot\mathrm{Sin}\varphi.$$

Ferner ergiebt sich der Inhalt des Dreiecks **QRS** gleich

$$\tfrac{1}{2}QS\cdot RS\cdot\mathrm{Sin}a = \tfrac{1}{2}h^2\mathrm{Sec}\beta\mathrm{Sec}\gamma\cdot\mathrm{Sin}a,$$

und also der Kubikinhalt der dreikantigen Pyramide

$$QRSP = \tfrac{1}{6}h^3\mathrm{Sec}\alpha\mathrm{Sec}\beta\mathrm{Sec}\gamma\cdot\mathrm{Sin}a\mathrm{Sin}\varphi.$$

Derselbe Inhalt ist aber auch $= \frac{1}{3}h\cdot\Delta PQR$, und wenn man

Zweites Kapitel.

Von Kräften, die nach parallelen Richtungen auf ein System von materiellen Punkten wirken.

I. Parallele Kräfte in einerlei Ebene.

§. 57.

Bestimmung der Mittelkraft von zwei parallelen Kräften. Es seien **A** und **B** die Intensitäten der Kräfte, welche nach den parallelen Richtungen **PA** und **QB** (Fig. 32) auf die beiden materiellen Punkte **P** und **Q** wirken. Betrachtet man diese Punkte als zu einer festen, sonst aber frei beweglichen Ebene gehörig, welche auch die beiden Kräfte **A** und **B** enthält, so wird an der Wirkung der letzteren nichts geändert, wenn man in **P** und **Q** die beiden gleichen Kräfte **C**, **C**, nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirksam, anbringt. Man nehme nun einerseits von den beiden Kräften **A** und **C** die Mittelkraft **V**, andererseits von **B** und **C** die Mittelkraft **W**, und verlängere die Richtungslinien **VP**, **WQ** bis sie sich in einem Punkte **S** schneiden. Diesen Punkt denke man sich mit **P** und **Q** in einer festen Verbindung, und betrachte ihn als den gemeinschaftlichen Angriffspunkt der beiden Kräfte **V** und **W**, so werden diese von hier aus eben so auf die beiden materiellen Punkte wirken, wie die Kräfte **A** und **B**, welche unmittelbar daran thätig sind; denn die nach der Richtung **PC** angebrachte Kraft **C** hebt sich mit der gleichen Kraft **C** nach der entgegengesetzten Richtung **QC** auf.

Im Punkte **S** zerlege man die Kräfte **V**, **W** wieder nach ihren ursprünglichen Richtungen in Seitenkräfte; nem-

lich V nach den beiden Richtungen SX ∦ PC und SR ∦ PA, und W nach den Richtungen SY ∦ QC und SR ∦ QB. Dadurch stellt man offenbar die früheren Kräfte C, A und C, B wieder her, von denen C und C in der geraden Linie XY nach entgegengesetzten Richtungen, die beiden andern A und B aber in der mit PA und QB parallelen Linie SR nach derselben Richtung wirksam sind. Die beiden ersten Kräfte heben sich daher mit einander auf, während die beiden letzteren mittelst des unverschiebbaren Dreiecks PSQ eben so auf die materiellen Punkte P und Q wirken, als wenn sie unmittelbar daran thätig wären. Diese Kräfte geben daher eine Mittelkraft M, die nach §. 16 ihrer Summe gleich ist, und welche die fragliche Mittelkraft der parallelen Kräfte A und B selbst sein wird. Demgemäß hat man nun

$$(1) \qquad M = A + B.$$

Rücksichtlich der Intensität ist daher die Mittelkraft gleich der Summe der parallelen Kräfte, und in Hinsicht der Richtung ist sie den beiden Seitenkräften parallel.

Es kommt nunmehr noch darauf an, die Lage der geraden Linie SR zu bestimmen, nach welcher sich die Wirksamkeit der Mittelkraft M erstreckt; oder, was dasselbe ist, den Punkt R anzugeben, in welchem diese Richtungslinie die Verbindungslinie PQ der beiden materiellen Punkte schneidet, da man dann diesen letzteren als den Angriffspunkt der Mittelkraft annehmen kann.

Zu dem Ende denke man sich die Kräfte V und W nach den ihnen gerade entgegengesetzten Richtungen PS und QS als wirksam, dann hat man zwei Systeme von Kräften, nemlich A, C, V und B, C, W, die bezüglich an den Punkten P und Q im Gleichgewichte sind. Die Kräfte des einen Systems sind nun mit den Seiten des Dreiecks PRS, die des andern aber mit den Seiten des Dreiecks QRS parallel,

und nach Satz (1) in §. 42 hat man daher die Proportionen

$$A : C = RS : RP$$

und

$$C : B = RQ : RS,$$

aus deren Verbindung demnächst die Proportion hervorgeht:

(1) $$A : B = RQ : RP.$$

D. h. Die gerade Linie, welche die Angriffspunkte der parallelen Kräfte verbindet, wird durch die Mittelkraft der letzteren in zwei Theile getheilt, die sich umgekehrt wie die gegebenen Kräfte verhalten.

Zufolge dieser Proportion läßt sich nunmehr der Punkt **R** leicht durch eine geometrische Construction finden.

Man lege nemlich die Linie **PK** unter einem beliebigen Winkel an **PQ**, und nehme darauf die Stücke **PL**, **LK** den Kräften **B** und **A** proportional. Zieht man nun die Verbindungslinie **KQ** und aus **L** die damit parallele Linie **LR**, so schneidet diese die **PQ** in einem Punkte **R**, welcher, wie leicht erhellet, der gesuchte Angriffspunkt der Mittelkraft **M** ist.

Wären also die Kräfte **A** und **B** einander gleich, so würde der Punkt **R** in der Mitte von **PQ** liegen.

§. 58.

Als Zusätze zu den im vorigen Paragraphen vorgetragenen Lehren sind hier noch folgende Gesetze zu bemerken:

1) Die Proportion $A : B = RQ : RP$ findet offenbar unabhängig von dem Winkel Statt, den die Richtungslinien der parallelen Kräfte **A**, **B** mit der ihre Angriffspunkte verbindenden Linie **PQ** bilden. Daraus folgt unmittelbar, daß auch die Lage des Punktes **R** auf dieser Linie von jenem Neigungswinkel unabhängig ist, und daher stets dieselbe bleibt, wenn die Kräfte um ihre Angriffspunkte beliebig gedreht werden, ohne jedoch ihren Parallelismus zu stören.

Aus diesem Grunde ist jener Punkt vorzugsweise als Angriffspunkt der Mittelkraft beider Kräfte angenommen, und als solchen nennt man ihn auch den Mittelpunkt der Kräfte.

2) Ferner ergiebt sich aus der vorigen Proportion

$$A+B:B = RQ+RP:RP;$$

oder, weil $A+B = M$ und $RQ+RP = PQ$ ist,

$$M:B = PQ:RP.$$

Die Verbindung dieser Proportion mit der obigen führt demnächst auf das Gesetz

$$A:B:M = RQ:RP:PQ;$$

d. h. jede von den drei Kräften A, B und M ist demjenigen Theil der Linie PQ proportionirt, der zwischen den Richtungen der beiden andern Kräfte enthalten ist.

3) Man nehme auf der Verlängerung von PQ den beliebigen Punkt O an, und substituire in (2) des vorigen Paragraphen $OR - OP$ an der Stelle von PR, so wie $OQ - OR$ an der Stelle von QR. Dadurch erhält man

$$A:B = OQ - OR : OR - OP,$$

woraus demnächst

$$A\cdot(OR - OP) = B\cdot(OQ - OR),$$

oder $(A+B)\cdot OR = A\cdot OP + B\cdot OQ$ folgt.

Nun ist aber $A+B = M$, und demzufolge hat man

$$M\cdot OR = A\cdot OP + B\cdot OQ,$$

eine Gleichung zwischen den drei Kräften A, B und M, die sich leicht in Worten ausdrücken läßt.

Beisp. Die feste unbiegsame Linie PQ (Fig. 34) sei an ihren beiden Enden horizontal unterstützt und in R durch ein aufgehängtes Gewicht $M = 490$ ℔. belastet. Man soll die Pressungen x und y auf die Unterstützungen bestimmen, wenn $PR = 3$ Fß, $QR = 4$ Fß gegeben ist. Nach (2) hat man die Proportionen:

$$M:x = PQ:RQ; \text{ oder } 490:x = 7:4;$$
$$M:y = PQ:RR; \text{ „ } 490:y = 7:3;$$

aus welchem sich $x = 280$ ℔. und $y = 210$ ℔. findet.

§. 59.

Begriff der Momente. Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen gefundenen Gleichungen zwischen den parallelen Kräften **A**, **B** und ihrer Mittelkraft **M** schließen eine bestimmte statische Bedeutung ein, welche für die praktische Anwendung von Wichtigkeit ist. Ehe wir daher weiter gehen, sollen jene Gleichungen hier noch einer besondern Erörterung unterworfen werden, um dadurch die erwähnte statische Bedeutung klar hervortreten zu lassen.

In §. 57 fanden wir nemlich, mit Hinblick auf Fig. 32, die beiden Gleichungen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{RQ} : \mathbf{RP},$$

durch welche, wie wir gesehen haben, die Mittelkraft **M** und ihr Angriffspunkt **R** bestimmt ist. Läßt man nun die Kraft **M** nach der entgegengesetzten Richtung **RS** wirken, so wird sie den beiden parallelen Kräften **A** und **B** das Gleichgewicht halten, oder die frei bewegliche Ebene wird sich unter Einwirkung der in ihr befindlichen drei Kräfte **A**, **B** und **M**, wenn diese nach den parallelen Richtungen **PA**, **QB** und **RS** wirken, im Gleichgewichte befinden. Letzteres wird offenbar nicht gestört, wenn man irgend einen Punkt der Ebene, etwa den Mittelpunkt **R**, vermittelst eines durchgesteckten unbeweglichen Stiftes befestigt, welcher demnach keine Einwirkung von den Kräften zu erleiden haben wird. Denkt man sich aber die Kraft **M** weggenommen, dann erleidet der in **R** angebrachte feste Stift sofort einen Druck $= \mathbf{A} + \mathbf{B}$ nach der Richtung **RM**, und er muß also nach der entgegengesetzten Richtung **RS** einen gleich großen Widerstand leisten, wenn das Gleichgewicht fortbestehen soll. Eine Störung desselben würde aber nur zweierlei Wirkungen zur Folge haben können, eine fortgehende Bewegung der Ebene im Sinne der parallelen Kräfte, oder eine drehende Bewegung

derselben um den durchgesteckten Stift, wie um eine feste Achse. Erstere verhindert zwar der Stift durch den dem Drucke $M = A + B$ entgegengesetzten gleich großen Widerstand; daß er aber die andere Wirkung nicht verhindern kann, ist ohne Weiteres einleuchtend.

Das Gleichgewicht in Bezug auf drehende Bewegung kann daher nur bestehen, in Folge der Proportion

$$A : B = RQ : RP;$$

denn sobald dieser Proportion keine Genüge geschieht, d. h. sobald man einen andern Punkt der Ebene, als den in der Richtung MS liegenden Punkt R, auf die angegebene Weise befestigt denkt, würde sofort eine drehende Bewegung um ihn die Folge sein. Die beiden Kräfte A und B sind demnach in Bezug auf drehende Bewegung um ihren Mittelpunkt mit einander im Gleichgewicht, wenn sie sich umgekehrt wie die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von jenem Mittelpunkte verhalten. Und da aus der obigen Proportion unmittelbar die Gleichung folgt:

$$A \cdot RP = B \cdot RQ,$$

so kann man die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den parallelen Kräften auch dahin aussprechen, daß man sagt: die Produkte aus den Intensitäten der Kräfte in die Entfernungen ihrer Angriffspunkte von ihrem Mittelpunkte müssen gleich groß sein.

Diese Produkte nennt man statische Momente*), oder schlechthin die Momente der Kräfte, und man kann sie als das Maaß ihres Bestrebens ansehen, eine Drehung der

*) Der Beisatz der statischen Momente ist hier deshalb nöthig, weil wir es in der Folge auch noch mit Momenten anderer Art, unter Andern mit mechanischen Momenten, zu thun haben werden. Wo in dem vorliegenden Buche der Kürze wegen von Momenten ohne nähere Bestimmung die Rede ist, sind jedesmal statische Momente darunter zu verstehen.

Ebene, welche die Kräfte enthält, um den befestigten Mittelpunkt **R** hervorzubringen. Die obige Gleichung drückt daher aus, daß beide parallele Kräfte gleiches Bestreben haben, die fragliche Ebene im entgegengesetzten Sinne um den in **R** durchgesteckten Stift zu drehen, so daß sich also beide Wirkungen mit einander aufheben.

§. 60.

In ähnlicher Weise, wie die vorige Gleichung

$$A \cdot RP = B \cdot RQ$$

auf drehende Bewegung um den Punkt **R** Bezug hatte, kann die in §. 58 unter (3) gefundene Gleichung

$$M \cdot OR = A \cdot OP + B \cdot OQ$$

auf Drehung um den Punkt **O** bezogen werden, wenn dieser anstatt **R** mittelst eines durchgesteckten Stiftes befestigt wird.

Die in dieser Gleichung vorkommenden Produkte $M \cdot OR$, $A \cdot OP$ und $B \cdot OQ$ werden ebenfalls die Momente der Kräfte **M**, **A** und **B** in Bezug auf den Punkt **O** genannt, und letzterer heißt dann der Mittelpunkt der Momente, oder schlechthin der Momentenpunkt. Der obigen Gleichung zufolge ist also das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente der parallelen Seitenkräfte, was mit anderen Worten nichts Anderes heißt, als daß die Mittelkraft **M** dasselbe Bestreben hat, eine Drehung der Ebene um den in **O** durchgesteckten Stift hervorzubringen, wie die beiden parallelen Seitenkräfte **A** und **B** zusammengenommen.

Dieses Gesetz ist, wie leicht erhellet, ganz unabhängig von dem Winkel, den die Richtungen der Kräfte mit den Linien bilden, welche in den Ausdrücken ihrer Momente als Factoren auftreten. Der fragliche Winkel kann daher, an sich betrachtet, zwar ein beliebiger sein; nur ist es nöthig, daß er für alle Kräfte, deren Momente mit einander verglichen werden sollen, stets dieselbe Größe behalte, was hier

besonders mit Hinsicht auf die spätere Anwendung auf nicht parallele Kräfte hervorgehoben werden muß. Um also in dieser Hinsicht jede Unbestimmtheit zu beseitigen, sollen jene Linien, welche in den Ausdrücken der Momente als Factoren vorkommen, auf den Richtungen der Kräfte stets senkrecht angenommen, und der Kürze wegen die Hebelsarme der letzteren genannt werden.

Bei parallelen Kräften in einer Ebene liegen demnach die Hebelsarme stets in einer und derselben geraden Linie, welche die sämmtlichen Kräfte rechtwinklig schneidet. Bei nicht parallelen Kräften in einer Ebene erhält man dagegen die Hebelsarme, wenn man aus dem als Momentenpunkt angenommenen Punkte der Ebene auf die darin nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräfte Perpendikel gefällt denkt. In beiden Fällen ergeben sich die statischen Momente der Kräfte, wenn man die Intensitäten derselben mit der Länge ihrer Hebelsarme multiplicirt.

Wie die Momente für Kräfte zu bestimmen sind, welche in verschiedenen Ebenen liegen, wird sich weiterhin zeigen.

§. 61.

Bestimmung der Mittelkraft von zwei parallelen Kräften, die nach entgegengesetzten Richtungen wirken. In §. 57 wurde die Mittelkraft zweier paralleler Kräfte unter der Voraussetzung bestimmt, daß dieselben die Ebene, worin sie enthalten sind, nach derselben Richtung hin fortzubewegen streben. Der Fall, wo diese Kräfte nicht in demselben, sondern mit Bezug auf einander im entgegengesetzten Sinne wirksam sind, soll hier noch besonders betrachtet werden.

Es mögen wieder A und B (Fig. 33) die Intensitäten der beiden Kräfte bezeichnen, von welchen A als die Größere vorausgesetzt wird, und a, b seien die normalen Ab-

stände ihrer Richtungslinie von einem in der Ebene beliebig fixirten Punkt O. Man denke sich die größere Kraft A als Mittelkraft von zwei anderen, mit ihr parallelen und gleichen Sinnes wirkenden Kräften, von denen die eine gleich der kleineren Kraft B und in deren Angriffspunkt Q wirksam ist; die zweite aber eine noch unbekannte Kraft M sein mag, deren Angriffspunkt R ebenfalls noch fraglich ist. Setzt man nun den Abstand $OR = m$, so hat man nach §. 57 und 58 die beiden Gleichungen

(1) $$A = B + M,$$

(2) $$Aa = Bb + Mm,$$

woraus sich die beiden Unbekannten M und m folgendergestalt ergeben:

(3) $$M = A - B; \quad m = \frac{Aa - Bb}{A - B}.$$

Nachdem hiernach die Kraft M bestimmt ist, so werden die beiden Kräfte B und M die Wirkung von A ersetzen. Die drei Kräfte B, B und M wirken daher eben so auf die Ebene, wie früher die Kräfte A und B, und daher müssen jene auch dieselbe Mittelkraft liefern wie diese. Da sich nun die gleichen Kräfte B, B am Punkte Q das Gleichgewicht halten, so bleibt nur noch die Kraft M, im Punkte R wirksam, übrig, und folglich muß diese selbst die gesuchte Mittelkraft sein.

Den obigen Resultaten zufolge, ist also die Mittelkraft von zwei parallelen nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften, gleich der Differenz derselben, und ihre Richtungslinie liegt außerhalb der parallelen Kräfte auf der Seite der größeren von ihnen.

Beisp. An einer festen unbiegsamen Linie wirke in Q (Fig. 35) eine Kraft $B = 100$ ℔. vertikal aufwärts, während in P ein Gewicht $A = 180$ ℔. aufgehangen ist. In welchem Punkte R muß die Stange unterstützt werden, damit sie unter den Kräften A und B im Gleichgewicht bleibe, und wie groß ist der Druck M auf die Unterstützung? die Entfernung PQ sei $= 5$ Fuß gegeben.

Nimmt man den Momentenpunkt in R, also $m = 0$ an, und setzt $PR = x$,

so ist $QR = x + 5$. Nach Gleichung (2) hat man nun, wenn darin die entsprechenden Werthe eingesetzt werden, $180 \cdot x = 100 \cdot (x + 5)$; woraus sich $x = 6\frac{1}{4}$ Fuß ergiebt.
Der Druck auf die Unterstützung ist $M = A - B = 80$ ℔.

§. 62.

Aus der zweiten Gleichung des vor. § ergiebt sich noch

$$Mm = Aa - Bb,$$

welches eine Momenten-Gleichung in Bezug auf den außerhalb der Kräfte liegenden Punkt O ist. Denn nimmt man diesen Punkt zum Momentenpunkt, dann stellen die normalen Abstände $OP = a$, $OQ = b$ und $OR = m$ die Hebelsarme der Kräfte A, B und M vor, und die in der Gleichung vorkommenden Produkte sind nach dem vorigen Paragraphen die Momente dieser Kräfte.

Nimmt man einen Punkt O′ zwischen den parallelen Kräften zum Momentenpunkt, dessen Abstand $O'O$ von dem vorigen Punkte $= x$ sein mag, so erhält man eine Momentengleichung in Bezug auf O′, wenn man die Gleichung $M = A - B$ mit x multiplicirt und darauf das Produkt von der vorigen Gleichung subtrahirt. Dadurch entsteht

$$M(m - x) = A(a - x) - B(b - x)$$
$$= A(a - x) + B(x - b).$$

Nun sind $m - x = O'R$, $a - x = O'P$ und $x - b = O'Q$ die neuen Hebelsarme der Kräfte M, A, B, und wenn man dieselben bezüglich mit m′, a′, b′ bezeichnet, so hat man die Momentengleichung

$$Mm' = Aa' + Bb'.$$

Demnach ist das Moment der Mittelkraft der beiden parallelen und entgegengesetzten Kräfte gleich der Summe oder Differenz der Momente dieser Kräfte, je nachdem der Momentenpunkt innerhalb oder außerhalb des Intervalls zwischen ihren Richtungslinien liegt. In dem einen Falle wirken aber die Kräfte in demselben, in dem andern aber im

entgegengesetzten Sinne auf Drehung um den betreffenden Momentenpunkt, was also dem Begriff der Momente vollkommen gemäß ist.

§. 63.

Erörterung eines besonderen Falles. Kräftepaare. Im vorigen Paragraphen haben wir zur Bestimmung der Mittelkraft **M** von zwei parallelen Kräften **A** und **B**, die in einer Ebene nach entgegengesetzten Richtungen wirken, die beiden Formeln gefunden:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{B}; \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{Aa} - \mathbf{Bb}}{\mathbf{A} + \mathbf{B}}.$$

Diese Formeln finden jedoch nur so lange Anwendung, als die beiden Kräfte **A** und **B** verschiedene Intensitäten haben. Sobald sie aber einander gleich sind, ergiebt sich sofort

$$\mathbf{M} = 0, \text{ und } \mathbf{m} = \infty;$$

also eine Mittelkraft gleich Null in unendlicher Entfernung, oder mit andern Worten: die fraglichen Kräfte können in diesem besondern Fall nicht mehr durch eine einzige gleichgeltende Kraft ersetzt werden.

Zwei gleiche Kräfte, die in einem bestimmten Abstande von einander nach entgegengesetzten parallelen Richtungen wirken, haben demnach weder eine Mittelkraft, noch können sie mit einander im Gleichgewicht sein, denn sonst müßten ihre Richtungslinien nach §. 12 zusammenfallen, und somit bilden sie einen Ausnahmefall eigenthümlicher Art. Man nennt sie ein Kräftepaar, oder ohne weiteren Beisatz ein Paar*), und es kömmt hier darauf an, die Wirkung eines solchen Paares näher zu untersuchen. Eine kleine Ueberle-

*) Poinsot, in seinem trefflichen Werke: Élémens de Statique, von welchem mir die 7te Auflage vom Jahr 1837 vorliegt, hat dafür die Benennung Couple (des forces) eingeführt, und diese ist seitdem in den französischen Schriften über die Statik allgemein gebräuchlich geworden.

gung ergiebt aber bald, daß die fragliche Wirkung nur in einer Drehung der Ebene beſtehen kann, welche das Paar enthält, da ſich die Kräfte deſſelben in Bezug auf fortgehende Bewegung einander aufheben.

Um ſich hierüber ein für alle Mal genaue Rechenſchaft zu geben, betrachte man das in Fig. 36 dargeſtellte Paar A, A', beſtehend aus Kräften, jede von der Intenſität = A, deren parallele Richtungslinien den normalen Abſtand a von einander haben mögen. Man denke ſich in der Ebene dieſes Paares einen beliebigen Punkt O befeſtigt, indem man ſich in demſelben eine feſte, auf der Ebene ſenkrecht ſtehende Linie als Drehachſe angebracht denkt, und ziehe aus dieſem Punkte die Gerade OP normal auf die Kräfte A, A'. Liegt nun der Punkt O außerhalb des Paares, ſo iſt augenſcheinlich, daß die Kraft A am Hebelsarm OP eine Drehung um O in dem einen, die Kraft A' am Hebelsarm OQ dagegen eine Drehung in dem entgegengeſetzten Sinne hervorzubringen ſtrebt, und die Differenz der Momente $A \cdot OP$ und $A' \cdot OQ$, d. h.

$$A \cdot OP - A' \cdot OQ = A \cdot (OP - OQ) = A \cdot PQ,$$

iſt offenbar das Maaß der gemeinſchaftlichen Wirkung beider Kräfte. Wenn dagegen der Drehpunkt innerhalb des Intervalles zwiſchen den beiden Kräften, etwa in O', angenommen wird, ſo wirken letztere beide in demſelben Sinne auf Drehung, und ihre Wirkungen vereinigen ſich dann in der Summe der Momente $A \cdot O'P$ und $A' \cdot O'Q$, wofür ſich alſo ergiebt:

$$A \cdot O'P + A' \cdot O'Q = A \cdot (O'P + O'Q) = A \cdot PQ.$$

Hieraus geht alſo hervor, daß das Streben zur Drehung, oder das Moment des Paares, für jeden Punkt der Ebene ſtets dieſelbe Größe behält, da es allemal gleich dem Produkt aus einer der gleichen Kräfte in ihrem normalen Abſtande, alſo = Aa iſt. Auch folgt aus der obigen Darſtel-

lung, daß die Drehung um den außerhalb gelegenen Punkt O im Sinne derjenigen Kraft erfolgen wird, welche in Bezug auf diesen Punkt den größten Hebelsarm hat, nach der Figur also im Sinne der Kraft B. In demselben Sinne wird aber auch die Drehung um den innerhalb gelegenen Punkt O' erfolgen, wie es die unmittelbare Betrachtung der Figur sofort ersehen läßt.

§. 64.

Ist die das Kräftepaar enthaltende Ebene vollkommen frei, also in keinem ihrer Punkte befestigt, dann findet zwar, der vorigen Untersuchung gemäß, für jeden Punkt in ihr dasselbe Streben zur Drehung Statt. Dennoch kann man annehmen, daß in der Wirklichkeit die Ebene sich um den Mittelpunkt des Intervalles zwischen den gleichen Kräften drehen wird, da die zu beiden Seiten dieses Punktes befindlichen Kräfte sich in Bezug auf ihn in ganz gleicher Weise verhalten.

Welcher aber auch der Drehpunkt der Ebene sein mag, so ist klar, daß die Wirkung des Paares durch keine einzelne Kraft ersetzt werden kann. Denn eine solche einzelne Kraft kann ihrer Natur nach nur eine fortgehende Bewegung im Sinne ihrer Richtung, nicht aber eine Drehung hervorbringen; es sei denn, daß die Ebene in einem ihrer Punkte befestigt wäre. Ist aber letzteres wirklich der Fall, dann läßt sich allerdings eine Kraft nachweisen, welche die Wirkung des Paares zu ersetzen und mithin auch ganz aufzuheben im Stande ist. Bezeichnet nemlich C die Intensität und c den Hebelsarm dieser Kraft in Bezug auf den festen Drehpunkt der Ebene, so muß ihr Moment Cc dem Moment Aa des Paares gleich sein, also

$$Cc = Aa, \quad \text{mithin} \quad C = \frac{Aa}{c}.$$

Man sieht also, daß die Intensität dieser Kraft durch die

normale Entfernung des festen Punktes von ihrer Richtungslinie bestimmt ist, und in Bezug auf die Drehung um diesen Punkt muß sie mit dem Paare entweder in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne wirken, je nachdem sie die Wirkung desselben ersetzen oder ganz aufheben soll. Im Übrigen kann die Kraft C jede beliebige Lage gegen das Paar haben, wofern nur ihr Hebelsarm c unverändert bleibt. Wenn man also in der Ebene des Paares aus dem angenommenen Drehpunkte mit c als Halbmesser einen Kreis beschrieben denkt, an welchem die Richtungslinie von C stets tangential bleibt, so kann man die genannte Kraft, ohne etwas an ihrer Wirkung zu ändern, in jedem Punkte des beschriebenen Kreisumfangs angebracht denken.

Anmerkung. Die zuerst durch Poinsot in die Lehren der Statik eingeführten Kräftepaare sind noch einer weitern Entwicklung fähig, die jedoch hier, wo es sich mehr um die nächste Anwendung auf die Praxis handelt, füglich übergangen werden kann. Wer über diesen Gegenstand weitere Belehrung wünscht, findet dieselbe in dem schon angeführten Werke von Poinsot, nächstdem aber in dem „Handbuche der theoretischen Mechanik, von Dr. Ferd. Minding *), Berlin 1838", wo die Theorie der Kräftepaare, besonders in ihrer Anwendung bei den verschiedenen Problemen der Mechanik, auf eine sehr sinnreiche Weise durchgeführt ist.

§. 65.

Beliebig viele Kräfte, nach parallelen Richtungen wirksam. Wir betrachten nunmehr eine beliebige Anzahl von parallelen Kräften, die in einer Ebene auf ein

*) Ehemals Lehrer an der Königlichen Allgemeinen Bauschule, jetzt Professor der angewandten Mathematik in Dorpat, wohin derselbe vor Kurzem einem ehrenvollen Rufe gefolgt ist. Möge Herr Minding in seinem neuen Wirkungskreise dieselbe Liebe und Anerkennung wiederfinden, die er hier in so reichem Maaße zurückgelassen hat.

Syſtem von Punkten wirken, und ſetzen zuerſt voraus, daß alle Kräfte ihre Angriffspunkte in demſelben Sinne fortzubewegen ſtreben. Unter dieſer Vorausſetzung iſt ein Gleichgewicht zwiſchen den Kräften nicht möglich; und daher kömmt es darauf an, ihre Mittelkraft zu beſtimmen.

Man bezeichne die Intenſitäten der Kräfte nach der Reihe mit A, B, C ... ꝛc., die Angriffspunkte derſelben mit A', B', C' ... ꝛc. (Fig. 37), und um die gegenſeitige Lage dieſer Angriffspunkte feſtzuſtellen, denke man ſich in der Ebene der Kräfte zwei rechtwinklige Coordinatenachſen OX, OY gezogen, von welchen jene Punkte die normalen Abſtände a, a'; b, b'; c, c'; ... ꝛc. haben mögen.

Wir nehmen zuerſt von zwei Kräften A und B die Mittelkraft P, ſo iſt deren Intenſität nach §. 57 gleich A + B, und ihr Anfangspunkt P' liegt auf der Verbindungslinie A'B'. Verlängert man dieſelbe, bis ſie die Achſen in K und L ſchneidet, ſo hat man nach (2) in §. 58, wenn man nach einander die genannten Durchſchnitte als Momentenpunkte annimmt,

$$P \cdot KP' = A \cdot KA' + B \cdot KB',$$

und

$$P \cdot LP' = A \cdot LA' + B \cdot LB'.$$

Man bezeichne die Winkel, welche die Gerade KL mit den Achſen OY, OX bildet, bezüglich mit φ und ψ, und multiplicire die eine der beiden vorigen Gleichungen mit $\sin\varphi$, die andere mit $\sin\psi$, ſo entſteht:

$$P \cdot KP' \cdot \sin\varphi = A \cdot KA' \cdot \sin\varphi + B \cdot KB' \cdot \sin\varphi,$$

$$P \cdot LP' \cdot \sin\psi = A \cdot LA' \cdot \sin\psi + B \cdot LB' \cdot \sin\psi.$$

Mit Hinſicht auf die Figur iſt aber

$$KP' \cdot \sin\varphi = p, \quad KA' \cdot \sin\varphi = a, \quad KB' \cdot \sin\varphi = b;$$

und $LP' \cdot \sin\psi = p'$, $LA' \cdot \sin\psi = a'$, $LB' \cdot \sin\psi = b'$.

Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo hat man überhaupt drei Gleichungen zwiſchen den beiden Kräften A, B und ihrer Mittelkraft P, nemlich

$$P = A + B,$$
$$Pp = Aa + Bb,$$
$$Pp' = Aa' + Bb'.$$

Dieſe Gleichungen dienen nunmehr zur Beſtimmung der Intenſität und des Angriffspunktes der Mittelkraft P, welche hinſichtlich der Richtung den beiden Seitenkräften A und B parallel iſt. Wenn man daher die letzteren aus dem Syſteme hinwegnimmt, und ſtatt ihrer die Kraft P an dem durch die Coordinaten p und p' beſtimmten Punkte P' anbringt, ſo wird dadurch in der Geſammtwirkung aller Kräfte nichts geändert. Man kann dann ebenſo die Kraft P mit einer dritten Kraft C zu einer neuen Mittelkraft Q vereinigen, und dieſe wird demnächſt die Wirkung der drei Kräfte A, B und C erſetzen. Der Angriffspunkt Q' dieſer neuen Mittelkraft liegt auf der Verbindungslinie P'C', und wenn q, q' die Coordinaten deſſelben ſind, ſo findet man auf dieſelbe Weiſe wie vorhin die Gleichungen

$$Q = P + C = A + B + C;$$
$$Qq = Pp + Cc = Aa + Bb + Cc;$$
$$Qq' = Pp' + Cc' = Aa' + Bb' + Cc';$$

indem man nemlich für P, Pp und Pp' die vorigen Werthe ſetzt. Durch die drei letzten Gleichungen ſind die Intenſität der Kraft Q und die beiden Coordinaten q, q' ihres Angriffspunktes beſtimmt. Dieſe Kraft iſt nun die Mittelkraft der drei Kräfte A, B, C; und man kann ſie in derſelben Art mit der vierten Kraft D verbinden. Nennt man R die neue Mittelkraft von Q und D, ſo wie r, r' die Coordinaten ihres Angriffspunktes, ſo hat man ebenſo wie vorhin die Gleichungen:

$$R = Q + D = A + B + C + D;$$
$$Rr = Qq + Dd = Aa + Bb + Cc + Dd;$$
$$Rr' = Qq' + Dd' = Aa' + Bb' + Cc' + Dd'.$$

Beſtände das Syſtem nur aus den vier Kräften A, B, C

und D, so hätte man in R schon die fragliche Mittelkraft gefunden. Sind aber noch mehr Kräfte vorhanden, so kann man die vorige Operation so lange fortsetzen, bis alle parallelen Kräfte auf eine einzige Mittelkraft gebracht sind. Auf diesem Wege findet man zuletzt, wenn man die Mittelkraft sämmtlicher parallelen Kräfte mit M und die Coordinaten ihres Angriffspunktes mit m und m′ bezeichnet,

$$(1)\quad \begin{cases} M = A + B + C + D + \cdots = \Sigma A; \\ Mm = Aa + Bb + Cc + Dd + \cdots = \Sigma Aa; \\ Mm' = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \cdots = \Sigma Aa'. \end{cases}$$

Die erste von diesen Gleichungen giebt unmittelbar die Intensität der Mittelkraft, gleich der Summe der Intensitäten aller Seitenkräfte. Dividirt man aber die zweite und dritte Gleichung durch die erste, so findet man für die Coordinaten ihres Angriffspunktes die Ausdrücke:

$$(2)\qquad m = \frac{\Sigma Aa}{\Sigma A};\quad m' = \frac{\Sigma Aa'}{\Sigma A}.$$

Da die partiellen Mittelkräfte P, Q, R u. s. w., welche jedesmal zwischen zwei parallelen Kräften genommen worden, denselben parallel sind, so folgt, daß auch die zuletzt gefundene Mittelkraft M des ganzen Systems den sämmtlichen Kräften desselben parallel sein muß.

Auch verdient hier noch bemerkt zu werden, daß die vorige Herleitung ganz unabhängig ist von der Lage der parallelen Kräfte gegen die Coordinatenachsen. Wenn also die Kräfte, indem sie sich um ihre Angriffspunkte drehen, immer andere und andere Lagen annehmen, dabei aber stets parallel bleiben, so bleiben auch die durch obige Ausdrücke bestimmten Coordinaten m und m′ ungeändert, und die Mittelkraft muß also für alle möglichen Lagen der parallelen Kräfte stets durch denselben Punkt gehen. Wegen dieser Eigenschaft, die keinem anderen Punkte des Systems zukommt, nennt man ihn den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

§. 66.

Parallele Kräfte, die nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Im vorigen Paragraphen setzten wir voraus, daß alle parallelen Kräfte in demselben Sinne auf fortgehende Bewegung wirken. Jetzt wollen wir die Mittelkraft unter der Voraussetzung bestimmen, daß ein Theil der gegebenen Kräfte nach der einen, ein anderer Theil aber nach der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Dadurch bilden sich zwei entgegengesetzte Systeme von parallelen Kräften, deren Intensitäten wir für das eine System durch $A, B, C \ldots$ ꝛc., für das andere durch $P, Q, R \ldots$ ꝛc. bezeichnen wollen, während in entsprechender Bezeichnung $a, a'; b, b'; c, c'; \ldots$ ꝛc. und $p, p'; q, q'; r, r'; \ldots$ ꝛc. die Coordinaten ihrer Angriffspunkte sein mögen. Denkt man sich von beiden Systemen, deren jedes aus Kräften besteht, die in demselben Sinne wirken, die zugehörigen Mittelkräfte V und W genommen, so bleibt nur noch übrig, die Mittelkraft von letzteren zu bestimmen, welche dann die der sämmtlichen Kräfte sein wird.

Zur Bestimmung der beiden partiellen Mittelkräfte V und W hat man aber nach dem vorigen Paragraphen, wenn v, v' und w, w' (Fig. 38) die Coordinaten ihrer Angriffspunkte v', w' sind, die Gleichungen

$$V = \Sigma A; \quad Vv = \Sigma Aa; \quad Vv' = \Sigma Aa';$$

und $$W = \Sigma P; \quad Ww = \Sigma Pp; \quad Ww' = \Sigma Pp'.$$

Ist nun V die größere von diesen beiden Kräften, so ergiebt sich nach §. 61 ihre Mittelkraft $M = V - W$, und deren Angriffspunkt M' liegt auf der Verlängerung von $V'W'$, welche letztere die beiden Coordinatenachsen in K und L schneiden möge. In Bezug auf diese Durchschnitte als Momentenpunkte hat man dann ferner nach §. 62 die Gleichungen

$$M \cdot KM' = V \cdot KV' - W \cdot KW',$$

und $$M \cdot LM' = V \cdot LV' - W \cdot LW';$$

welche sich leicht durch das im vorigen Paragraphen angewendete Verfahren auf folgende reduciren lassen:

$$(1)\qquad Mm = Vv - Ww;\quad Mm' = Vv' - Ww'.$$

Setzt man darin für die Produkte Vv, Vv' und Ww, Ww' die vorhin gefundenen Werthe, und erinnert sich zugleich, daß $M = V - W$ ist, dann hat man folgende drei Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} M = \Sigma A - \Sigma P; \\ Mm = \Sigma Aa - \Sigma Pp; \\ Mm' = \Sigma Aa' - \Sigma Pp'; \end{cases}$$

welche den im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen (1) vollkommen analog sind. Dieselben liefern nun für die Coordinaten m, m' die Ausdrücke:

$$(3)\qquad m = \frac{\Sigma Aa - \Sigma Pp}{\Sigma A - \Sigma P};\quad m' = \frac{\Sigma Aa' - \Sigma Pp'}{\Sigma A - \Sigma P};$$

wodurch also der Angriffspunkt der Mittelkraft, oder der Mittelpunkt der parallelen Kräfte bestimmt ist. Das Dasein dieses Punktes ist jedoch, wie aus der obigen Herleitung leicht erhellet, in dem vorliegenden Falle an die Bedingung geknüpft, daß die beiden partiellen Mittelkräfte V und W ungleiche Intensitäten haben. Denn wollte man diese als gleich annehmen, ohne daß zugleich $v = w$ und $v' = w'$, der Abstand V'W' zwischen ihren Angriffspunkten also gleich Null wäre, so würde man sofort $m = m' = \infty$ finden, und man hätte es dann mit einem Kräftepaar zu thun, welches nach §. 63 einer Mittelkraft nicht fähig ist.

§. 67.

Die in den beiden letzten Paragraphen gefundenen Gleichungen drücken, wenn man den so eben erwähnten Fall eines Kräftepaares ausschließt, im Grunde dasselbe Gesetz aus. Es findet dabei weiter kein Unterschied statt, als daß in den Gleichungen des §. 65 alle Kräfte das positive Vorzeichen haben, weil sie zufolge der Voraussetzung in demsel-

den Sinne wirken, während in §. 66, wo die Kräfte beziehungsweise nach entgegengesetzten Richtungen als wirksam gedacht werden, demgemäß auch ihre Intensitäten mit entgegengesetzten Vorzeichen in der Rechnung auftreten. Faßt man daher beide Fälle zusammen, so lassen sich die Ergebnisse folgendermaßen in Worten wiedergeben:

„Die Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe „aller parallelen Seitenkräfte; und in Bezug auf jede der „beiden Coordinatenachsen ist das Produkt aus der Inten„sität der Mittelkraft in den normalen Abstand ihres An„griffspunktes von dieser Achse der algebraischen Summe „der eben so gebildeten Produkte aller Seitenkräfte gleich";

wo also unter dem Ausdruck der algebraischen Summe eine Vereinigung von Größen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu verstehen ist. Die zuletzt erwähnten Produkte pflegt man der Kürze wegen auch häufig die Momente in Bezug auf die Coordinatenachsen zu nennen; wobei jedoch zu erinnern ist, daß diese Art Momente nicht mit den sogenannten statischen Momenten, welche nach §. 59 das Bestreben der Kräfte zur Hervorbringung einer drehenden Bewegung ausdrücken, verwechselt werden dürfen. Jene Produkte haben zwar ebenfalls, wie wir sogleich sehen werden, eine gewisse, wenngleich entferntere, Beziehung auf drehende Bewegung. Es ist indessen klar, daß letztere nur um eine geradlinige Achse geschehen kann, die auf der Ebene der Kräfte in irgend einem Punkte, dem Momentenpunkte, senkrecht steht; wogegen eine Kraft kein Bestreben zur Drehung äußern kann, sobald die Drehachse, wie in dem vorliegenden Falle die Coordinatenachsen, sich mit ihr in derselben Ebene befindet.

Man nehme nun den Coordinatenanfang O (Fig. 37) zum Momentenpunkt, und ziehe aus ihm die Linie OZ senkrecht auf die Richtungslinien der parallelen Kräfte, mit welcher sie sich in den Punkten A", B", C"... ꝛc. schneidet, dann

ſtellen die normalen Abſtände OA″, OB″, OC″... ꝛc. die Hebelsarme der Kräfte vor, und dieſe ſollen nach der Reihe mit a″, b″, c″... ꝛc. bezeichnet werden. Um letztere zu beſtimmen, ſei λ der Winkel, den die parallelen Kräfte mit OX bilden. Der Hebelsarm von irgend einer der Kräfte, z. B. der von B, ergiebt ſich nun mit Rückſicht auf die in der Figur angegebene Bezeichnung auf folgende Weiſe:

In dem rechtwinkligen Dreieck B′HJ hat man $HJ = b' \cdot \mathrm{Cotg}\,\lambda$, und wenn dies von $OH = b$ ſubtrahirt wird, entſteht:

$$OJ = b - b' \cdot \mathrm{Cotg}\,\lambda.$$

Dieſe Linie iſt ferner die Hypotenuſe des rechtwinkligen Dreiecks OJB″, von welchem die Kathete OB″ den geſuchten Hebelsarm b″ darſtellt. Daher ergiebt ſich $OB'' = OJ \cdot \mathrm{Sin}\,\lambda$, oder, nach Einſetzung der entſprechenden Werthe,

$$b'' = (b - b' \cdot \mathrm{Cotg}\,\lambda) \cdot \mathrm{Sin}\,\lambda = b \cdot \mathrm{Sin}\,\lambda - b' \cdot \mathrm{Cos}\,\lambda.$$

Ganz ähnliche Ausdrücke ergeben ſich nun auf gleiche Weiſe für die Hebelsarme aller übrigen Kräfte, was ohne Weiteres einleuchtend iſt. Um alſo aus den beiden in §. 65 gefundenen Coordinaten-Gleichungen

$$Mm = \Sigma Aa = Aa + Bb + Cc + \cdots \text{ ꝛc.}$$

$$Mm' = \Sigma Aa' = Aa' + Bb' + Cc' + \cdots \text{ ꝛc.}$$

eine ſtatiſche Momentengleichung herzuleiten, multiplicire man die erſte von ihnen mit $\mathrm{Sin}\,\lambda$, die zweite mit $\mathrm{Cos}\,\lambda$, und ſubtrahire dann beide von einander, ſo entſteht:

$$M(m\,\mathrm{Sin}\,\lambda - m'\mathrm{Cos}\,\lambda) = A(a\,\mathrm{Sin}\,\lambda - a'\mathrm{Cos}\,\lambda) + B(b\,\mathrm{Sin}\,\lambda - b'\mathrm{Cos}\,\lambda) + C(c\,\mathrm{Sin}\,\lambda - c'\mathrm{Cos}\,\lambda) + \ldots \text{ ꝛc.}$$

Die Größen, welche hier neben den Kräften als deren Factoren in Klammern ſtehen, ſind aber, wie oben gezeigt worden, die Hebelsarme der Kräfte, und wenn man dafür die entſprechenden Bezeichnungen m″, a″, b″, c″... ꝛc. einführt, ſo hat man

$$Mm'' = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \ldots \text{ ꝛc.} = \Sigma Aa'';$$

wonach also, in Bezug auf den Coordinatenanfang O als Momentenpunkt, das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente aller, in demselben Sinne wirkender, Seitenkräfte ist.

§. 68.

Ein ganz gleiches Gesetz, nur mit geringer Abänderung in den Vorzeichen, ergiebt sich auch für den in §. 66 betrachteten Fall, wo sich die gegebenen Kräfte auf zwei entgegengesetzte partielle Mittelkräfte V und W reduciren lassen. Zieht man nemlich in Fig. 38, welche diesen Fall darstellt, die Linie OZ rechtwinklig zu den Kräften, und bezeichnet die auf dieser Linie gemessenen Hebelsarme OV″, OW″ und OM″ nach der Reihe mit v″, w″ und m″, so hat man nach §. 62

(1) $$Mm'' = Vv'' - Ww''.$$

Nun ist aber V die Mittelkraft der nach einerlei Richtung wirkenden Kräfte A, B, C... ꝛc., und W ist die Mittelkraft der parallelen Kräfte P, Q, R... ꝛc., welche ebenfalls nach einerlei, aber der vorigen entgegengesetzten Richtung wirken. Sind nun a″, b″, c″... ꝛc. die Hebelsarme der ersten, p″, q″, r″... ꝛc. die der letzten Kräfte, so hat man nach dem im vorigen Paragraphen gefundenen Gesetz $Vv'' = \Sigma Aa''$, $Ww'' = \Sigma Pp''$; folglich entsteht, wenn dies in der obigen Gleichung substituirt wird,

(2) $$Mm'' = \Sigma Aa'' - \Sigma Pp''.$$

Diese Gleichung, zusammengefaßt mit der im vorigen Paragraphen gefundenen, enthält nun folgendes Gesetz:

Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller Seitenkräfte.

Die statische Bedeutung desselben ist aber die, daß die Mittelkraft eben so auf drehende Bewegung der das System

enthaltenden Ebene wirkt, wie alle Kräfte desselben zusammengenommen. Dabei hat man sich zunächst im Coordinatenanfang O eine feste Achse zu denken, die auf der Ebene der Kräfte senkrecht steht. Da aber auch jeder andere Punkt der Ebene zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden kann, so folgt, daß das so eben ausgesprochene Gesetz für alle Punkte, wo man sich auch eine feste Achse mit der Ebene verbunden denken mag, ganz in derselben Weise gültig bleibt.

§. 69.

Für den besonderen Fall, daß die entgegengesetzten partiellen Mittelkräfte V und W sich als gleich ergeben, ist die Gesammt-Mittelkraft M gleich Null, so daß also nach §. 66 die Gleichung stattfindet:

(1) $$0 = \Sigma A - \Sigma P.$$

Man hat dann ein Kräftepaar, dessen Wirkung in Bezug auf drehende Bewegung (Fig. 38) gleich der Differenz der Momente $V \cdot OV''$ und $W \cdot OW''$ ist, und daher $V \cdot OV'' - W \cdot OW'' = \Sigma Aa'' - \Sigma Pp''$ zum Ausdruck hat. Derselbe verwandelt sich, wenn man die Intensität einer jeden Kraft $= U$, und ihren normalen Abstand $V''W''$ von einander, oder das Intervall des Paares, $= u$ setzt, in

(2) $$Uu = \Sigma Aa'' - \Sigma Pp'',$$

wodurch also das Moment des Paares, oder die Größe seines Strebens zur Drehung ausgedrückt wird (vergl. §. 63).

Der hier erwähnte besondere Fall tritt jedesmal ein, so oft sich bei einem System von parallelen Kräften die algebraische Summe ihrer Intensitäten gleich Null ergiebt, ohne daß auch zugleich die algebraische Summe ihrer Momente Null ist. Es kann sich aber auch ereignen, daß die erste Summe einen bestimmten Werth M hat, während die letzte gleich Null ist, so daß man also hat

(3) $$\Sigma A - \Sigma P = M, \text{ und } \Sigma Aa'' - \Sigma Pp'' = 0.$$

In dieſem Falle findet kein Beſtreben zur Drehung um den angenommenen Momentenpunkt Statt; dagegen erleidet derſelbe einen Druck = M, was mit andern Worten nichts weiter beſagt, als daß der Momentenpunkt zufälliger Weiſe in der Richtung der Mittelkraft liegt.

§. 70.

Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen den parallelen Kräften. Wirken die Kräfte alle in demſelben Sinne auf fortgehende Bewegung ihrer Angriffspunkte, ſo kann offenbar von einem Gleichgewicht zwiſchen ihnen nicht die Rede ſein. Wir ſetzen daher ein Syſtem von Kräften voraus, die nach entgegengeſetzten, wenn gleich parallelen Richtungen wirken, und behalten dafür die in §. 66 angenommene Bezeichnung unverändert bei.

1) Soll nun ein ſolches Syſtem im Gleichgewichte ſein, ſo muß daſſelbe Gleichgewicht auch zwiſchen den beiden partiellen Mittelkräften V und W ſtattfinden, auf die es ſich nach §. 66 zurückführen läßt, und dieſe beiden Kräfte können wieder nicht anders im Gleichgewichte ſein, als daß ihre Intenſitäten einander gleich, ihre Richtungen aber auf derſelben geraden Linie entgegengeſetzt ſind. Mit andern Worten: Das Gleichgewicht erfordert, daß ſich ſämmtliche parallelen Kräfte auf ein Kräftepaar reduciren laſſen, deſſen Intervall gleich Null iſt.

Demnach hat man nur nöthig, in den Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen das Intervall u gleich Null zu ſetzen, wodurch man folgende zwei Bedingungsgleichungen erhält:

$$\Sigma A - \Sigma P = A + B + \cdots - P - Q - \cdots \text{ ꝛc.} = 0,$$

$$\Sigma Aa'' - \Sigma Pp'' = Aa'' + Bb'' + \cdots - Pp'' - Qq'' - \cdots \text{ ꝛc.} = 0.$$

Denkt man ſich die den verſchiedenen Kräften entſprechenden poſitiven und negativen Glieder, welche in dieſen Gleichun-

gen getrennt stehen, jedesmal in eine einzige algebraische Summe vereinigt, so kann man die vorstehenden Bedingungsgleichungen auf folgende Weise kürzer darstellen:

$$\Sigma A = 0; \quad \Sigma Aa'' = 0.$$

D. h. Wenn parallele Kräfte in einer Ebene mit einander im Gleichgewichte sind, dann ist sowohl die algebraische Summe ihrer Intensitäten, als auch die ihrer statischen Momente jedesmal Null.

Die erste dieser Bedingungen drückt aus, daß für die Ebene, worin die Kräfte wirken, keine fortgehende Bewegung nach der Richtung der letztern möglich ist. Die zweite giebt dagegen zu erkennen, daß keine Drehung um eine Achse entstehen kann, die in irgend einem Punkte auf der Ebene der Kräfte senkrecht steht.

2) Wenn umgekehrt für ein System von parallelen Kräften in einer Ebene die obigen Gleichungen gegeben sind, so ist auch das System allemal im Gleichgewicht.

Denn es ist dann weder ein Bestreben zur fortgehenden noch zur drehenden Bewegung vorhanden, und darin besteht das Gleichgewicht. Außerdem aber läßt sich das Vorhandensein desselben auch dadurch leicht nachweisen, daß man zeigt, daß jede Kraft des Systems die entgegengesetzte Mittelkraft aller übrigen ist. Denkt man sich nemlich eine der gegebenen Kräfte, z. B. A, abgesondert, und dann von allen übrigen die Mittelkraft N bestimmt, deren Hebelsarm $= a''$ sein mag, so hat man dem Vorhergehenden gemäß

$$N = \Sigma B; \quad Na'' = \Sigma Bb''.$$

Nach der Voraussetzung ist aber $A + \Sigma B = 0$ und $Aa'' + \Sigma Bb'' = 0$; mithin

$$A = -\Sigma B; \quad Aa'' = -\Sigma Bb''.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den vorigen liefert demnächst $A = -N$ und $a'' = a''$. Nach dem ersten Ergebniß ist also die Kraft A der Mittelkraft aller übrigen

Kräfte gleich und entgegengesetzt, nach dem zweiten findet dieser Gegensatz der Richtungen beider Kräfte auf einer und derselben geraden Linie Statt; folglich heben sich die beiden Kräfte mit einander auf, und das System ist also im Gleichgewichte.

§. 71.

Aufgaben zur Anwendung der in diesem Abschnitte gefundenen Gesetze.

1) Es wirken n Kräfte nach einerlei parallelen Richtungen und in gleichen Abständen a von einander, in einer festen Ebene. Die Intensitäten der Kräfte bilden eine arithmetische Progression, deren erstes Glied = A, und beständige Differenz = D ist. Man soll Intensität und Angriffspunkt der Mittelkraft M bestimmen.

Denkt man sich alle parallelen Kräfte durch eine beliebige Linie rechtwinklig geschnitten, und bestimmt die Lage der Durchschnittspunkte auf dieser Linie durch ihre Entfernungen von einem, zur Seite der ersten Kraft fixirten Punkte, der von dieser den Abstand a hat, so sind die normalen Abstände der Kräfte von demselben, nach der Reihe, gleich a, 2a, 3a, ... na, und diese Längen werden die Hebelsarme der Kräfte, A, A+D, A+2D, ... A+(n−1)D darstellen, sofern man jenen angenommenen Punkt als Momentenpunkt betrachtet. Ist nun m der Hebelsarm der Mittelkraft, oder ihr normaler Abstand von dem Momentenpunkte, so hat man nach §. 67 folgende zwei Gleichungen:

$$M = A + A+D + A+2D + \cdots + A+(n-1)D;$$

$$Mm = Aa + (A+D)2a + (A+2D)3a + \cdots + [A+(n-1)D]na.$$

Die erste Gleichung giebt nach einer bekannten Formel

$$M = [2A+(n-1)D]\frac{n}{2}.$$

Die zweite Gleichung verwandelt sich durch Auflösung der Klammern in folgende:

$$Mm = Aa(1+2+3+\cdots+n) + Da[1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots + (n-1)n].$$

Die Summe der Reihe in der ersten Klammer ist bekanntlich $= \frac{1}{2}n(n+1)$. Die Reihe in der zweiten Klammer ist eine arithmetische der zweiten Ordnung, und ihre Summe findet sich nach Anh. II. Nr. 6 $= 2(n+1)_3 = \frac{1}{3}\cdot(n+1)(n-1)n$. Setzt man dies in die vorige Momentengleichung, so kommt:

$$Mm = \tfrac{1}{2}n(n+1)a[A+\tfrac{2}{3}(n-1)D].$$

Diese Gleichung durch die vorige dividirt, giebt

$$m = \frac{n+1}{3}\cdot a\frac{3A+2(n-1)D}{2A+(n-1)D}.$$

2) Mit Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen werde die Aufgabe dahin abgeändert, daß die Intensitäten der gegebenen Kräfte eine geometrische Progression bilden, deren erstes Glied $= A$ und Exponent $= E$ ist. Alsdann hat man zur Bestimmung von M und m die Gleichungen:

$$M = A + AE + AE^2 + AE^3 + \cdots + AE^{n-1};$$

$$Mm = aA + 2aAE + 3aAE^2 + 4aAE^3 + \cdots + naAE^{n-1}.$$

Summirt man die geometrische Reihe der ersten Gleichung, und nimmt in der zweiten den gemeinschaftlichen Factor Aa heraus, so entsteht:

$$M = \frac{A(E^n-1)}{E-1};$$

$$Mm = Aa(1+2E+3E^2+4E^3+\cdots+nE^{n-1}).$$

Die in der Klammer stehende Reihe läßt sich leicht auf eine geometrische zurückführen, wenn man sie mit E multiplicirt und das entstehende Resultat von der genannten Reihe selbst subtrahirt. Es sei nemlich:

$$S = 1+2E+3E^2+4E^3+\cdots+nE^{n-1},$$

also $$SE = E+2E^2+3E^3+\cdots+(n-1)E^{n-1}+nE^n;$$

folglich, wenn man beide Gleichungen subtrahirt,

$$S(1-E) = 1+E+E^2+E^3+\cdots+E^{n-1}-nE^n$$

$$= \frac{E^n-1}{E-1} - nE^n.$$

Hieraus ergiebt sich nun

$$S = \frac{nE^n(E-1)-(E^n-1)}{(E-1)^2};$$

und wenn dies in der Entwickelung von Mm substituirt wird, so kommt

$$Mm = Aa\cdot\frac{nE^n(E-1)-(E^n-1)}{(E-1)^2}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch den obigen Werth von M, so erhält man endlich:

$$m = a\cdot\frac{nE^n(E-1)-(E^n-1)}{(E-1)(E^n-1)}.$$

3) Die Bedingungen der Aufgabe seien noch dieselben wie vorhin, nur mit der Abänderung, daß die Intensitäten der gegebenen Kräfte sich wie ihre Abstände von dem Momentenpunkte verhalten.

Unter dieser Voraussetzung können die Intensitäten durch die Ausdrücke A, 2A, 3A,... nA dargestellt werden, während die zugehörigen Hebelsarme, wie vorhin angenommen, gleich a, 2a, 3a,... na sind. Demgemäß hat man folgende Gleichungen:

$$M = A + 2A + 3A + \cdots + nA;$$

$$Mm = aA + 2a\cdot 2A + 3a\cdot 3A + \cdots + na\cdot nA;$$

oder, wenn man auf der rechten Seite die gemeinschaftlichen Factoren herausnimmt, und dann summirt,

$$M = A(1+2+3+\cdots+n) = A\cdot\Sigma n;$$

$$Mm = Aa(1+2^2+3^2+\cdots+n^2) = Aa\cdot\Sigma n^2.$$

Nach Anh. II Nr. 7 ist aber $\Sigma n = \frac{1}{2}n(n+1)$; $\Sigma n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Wenn dies substituirt wird, so entsteht

$$M = \tfrac{1}{2}n(n+1)\cdot A;$$

$$Mm = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot Aa.$$

Beide Gleichungen mit einander dividirt, liefern demnächst

$$m = \tfrac{1}{3}(2n+1)a,$$

so daß also der Abstand m unabhängig von der Intensität A ist.

Zusatz. Die letzte Formel reducirt sich, wenn man a in die Klammer nimmt, und na = l setzt, auf folgende:

$$m = \tfrac{1}{2}(2l + a).$$

Nimmt man nun die gegebenen Kräfte an als stetig vertheilt über die ganze Linie l, dann sind ihre Abstände a unendlich klein, und demgemäß ergiebt sich

$$m = \tfrac{2}{3}l.$$

Der Mittelpunkt aller Kräfte liegt daher in diesem besondern Falle auf $\frac{2}{3}$ der Linie l von ihrem Anfangspunkte entfernt.

Dies findet Anwendung beim Dreieck, wenn man l als die Höhe desselben, und die mit der Grundlinie parallel gezogenen Geraden als parallele Kräfte betrachtet, welche über die Fläche des Drieks stetig vertheilt sind. Der Mittelpunkt aller dieser Kräfte*) liegt dann auf $\frac{2}{3}$ der Höhe des Dreiecks von seiner Spitze entfernt.

4) Verhalten sich die Kräfte wie die Quadrate ihrer Abstände von dem Momentenpunkte, so daß ihre Intensitäten sich durch A, 2^2A, 3^2A, ... n^2A darstellen lassen, dann erhält man mit Beibehaltung der übrigen Bedingungen

$$M = A + 2^2A + 3^2A + \cdots + n^2A = A \cdot \Sigma n^2;$$

$$Mm = aA + 2^2aA + 3^2aA + \cdots + n^2aA = aA \cdot \Sigma n^2.$$

Darin ist, auf dieselbe Weise wie bei der vorigen Aufgabe, $\Sigma n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; $\Sigma n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; und wenn dies substituirt wird, so kömmt

$$M = \tfrac{1}{6}An(n+1)(2n+1);$$

$$Mm = \tfrac{1}{4}Aan^2(n+1)^2.$$

Durch Division dieser Ausdrücke ergiebt sich nunmehr

$$m = \tfrac{3}{2}a \cdot \frac{n(n+1)}{2n+1}.$$

Zusatz. Setzt man in dieser Formel ebenfalls na = l und dividirt dann noch Zähler und Nenner mit n, so kommt:

---

*) Weiterhin der Schwerpunkt des Dreiecks genannt.

$$m = \tfrac{3}{4} l \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Wenn nun die Kräfte, mit Beibehaltung des festgesetzten Verhältnisses zwischen ihren Intensitäten, eben so wie vorhin über die ganze Linie l stetig vertheilt angenommen werden, dann ist ihre Anzahl $n = \infty$, und der obige Ausdruck reducirt sich auf

$$m = \tfrac{3}{4} l.$$

Bei einer Pyramide verhalten sich alle parallelen Durchschnitte wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze. Betrachtet man also diese Durchschnitte als parallele Kräfte mit unendlich kleinen Intervallen, und die Linie l als die Höhe der Pyramide, so liegt der Mittelpunkt aller dieser Kräfte (der Schwerpunkt der Pyramide) auf $\frac{3}{4}$ ihrer Höhe von der Spitze entfernt.

§. 72.

Fernere Aufgaben zur praktischen Anwendung.

1) Ein gewichtloser, fester Stab **AB** (Fig. 39) sei in horizontaler Lage an beiden Enden unterstützt, und in den Punkten **C, D, E** seien die gegebenen Gewichte **P, Q** und **R** aufgehängt. Wenn nun die ganze Länge **AB** = l ist, und außerdem die Abstände **AC** = a, **AD** = b, **AE** = c gegeben sind, so sollen die Pressungen **V** und **W** auf die Unterstützungspunkte bestimmt werden.

Man denke sich an den Endpunkten der Stange die den gesuchten Pressungen gleichen und entgegengesetzten Kräfte **V** und **W** angebracht, so kann man die Unterstützungen wegnehmen, und man hat dann ein System von parallelen Kräften, welches im Gleichgewichte ist. Darauf finden nach §. 70 folgende zwei Bedingungsgleichungen Anwendung:

$$V + W - P - Q - R = 0,$$
$$0 \cdot V + lW - aP - bQ - cR = 0;$$

sobald man nemlich den einen Unterstützungspunkt A als Momentenpunkt annimmt.

Die zweite Gleichung liefert sofort

$$W = \frac{aP + bQ + cR}{l};$$

und wenn man aus der ersten Gleichung V entwickelt, und darin für W diesen Werth einsetzt, so kommt

$$V = \frac{(l-a)P + (l-b)Q + (l-c)R}{l}.$$

Anmerkung. Da für parallele Kräfte in einer Ebene jedesmal nur zwei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts stattfinden, so können mittelst derselben auch nur zwei unbekannte Größen, hier z. B. die beiden Größen V und W, bestimmt werden. Wäre also der feste Stab in dreien oder mehreren Punkten unterstützt, und man sollte die Pressungen auf die Unterstützungen bestimmen, so würde dies eine unbestimmte Aufgabe sein, zu deren Lösung die bisherigen Lehren der Statik nicht ausreichen. Dies ist die berühmte Aufgabe von der Vertheilung des Drucks auf mehr als zwei Unterstützungen, welche die Mathematiker, unter Andern Euler, schon seit vielen Jahren beschäftigt hat, ohne jedoch ihre vollständige Lösung in der Form, wie sie sich hier darbietet, erhalten zu haben. Wir werden bei einer spätern Gelegenheit wieder darauf zurückkommen.

2) Eine gerade Stange AB (Fig. 40) stützt sich mit ihrem unteren Ende A auf eine horizontale Ebene AC, mit welcher sie den Winkel α bildet, und mit ihrem oberen Ende B ist sie gegen die vertikale Wand BC gelehnt. An dieser Stange wirkt in D eine vertikale Kraft, etwa ein Gewicht P, dessen Wirkungen auf die Stützpunkte bestimmt werden sollen.

Man zerlege zuerst die Kraft P in zwei parallele Seitenkräfte P′ und P″, welche durch die Endpunkte der Stange gehen. Dieselben ergeben sich nach §. 58, 2), wenn man AB = a, AD = b, mithin BD = a − b setzt, durch die Proportion:

$$P : P' : P'' = a : a - b : b,$$

woraus sich $P' = \frac{a-b}{a} P$, und $P'' = \frac{b}{a} P$ findet.

Von diesen Kräften kann die eine P' keine andere Wirkung als nur einen senkrechten Druck auf den Punkt A der horizontalen Ebene AC hervorbringen. Die andere P'' zerlegt sich dagegen in B nach dem Gesetz des Parallelogramms der Kräfte in zwei Seitenkräfte Q und R, bezüglich nach der auf BC normalen Richtung BQ und nach der Richtung BA der festen Stange. Es ergiebt sich leicht

$$Q = P'' \cdot \mathrm{Cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} P \cdot \mathrm{Cotg}\,\alpha,$$

und

$$R = P'' \cdot \mathrm{Cosec}\,\alpha = \frac{b}{a} P \cdot \mathrm{Cosec}\,\alpha.$$

Die erste dieser Seitenkräfte giebt den Druck Q, den das obere Ende der Stange gegen die vertikale Wand ausübt. Die zweite pflanzt ihre Wirkung in der schrägen Richtung der festen Stange bis zu deren unterem Ende A fort, und zerlegt sich hier mittelst des Parallelogramms ASRT in die beiden Seitenkräfte

$$S = R \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{b}{a} P\ \mathrm{Cotg}\,\alpha,$$

$$T = R \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{b}{a} P.$$

Die Kraft S stellt den horizontalen Schub dar, den die Stange in A nach der verlängerten Richtung CA ausübt, und dieser Schub ist dem normalen Druck Q des oberen Endes der Stange gegen die Wand BC gleich und entgegengesetzt. Die Kraft T vereinigt dagegen ihre Wirkung mit der von P', und beide geben zusammengenommen den normalen Druck U auf die wagerechte Ebene AC, oder

$$U = P' + T = P,$$

welcher also dem ganzen Gewicht P gleich ist.

Die beiden horizontalen Wirkungen Q und S in den Endpunkten der Stange, welche sich oben als gleich groß

ergeben haben, sind der Cotangente des Neigungswinkels proportional, und nehmen daher mit der Abnahme dieses Winkels bis ins Unendliche zu. Bei einer unveränderlichen Größe des Neigungswinkels wachsen sie dagegen zugleich mit b, d. h. wenn der Aufhängepunkt des Gewichtes P höher hinauf rückt. Stellt man sich demnach unter AB etwa eine Leiter vor, auf welcher bei D ein Mensch vom Gewicht P steht, so nimmt der horizontale Schub dieser Leiter, oder das Bestreben zum Ausgleiten auf dem horizontalen Boden, in demselben Maaße zu, je höher der Mensch emporsteigt.

3) Die vorige Aufgabe werde dahin abgeändert, daß die mit dem Gewicht P belastete Stange AB (Fig. 41) sich mit ihren Enden auf zwei Ebenen AC, BC stütze, die unter den Winkeln β und γ gegen den Horizont geneigt sind. Es wird dabei angenommen, daß die Durchschnittslinie beider Ebenen horizontal, und auf der durch die Stange gelegten Vertikalebene senkrecht sei.

Um diese Aufgabe zu lösen, fange man wieder damit an, das Gewicht P in zwei parallele durch die Endpunkte der Stange gehende Seitenkräfte P′ und P″ zu zerlegen, deren Intensitäten auf dieselbe Weise wie vorhin

$$P' = \frac{a-b}{a} P, \text{ und } P'' = \frac{b}{a} P \text{ sind.}$$

Diese beiden Kräfte zerlege man ferner jede in zwei Seitenkräfte, von welchen die eine auf der zunächst liegenden schiefen Ebene senkrecht steht, die andere aber nach der Richtung der festen Stange wirkt. Sind T und S die Seitenkräfte von P′, so ergiebt sich zur Bestimmung derselben aus dem Parallelogramm ATP′S die Proportion

$$P' : T : S = \operatorname{Sin} ATP' : \operatorname{Sin} AP'T : \operatorname{Sin} P'AT.$$

Bezeichnet nun α den Neigungswinkel der Stange AB gegen die Ebene AC, so ist $\angle TAS = 90 + \alpha$, also $\angle ATP' = 90 - \alpha$. Auch ist, wie leicht erhellet, $\angle P'AT = \beta$; also

$\angle AP'T = \angle P'AS = 90 + \alpha - \beta$. Mit Rückſicht hierauf, und bei Anwendung der bekannten Formel $\mathrm{Sin}(90 \pm \varphi) = \mathrm{Cos}\varphi$, verwandelt ſich die vorige Proportion in folgende:

$$P' : T : S = \mathrm{Cos}\alpha : \mathrm{Cos}(\alpha - \beta) : \mathrm{Sin}\beta,$$

woraus man demnächſt findet:

$$T = \frac{P' \cdot \mathrm{Cos}(\alpha - \beta)}{\mathrm{Cos}\alpha} = \frac{a-b}{a} P \cdot \frac{\mathrm{Cos}(\alpha - \beta)}{\mathrm{Cos}\alpha};$$

$$S = \frac{P' \cdot \mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha} = \frac{a-b}{a} P \cdot \frac{\mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha}.$$

Auf demſelben Wege ergeben ſich für die Seitenkräfte Q und R der andern Kraft P'', mittelſt des Parallelogrammes BQP''R und der darin angedeuteten Winkelbezeichnung, die Ausdrücke

$$Q = P'' \cdot \frac{\mathrm{Cos}(\gamma - \delta)}{\mathrm{Cos}\delta} = \frac{b}{a} P \frac{\mathrm{Cos}(\gamma - \delta)}{\mathrm{Cos}\delta};$$

$$R = P'' \cdot \frac{\mathrm{Sin}\gamma}{\mathrm{Cos}\delta} = \frac{b}{a} P \frac{\mathrm{Sin}\gamma}{\mathrm{Cos}\delta}.$$

Nach der Figur iſt aber $\beta + \gamma$ der Außenwinkel des Dreiecks ABC, daher $\beta + \gamma = \alpha + \delta$; mithin $\gamma - \delta = \alpha - \beta$ und $\delta = \beta + \gamma - \alpha$. Mit Rückſicht hierauf verwandeln ſich die vorigen Ausdrücke in folgende:

(I)
$$Q = \frac{P}{a} \cdot \frac{b\,\mathrm{Cos}(\alpha - \beta)}{\mathrm{Cos}(\beta + \gamma - \alpha)};$$

$$R = \frac{P}{a} \cdot \frac{b\,\mathrm{Sin}\gamma}{\mathrm{Cos}(\beta + \gamma - \alpha)}.$$

Die beiden in der Richtung der Stange entgegengeſetzt wirkenden Kräfte R und S ſind einer Kraft gleich zu achten, die der Differenz beider gleich und nach der Richtung der größeren von ihnen wirkſam iſt. Wird nun $R > S$ vorausgeſetzt, ſo findet im Punkte A nach der Verlängerung von BA der Druck $U = R - S$ gegen die ſchiefe Ebene AC ſtatt. Derſelbe geſtaltet ſich, wenn man für R und S die obigen Werthe einſetzt, wie folgt:

$$U = \frac{P}{a}\left[b\left(\frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Cos}(\beta+\gamma-\alpha)} + \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}\right) - a\,\frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}\right].$$

Dieser schräge Druck zerlegt sich wieder nach der Richtung der Ebene AC und normal darauf in die Seitenkräfte

$$V = U\operatorname{Cos}\alpha = \frac{P}{a}\left[b\left(\frac{\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Cos}(\beta+\gamma-\alpha)} + \operatorname{Sin}\beta\right) - a\operatorname{Sin}\beta\right];$$

$$W = U\operatorname{Sin}\alpha = \frac{P}{a}\operatorname{Sin}\alpha\left[b\left(\frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Cos}(\beta+\gamma-\alpha)} + \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}\right) - a\,\frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}\right].$$

Die erste von diesen Formeln läßt sich leicht durch Vereinigung der trigonometrischen Ausdrücke, welche b zum gemeinschaftlichen Factor haben, auf folgende reduciren:

$$\text{(II)}\quad V = \frac{P}{a}\left(b\cdot\frac{\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)}{\operatorname{Cos}(\beta+\gamma-\alpha)} - a\operatorname{Sin}\beta\right);$$

und diese giebt den Schub der Stange nach der Richtung der geneigten Ebene AC, entweder aufwärts oder abwärts, je nachdem die Formel einen positiven oder negativen Werth liefert. — Die zweite der vorigen Formeln muß dagegen mit der von T zusammen genommen werden, um den normalen Druck N zu geben, den das untere Ende der Stange auf jene Ebene ausübt. Dadurch erhält man

$$N = T + W = \frac{P}{a}\left[b\left(\frac{\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Cos}(\beta+\gamma-\alpha)} - \operatorname{Cos}\beta\right) + a\operatorname{Cos}\beta\right];$$

oder, wenn die beiden mit b multiplicirten Ausdrücke in der Klammer zusammengefaßt werden,

$$\text{(III)}\quad N = \frac{P}{a}\left(a\operatorname{Cos}\beta - b\,\frac{\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)\operatorname{Cos}(\beta+\gamma)}{\operatorname{Cos}(\beta+\gamma-\alpha)}\right).$$

4) Bei der vorigen Aufgabe mußte am andern Ende A der mit dem Gewicht P beschwerten Stange, dem Schube längs der Ebene AC entgegengesetzt, eine Kraft V angebracht werden, um die Stange im Gleichgewicht zu erhalten. Soll aber die Lage derselben so bestimmt werden, daß sie auf den beiden schiefen Ebenen für sich selbst im Gleichgewicht bleibt, so muß man $V = 0$ setzen, und aus der so

erhaltenen Gleichung den Winkel α bestimmen. Auf diesem Wege ergiebt sich zunächst die Gleichung:

$$b\,\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)\cdot\mathrm{Sin}(\beta+\gamma) = a\,\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Cos}(\beta+\gamma-\alpha);$$

woraus man durch eine sehr einfache Rechnung, deren Einzelheiten hier füglich übergangen werden können, das Resultat findet:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b\cdot\mathrm{Cotg}\beta - a\cdot\mathrm{Cotg}(\beta+\gamma)}{a-b}.$$

Man kann aber auch die Frage aufstellen, in welchem Punkte der Stange das Gewicht P aufgehängt werden muß, damit dieselbe in einer bestimmten, durch den Winkel α gegebenen Lage im Gleichgewichte bleibt.

Zur Beantwortung dieser Frage entwickle man aus der obigen, der Bedingung $V = 0$ entsprechenden Gleichung den Abstand b, und man erhält sofort

$$b = a\cdot\frac{\mathrm{Sin}\beta\cdot\mathrm{Cos}(\beta+\gamma-\alpha)}{\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)\cdot\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)}.$$

II. Von parallelen Kräften in verschiedenen Ebenen.

§. 73.

Bestimmung der Mittelkraft von beliebig vielen parallelen Kräften im Raume. Man denke sich ein festes System von beliebig vielen materiellen Punkten A', B', C'... im Raume, auf welche die Kräfte A, B, C... ꝛc. nach den parallelen Richtungen A'A, B'B, C'C... ꝛc. (Fig. 42) wirken. Es werde zuerst vorausgesetzt, daß die Wirkung aller Kräfte in demselben Sinne erfolge, und unter dieser Voraussetzung soll die Mittelkraft bestimmt werden.

Zu dem Ende denken wir uns die Lage der materiellen Punkte auf drei Coordinatenebenen bezogen, welche sich paarweise in den Linien OX, OY und OZ unter rechten Winkeln schneiden. Diese Durchschnittslinien selbst werden alsdann

die Coordinatenachsen sein. Der in der 42sten Figur angedeuteten Bezeichnung gemäß sollen a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''; u. s. w. die Coordinaten der Punkte A', B', C',... ꝛc. vorstellen, und wenn wir noch die Bedingung hinzufügen, daß alle materiellen Punkte des Systems innerhalb der unbegränzten körperlichen Ecke XYZO liegen, so werden die vorigen Coordinaten alle einerlei Vorzeichen haben. Diese letzte Bedingung ist aber nicht nothwendig, sondern dient nur zur größeren Bequemlichkeit.

Wir nehmen nun zuerst von A und B die Mittelkraft P, verbinden diese mit der dritten Kraft C zu einer neuen Mittelkraft Q; letztere in derselben Art mit der vierten Kraft D verbunden giebt wieder eine neue Mittelkraft; und auf diesem Wege kann man weiter fortfahren, bis zuletzt alle gegebenen Kräfte zu einer einzigen Kraft zusammengesetzt sind, welche dann die gesuchte Mittelkraft des ganzen Systems sein wird.

Die Intensität P der Mittelkraft von A und B ist ihrer Summe gleich, und ihre Richtung ist den beiden Seitenkräften parallel. Der Angriffspunkt P' liegt auf der geraden Linie A'B', welche die Angriffspunkte der parallelen Kräfte A und B verbindet, und p, p', p'' seien die Coordinaten dieses Punktes. Nach §. 59 hat man zur Bestimmung des Punktes P' die Proportion:

$$P : B = A'B' : A'P'.$$

Ist der fragliche Punkt dieser Bedingung gemäß bestimmt, so bleibt seine Lage auf der Linie A'B' stets dieselbe, wie auch die Richtungen der Seitenkräfte A und B gegen diese Linie beschaffen sein mögen; wofern sie nur mit einander parallel bleiben.

Aus der obigen Proportion folgt die Gleichung

$$(1) \qquad P \cdot A'P' = B \cdot A'B'.$$

Nun sei A''B'' die Projektion der Linie A'B' und P'' die

des Punktes P' auf die Ebene XOY. Zieht man A'B, parallel mit A"B", ſo iſt ∠B'A'B, = φ der Neigungswinkel jener Linie gegen dieſe Ebene, mithin auch gegen ihre Projektion auf letzterer. Man multiplicire die vorige Gleichung zuerſt mit Sin φ, dann mit Cos φ, ſo entſteht nach einander:

$$P \cdot A'P' \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi = B \cdot A'B' \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi,$$

und $$P \cdot A'P' \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi = B \cdot A'B' \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi.$$

In der erſten von dieſen Gleichungen iſt aber

$A'P' \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi = P'P_{,} = p'' - a''$; $A'B' \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi = B'B_{,} = b'' - a''$,

und mit Rückſicht hierauf verwandelt ſie ſich in folgende:

$$P(p'' - a'') = B(b'' - a'').$$

Daraus folgt $Pp'' = (P - B)a'' + Bb''$,

oder, weil nach dem Vorhergehenden $P - B = A$ iſt,

(2) $$Pp'' = Aa'' + Bb''.$$

In der zweiten der obigen Gleichungen iſt nach der Figur

$A'P' \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi = A'P_{,} = A''P''$; $A'B' \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi = A'B_{,} = A''B''$,

und demgemäß geſtaltet ſie ſich wie folgt:

$$P \cdot A''P'' = B \cdot A''B''.$$

Man ziehe $A''B_{,,}$ parallel mit OX, ſetze den Winkel $B''A''B_{,,}$ gleich ψ, und multiplicire die letzte Gleichung nach einander mit Sin ψ und Cos ψ. Dies giebt

$$P \cdot A''P'' \cdot \mathrm{Sin}\,\psi = B \cdot A''B'' \cdot \mathrm{Sin}\,\psi,$$

und $$P \cdot A''P'' \cdot \mathrm{Cos}\,\psi = B \cdot A''B'' \cdot \mathrm{Cos}\,\psi.$$

Darin iſt nun, wie leicht aus der Figur zu erſehen,

$A''P'' \cdot \mathrm{Sin}\,\psi = p' - a'$; $A''B'' \cdot \mathrm{Sin}\,\psi = b' - a'$;

$A''P'' \cdot \mathrm{Cos}\,\psi = p - a$; $A''B'' \cdot \mathrm{Cos}\,\psi = b - a$;

und wenn dieſe Werthe ſubſtituirt werden, ſo ergiebt ſich auf dieſelbe Weiſe wie vorhin

(3) $$Pp' = Aa' + Bb';$$

(4) $$Pp = Aa + Bb.$$

Die Gleichungen (2), (3) und (4) beſtimmen nun mit Zuziehung der Formel $P = A + B$ die Coordinaten p, p' und

p'' des Mittelpunktes der beiden Kräfte **A** und **B**, deren Wirkung auf das Syſtem durch die ihnen gleichgeltende Kraft **P** vollſtändig erſetzt wird.

Verbindet man nun ferner die ſo eben gefundene partielle Mittelkraft mit der dritten Kraft **C**, ſo iſt die Mittelkraft **Q** von dieſen beiden gleich ihrer Summe, und in Abſicht der Richtung iſt ſie mit ihnen parallel. Die Coordinaten des Angriffspunktes Q', welcher letztere auf der Verbindungslinie der Punkte P' und C' liegt, ſollen mit q, q', q'' bezeichnet werden; alsdann hat man, in derſelben Art wie vorhin, die folgenden Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{cases} Q = P + C = A + B + C, \\ Qq = Pp + Cc = Aa + Bb + Cc, \\ Qq' = Pp' + Cc' = Aa' + Bb' + Cc', \\ Qq'' = Pp'' + Cc'' = Aa'' + Bb'' + Cc'', \end{cases}$$

wofern nemlich für die Ausdrücke P, Pp, Pp', Pp'' die entſprechenden Werthe eingeſetzt werden. Die Kraft **Q**, als Mittelkraft von **P** und **C**, iſt nun zugleich die Mittelkraft der drei Kräfte **A**, **B**, **C**; und die Lage ihres, durch die Coordinaten q, q', q'' beſtimmten Angriffspunktes Q' iſt von den Richtungen der parallelen Seitenkräfte ganz unabhängig.

Setzt man nun dieſe Operation ſo lange fort, bis alle parallelen Seitenkräfte zu einer einzigen Geſammt-Mittelkraft **M** vereinigt ſind, und bezeichnet man die Coordinaten ihres Angriffspunktes, rückſichtlich der drei Coordinatenebenen, mit m, m', m'', ſo findet man zuletzt:

$$(6)\quad \begin{cases} M = A + B + C + D + \cdots \text{ ꝛc.} = \Sigma A; \\ Mm = Aa + Bb + Cc + Dd + \cdots \text{ ꝛc.} = \Sigma Aa; \\ Mm' = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \cdots \text{ ꝛc.} = \Sigma Aa'; \\ Mm'' = Aa'' + Bb'' + Cc'' + Dd'' + \cdots \text{ ꝛc.} = \Sigma Aa''. \end{cases}$$

Hieraus ergeben ſich, indem man die drei letzten Gleichungen nach einander durch die erſte dividirt, die Coordinaten des Angriffspunktes der Mittelkraft wie folgt:

$$(7) \qquad m = \frac{\Sigma Aa}{\Sigma A}; \quad m' = \frac{\Sigma Aa'}{\Sigma A}; \quad m'' = \frac{\Sigma Aa''}{\Sigma A}.$$

Der durch dieſe Coordinaten beſtimmte Punkt iſt rückſichtlich ſeiner Lage im Syſtem, wie aus den vorigen Betrachtungen hervorgeht, von der Lage der parallelen Kräfte gegen daſſelbe ganz unabhängig. Man nennt ihn deshalb aus gleichen Gründen, wie bei den parallelen Kräften in einer Ebene (vergl. §. 65) den Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Sind alle Kräfte einander gleich, iſt z. B. jede von ihnen = A, und ihre Anzahl = n, ſo gehen die obigen Ausdrücke (7) in folgende über:

$$(8) \quad m = \frac{a+b+c+\cdots}{n}; \quad m' = \frac{a'+b'+c'+\cdots}{n}; \quad m'' = \frac{a''+b''+c''+\cdots}{n}.$$

Der Abſtand des fraglichen Mittelpunktes von jeder der drei Coordinatenebenen iſt alſo in dieſem beſonderen Falle gleich dem arithmetiſchen Mittel der Abſtände aller einzelnen Punkte des Syſtems.

§. 74.

Wenn es nicht darauf ankommt, den Mittelpunkt der parallelen Kräfte ſelbſt zu beſtimmen, ſondern wenn nur ein Punkt nachgewieſen werden ſoll, durch den die Richtungslinie der Mittelkraft gehen muß, ſo ſind zu dieſer Beſtimmung, ſtatt der im vorigen Paragraphen gefundenen vier Gleichungen, deren drei hinreichend.

Da nemlich die Lage der drei Coordinatenebenen XOY, XOZ und YOZ (Fig. 42) gegen das Syſtem von materiellen Punkten beliebig iſt, ſo kann man ſie auch ſo annehmen, daß eine von ihnen auf den Richtungen der Kräfte ſenkrecht ſteht; oder, was daſſelbe iſt, man kann die Kräfte mit Beibehaltung ihres Parallelismus ſo um ihre Angriffspunkte drehen, daß ſie zuletzt auf einer jener Ebenen ſenkrecht ſtehen. Nimmt man nun hiefür die Ebene XOY (Fig. 43) an, ſo ſind die beiden andern, und alſo auch ihre

Durchschnittslinie **OZ**, mit den Richtungslinien der Kräfte parallel. Alle Punkte in diesen Richtungslinien haben daher einerlei **a**, **b**, **c**...&c. so wie auch einerlei **a'**, **b'**, **c'**...&c., welche Größen zugleich die Coordinaten der Punkte **A'**, **B'**, **C'**...&c. sein werden, in welchen die Ebene **XOY** von den Richtungen der parallelen Kräfte getroffen wird, und zwar in Bezug auf die Achsen **OX** und **OY**. Da es nun bloß auf die Bestimmung des Punktes ankommt, in welchem die Mittelkraft die genannte Ebene senkrecht trifft, und zu welchem die Coordinaten **m** und **m'** gehören, so kann man die vierte Gleichung des vorigen Paragraphen außer Acht lassen, und man hat dann bloß die drei Gleichungen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \cdots \&c. = \Sigma \mathbf{A};$$
$$\mathbf{Mm} = \mathbf{Aa} + \mathbf{Bb} + \mathbf{Cc} + \cdots \&c. = \Sigma \mathbf{Aa};$$
$$\mathbf{Mm'} = \mathbf{Aa'} + \mathbf{Bb'} + \mathbf{Cc'} + \cdots \&c. = \Sigma \mathbf{Aa'}.$$

Hieraus folgt $\mathbf{m} = \frac{\Sigma \mathbf{Aa}}{\Sigma \mathbf{A}}$; $\mathbf{m'} = \frac{\Sigma \mathbf{Aa'}}{\Sigma \mathbf{A}}$; und der durch diese Ausdrücke bestimmte Punkt ist demnächst zu betrachten als die Projektion des Mittelpunktes der Kräfte auf die Ebene **XOY**, auf welcher dieselben normal sind.

Man denke sich eine der beiden Achsen, z. B. **OY**, als fest, und das System von Punkten so mit derselben verbunden, daß es sich nur um diese Achse drehen kann. Die Linien **a**, **b**, **c**...&c., welche zugleich auf der Achse und auf den Richtungen der Kräfte senkrecht stehen, sind dann offenbar als die Hebelsarme, mithin die Produkte **Aa**, **Bb**, **Cc**...&c. als die statischen Momente der letzteren zu betrachten. Eben so stellen die Produkte **Aa'**, **Bb'**, **Cc'**...&c. die Momente derselben Kräfte in Bezug auf die andere Achse **OX** vor, so wie **Mm** und **Mm'** die statischen Momente der Mittelkraft aller Kräfte in Bezug auf beide Achsen sind. Mit Rücksicht hierauf lassen sich also die drei obigen Gleichungen folgendermaßen in Worten aussprechen:

Von beliebig vielen parallelen Kräften, die in einerlei Sinn auf ein festes System von Punkten im Raume wirken, ist

1) die Mittelkraft gleich der Summe aller Kräfte und mit denselben parallel;

2) das Moment der Mittelkraft in Bezug auf zwei gegen einander normale Achsen, welche in einer die Richtungen der parallelen Kräfte rechtwinklig schneidenden Ebene beliebig angenommen werden können, gleich der Summe der Momente aller Seitenkräfte in Bezug auf dieselben Achsen.

Die statische Bedeutung dieser beiden Gesetze besteht aber darin, daß die Mittelkraft sowohl in Bezug auf fortgehende, als auch in Bezug auf drehende Bewegung des Systems dasselbe Bestreben hat, wie alle parallelen Kräfte zusammengenommen.

§. 75.

Bestimmung der Mittelkraft, wenn die parallelen Kräfte nicht in demselben Sinne wirken. In diesem Falle reduciren sich die Kräfte, wie in §. 66, auf zwei partielle Mittelkräfte V und W, die in parallelen Linien nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und deren Mittelkraft demnächst, sofern sie überhaupt einer solchen fähig sind, die gesuchte Mittelkraft des ganzen Systems ist.

Es seien V′ und W′ (Fig. 44) die Angriffspunkte jener beiden Kräfte und v, v′, v″; w, w′, w″ die Coordinaten derselben. M sei die Intensität ihrer Mittelkraft, und m, m′, m″ seien die Coordinaten ihres Angriffspunktes M′, welcher auf der Verlängerung von V′W′ auf der Seite der größeren Kraft V liegt. Nimmt man ihn zum Momentenpunkt, so hat man nach §. 62 die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad M = V - W;$$

$$(2) \qquad 0 = V \cdot M'V' - W \cdot M'W';$$

da nemlich das Moment von M gleich Null ist. Es sei φ

der Winkel, den die Linie $M'W'$ mit ihrer Projektion $M''W''$ auf die Ebene XOY bildet, und ψ sei der Neigungswinkel der letzteren gegen die Achse OX. Multiplicirt man die Gleichung (2) zuerst mit $\mathrm{Sin}\varphi$ und dann mit $\mathrm{Cos}\varphi$, so erhält man nach einander

$$0 = V\cdot M'V'\cdot \mathrm{Sin}\varphi - W\cdot M'W'\cdot \mathrm{Sin}\varphi;$$

also $$V(v''-m'') = W(w''-m'');$$

oder $$(V-W)m'' = Vv''-Ww''.$$

Nach (1) ist aber $V-W = M$, und wenn dies eingesetzt wird, entsteht:

(3) $$Mm'' = Vv''-Ww''.$$

Ferner ist $$0 = V\cdot M'V'\cdot \mathrm{Cos}\varphi - W\cdot M'W'\cdot \mathrm{Cos}\psi$$
$$= V\cdot M''V'' - W\cdot M''W'';$$

und wenn diese letzte Gleichung nach einander mit $\mathrm{Sin}\psi$ und $\mathrm{Cos}\psi$ multiplicirt wird, so ergiebt sich in gleicher Weise wie vorhin:

(4) $$\begin{cases} Mm' = Vv' - Ww', \\ Mm = Vv - Ww. \end{cases}$$

In den vorhergehenden Gleichungen ist nun V die Mittelkraft aller parallelen Kräfte, welche in dem einen, und W die aller Kräfte, welche in dem entgegengesetzten Sinne wirken. Bezeichnet man erstere mit $A, B, C\ldots$ ꝛc., letztere mit $P, Q, R\ldots$ ꝛc., und die Coordinaten ihrer Angriffspunkte durch die entsprechenden Buchstaben des kleinen Alphabets, so hat man nach §. 73

$$V = \Sigma A;\quad Vv = \Sigma Aa;\quad Vv' = \Sigma Aa';\quad Vv'' = \Sigma Aa'';$$
$$W = \Sigma P;\quad Ww = \Sigma Pp;\quad Ww' = \Sigma Pp';\quad Ww'' = \Sigma Pp''.$$

Diese Ausdrücke in (1), (3) und (4) eingesetzt, liefern demnächst folgende vier Gleichungen zwischen den parallelen Kräften und deren Mittelkraft:

(5) $$\begin{cases} M = \Sigma A - \Sigma P, \\ Mm = \Sigma Aa - \Sigma Pp, \\ Mm' = \Sigma Aa' - \Sigma Pp', \\ Mm'' = \Sigma Aa'' - \Sigma Pp''. \end{cases}$$

Dieselben sind, wie aus der ganzen Herleitung unmittelbar hervorgeht, von der Lage der parallelen Kräfte gegen die Coordinatenebenen durchaus unabhängig; woraus folgt, daß auch der durch die Coordinaten m, m', m'' bestimmte Punkt für alle Lagen der Kräfte stets derselbe bleibt. Demnach giebt es also für die parallelen Kräfte, auch wenn sie nicht in demselben Sinne wirken, vorausgesetzt, daß sie sich nicht auf ein Kräftepaar reduciren lassen, einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, dessen Coordinaten man findet, indem man die drei letzten der obigen Gleichungen durch die erste dividirt.

§. 76.

Werden die drei Coordinatenebenen so angenommen, daß eine von ihnen, z. B. die Ebene **XOY**, auf den Richtungen der parallelen Kräfte senkrecht steht, während die beiden anderen mit denselben parallel sind, dann steht auch dieselbe Ebene **XOY** auf den partiellen Mittelkräften **V** und **W** senkrecht. Sofern es nun bloß darauf ankommt, den Punkt **M'** zu bestimmen, in welchem die Gesammtmittelkraft **M** jene Ebene schneidet, so kann man die letzte von den Gleichungen (5) des vorigen Paragraphen außer Acht lassen. Die drei anderen, nemlich

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{M} = \Sigma\mathbf{A} - \Sigma\mathbf{P}, \\ \mathbf{Mm} = \Sigma\mathbf{Aa} - \Sigma\mathbf{Pp}, \\ \mathbf{Mm'} = \Sigma\mathbf{Aa'} - \Sigma\mathbf{Pp'}, \end{cases}$$

dienen dann zur Bestimmung der Mittelkraft und der Stellung ihrer Richtungslinie gegen die parallelen Seitenkräfte. Zugleich drücken diese Gleichungen dasselbe Bestreben zur fortgehenden und drehenden Bewegung aus, welches in §. 74 näher angegeben worden ist.

Ergiebt sich hiebei $\mathbf{M} = 0$, ohne daß auch die Ausdrücke von **Mm** und **Mm'** Null wären, so hat man ein Kräftepaar $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, welches in den Punkten **V'** und **W'**

(Fig. 45) auf der Ebene XOY senkrecht stehend gedacht werde. Es sei U die Intensität, und $u = V'W'$ das Intervall dieses Paares, während v, v' und w, w' die Coordinaten der Punkte V' und W' sein mögen. Dann hat man

$$u = \sqrt{(v-w)^2+(v'-w')^2}, \tag{2}$$

und der Ausdruck für das Moment des Paares ist

$$Uu = U\sqrt{(v-w)^2+(v'-w')^2}. \tag{3}$$

Nach dem vorigen Paragraphen ergiebt sich aber

$$v = \frac{\Sigma Aa}{V}, \quad v' = \frac{\Sigma Aa'}{V};$$

$$w = \frac{\Sigma Pp}{W}, \quad w' = \frac{\Sigma Pp'}{W}.$$

Substituirt man diese Werthe, und berücksichtigt zugleich, daß $V = W = U$ ist, so erhält man

$$u = \frac{1}{U}\sqrt{(\Sigma Aa-\Sigma Pp)^2+(\Sigma Aa'-\Sigma Pp')^2}; \tag{4}$$

$$Uu = \sqrt{(\Sigma Aa-\Sigma Pp)^2+(\Sigma Aa'-\Sigma Pp')^2}. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck stellt die Wirkung des Paares in Bezug auf Drehung um eine Achse dar, welche auf der Ebene des Paares senkrecht steht. Denkt man sich also in der Ebene XOY eine beliebige auf V'W' normale Linie gezogen, so ist diese mit jener Achse parallel, und kann selbst als solche angenommen werden.

Findet sich bei der Anwendung der Gleichungen (1) auf einen besondern Fall, daß außer $M = 0$ auch noch einer der Ausdrücke von Mm oder Mm' Null wird, so ist das ebenfalls ein Zeichen von dem Dasein eines Kräftepaares, welches in dem einen Falle mit OY, in dem andern aber mit OX parallel ist, wie sich leicht aus dem Obigen ergiebt. Als Drehachse kann dann bezüglich OX oder OY angenommen werden.

§. 77.

Bedingungen des Gleichgewichts. Setzt man das in §. 75 betrachtete System von Kräften als im Gleichgewichte voraus, so müssen die partiellen Mittelkräfte V, W, auf welche dasselbe zurückgeführt werden kann, der Intensität nach einander gleich, der Richtung nach aber gerade entgegengesetzt sein. Beide Bedingungen werden aber durch ein Kräftepaar $V = W = U$ erfüllt, dessen Intervall $u = 0$ ist. In Folge der ersten Bedingung hat man $V - W = 0$, oder

$$\Sigma A - \Sigma P = 0. \tag{1}$$

Die zweite Bedingung giebt nach Gleichung (4) des vor. §.

$$(\Sigma Aa - \Sigma Pp)^2 + (\Sigma Aa' - \Sigma Pp')^2 = 0;$$

und damit dieser Gleichung Genüge geschehe, muß sein

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma Aa - \Sigma Pp = 0; \\ \Sigma Aa' - \Sigma Pp' = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Wenn also ein System von parallelen Kräften im Raume sich im Gleichgewichte befindet, dann ist sowohl die algebraische Summe aller Kräfte, als auch die algebraische Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf zwei gegen einander und gegen die Kräfte rechtwinklig geneigte Achsen jedesmal gleich Null.

Finden umgekehrt die obigen drei Gleichungen Statt, dann sind auch die Kräfte jedesmal mit einander im Gleichgewichte. Dies läßt sich leicht auf dieselbe Weise wie in §. 70, 2) darthun, was dem Leser überlassen bleibe.

§. 78.

Aufgaben zur Anwendung vorstehender Gesetze.

1) Es sind drei zu einem festen Systeme mit einander verbundene Punkte A', B', C' gegeben, an welchen eben so viele gleiche Kräfte A, B, C nach parallelen Richtungen wirken. Man soll den Mittelpunkt dieser Kräfte bestimmen.

Will man den fraglichen Mittelpunkt durch Rechnung

finden, so kann dies am leichtesten durch Bestimmung seiner Abstände von drei auf einander normalen Coordinatenebenen geschehen. Nach §. 73 (8) ergiebt sich nemlich der Abstand jenes Punktes von jeder dieser Ebenen gleich dem dritten Theil von der Summe der Abstände der gegebenen Punkte von derselben Ebene.

Durch Construction findet man den fraglichen Punkt, wenn man zuerst von zwei Kräften **A**, **B** die Mittelkraft **P** nimmt, und diese dann mit der dritten Kraft **C** zu einer neuen Mittelkraft **Q** verbindet, deren Angriffspunkt sodann der gesuchte Mittelpunkt ist. Man bezeichne die Intensität einer jeden der gleichen Kräfte mit **K**, und nehme an, daß sie alle drei in demselben Sinne wirken. Die Mittelkraft der beiden Kräfte **A** und **B** ist nach §. 57 gleich ihrer Summe, also $P = 2K$, und deren Angriffspunkt **P'** liegt auf der Mitte von **A'B'** (Fig. 46). Verbindet man diesen Punkt mit **C'** durch die Gerade **P'C'**, und nimmt darauf den Punkt **Q'** so, daß sich verhält

$$P'Q' : C'Q' = C : P = 1 : 2,$$

so ist **Q** der Mittelpunkt der beiden Kräfte **P**, **C**, mithin auch der von **A**, **B** und **C**, deren Mittelkraft $Q = A + B + C = 3K$ ist. Der Punkt **Q** liegt demnach innerhalb des Dreieckes **A'B'C'** auf einem Drittel der Linie **P'C'**, welche die Mitte einer Seite mit der gegenüber liegenden Spitze verbindet.

Wirken **A** und **B** in demselben, **C** aber im entgegengesetzten Sinne, und hat man von den beiden ersten Kräften die Mittelkraft $P = 2K$ gefunden, so muß man auf der Verlängerung von **C'P'** das Stück $P'q' = P'C'$ nehmen, um in **q'** den gesuchten Mittelpunkt aller drei Kräfte zu erhalten. Dieser Punkt liegt also jetzt außerhalb des Dreiecks **A'B'C'**, und die darin wirkende Mittelkraft ist $q = P - C = K$.

2) Es soll nun dieselbe Aufgabe für vier gleiche Kräfte **A**, **B**, **C** und **D** gelöst werden, deren jede die Intensität

= K hat. Die der Lage nach gegebenen Angriffspunkte A', B', C' und D' (Fig. 47) bilden die Eckpunkte einer dreikantigen Pyramide von unveränderlicher Form.

Man nehme an, daß alle vier Kräfte in demselben Sinne wirken, dann ist der Abstand ihres Mittelpunktes von irgend einer Ebene gleich dem vierten Theil von der Summe der Abstände aller vier Punkte von derselben Ebene.

Um aber den fraglichen Mittelpunkt durch Construction zu finden, setze man erst drei der gegebenen Kräfte etwa A, B und C, zu einer gleichgeltenden Mittelkraft zusammen. Die Intensität Q derselben ergiebt sich gleich A + B + C, also Q = 3K, und ihren Angriffspunkt Q' erhält man nach der vorigen Aufgabe, wenn man im Dreieck A'B'C' die Mitte einer Seite B'C' mit der gegenüberliegenden Spitze A' durch die Linie P'A' verbindet, und darauf $P'Q' = \frac{1}{3}P'A'$ nimmt. Es sei nun R die Mittelkraft von Q und D, so ist R = Q + D = 4K. Den Angriffspunkt R' findet man auf der Verbindungslinie Q'D' mittelst der Proportion

$$Q'P' : Q'D' = D : R = 1 : 4.$$

Der Punkt R' ist nunmehr der gesuchte Mittelpunkt aller vier Kräfte, und er wird also gefunden, wenn man $Q'R' = \frac{1}{4}Q'D'$ macht.

Auch ergiebt sich leicht, daß der fragliche Punkt in der Mitte der Linie NO liegt, welche die Mitten zweier gegenüberstehender Kanten A'B', C'D' der dreikantigen Pyramide verbindet. Denn es ist N der Mittelpunkt der beiden gleichen Kräfte A, B; und O ist eben so der Mittelpunkt von C und D. Demnach sind N und O die Angriffspunkte zweier gleicher Kräfte = 2K, und der Mittelpunkt derselben liegt also in der Mitte R' der Verbindungslinie NO.

Wenn eine der vier Kräfte, z. B. die Kraft D, im entgegengesetzten Sinne der übrigen wirkt, dann liegt der Mittelpunkt aller Kräfte außerhalb der Pyramide auf der Ver-

längerung von D'Q'. Wirken aber zwei Kräfte C und D in Bezug auf die beiden andern A und B entgegengesetzt, so erhält man ein Kräftepaar mit den Angriffspunkten N, O; und in diesem Falle ist also kein Mittelpunkt vorhanden.

3) Eine gewichtlose feste Ebene ist in wagerechter Lage an drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C (Fig. 48) unterstützt, und in einem vierten Punkte D, der innerhalb des von jenen gebildeten Dreiecks liegt, durch ein aufgehängtes Gewicht P belastet. Man soll die Pressungen auf die Unterstützungspunkte bestimmen.

Denkt man sich anstatt der Unterstützungen die den Pressungen gleichen und entgegengesetzten Kräfte U, V, W angebracht, so hat man ein System von vier parallelen Kräften, welches sich im Gleichgewicht befindet. Dafür ergeben sich nach §. 77 drei Bedingungsgleichungen, aus welchen also die drei unbekannten Pressungen gefunden werden können. In Folge dieser Gleichungen hat man zuvörderst

$$U + V + W = P;$$

und außerdem muß noch für jede in der festen Ebene ABC anzunehmende Momentenachse die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte gleich Null sein. Nimmt man die Linie BC als Achse, dann sind die Momente der beiden Kräfte V und W in Bezug auf diese Achse einzeln gleich Null. Die aus den Punkten A und D auf BC gefällten Perpendikel AE, DF stellen die Hebelsarme der beiden andern Kräfte U und P dar, und da letztere im entgegengesetzten Sinne auf Drehung um die Achse BC wirken, so hat man

$$U \cdot AE = P \cdot DF,$$

oder

$$U : P = DF : AE.$$

Man ziehe die Linien AD, BD und CD, so verhält sich

$$DF : AE = \Delta BDC : \Delta BAC;$$

und die Verbindung dieser Proportion mit der vorigen giebt

$$U : P = \Delta BDC : \Delta BAC.$$

Auf dieselbe Weise findet man auch

$$V : P = \Delta ADC : \Delta ABC,$$

und $$W : P = \Delta ADB : \Delta ACB;$$

also, wenn alle drei Proportionen zusammengefaßt werden,

$$U : V : W : P = BDC : ADC : ADB : ABC.$$

Jede von den vier parallelen Kräften ist daher dem Inhalte desjenigen Dreiecks proportional, welches von den Angriffspunkten der drei andern Kräfte gebildet wird.

Wenn der Punkt D im Durchschnitt der drei Linien liegt, welche die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC mit den gegenüber liegenden Spitzen desselben verbinden, dann haben die Dreiecke ADB, ADC und BDC gleiche Inhalte, und es ergiebt sich

$$U = V = W = \tfrac{1}{3}P.$$

Anmerkung. Für parallele Kräfte in verschiedenen Ebenen gelten drei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, und deshalb können auch bei den darauf bezüglichen Aufgaben nicht mehr als drei unbekannte Größen bestimmt werden. Wenn also bei der obigen Aufgabe die Pressungen der festen Ebene auf vier oder mehr Unterstützungen bestimmt werden sollten, so würde diese Aufgabe nicht zu lösen sein. Man vergleiche hiemit die Anmerkung zu 1) in §. 72.

Drittes Kapitel.

Von Kräften, die nach beliebigen Richtungen auf ein System von materiellen Punkten wirken.

I. Nichtparallele Kräfte in einer Ebene.

§. 79.

Bestimmmung der Mittelkraft. Es seien **A, B, C,...** ꝛc. die Intensitäten beliebig vieler Kräfte, deren Richtungslinien in einer Ebene liegen, und **A′, B′, C′...** ꝛc. (Fig. 49) seien die in derselben Ebene befindlichen materiellen Punkte, auf welche jene Kräfte nach beliebigen Richtungen wirken. Wir setzen voraus, das System sei nicht im Gleichgewicht, und wollen demgemäß die Mittelkraft bestimmen.

Um die gegenseitige Lage der Angriffspunkte, so wie die Richtungen der Kräfte festzustellen, ziehe man aus einem beliebigen Punkte **O** der Ebene zwei auf einander normale Linien **OX, OY**, welche als Coordinatenachsen angenommen werden sollen. In Bezug auf diese Achsen seien **a, a′; b, b′; c, c′;...** ꝛc. die Coordinaten jener Punkte, und α, β, γ,... ꝛc. seien die Winkel, welche die Richtungslinien der Kräfte mit einer der beiden Achsen, z. B. mit **OX**, folglich auch mit den dieser Achse parallelen Coordinaten **a, b, c,...** ꝛc. bilden. Diese Winkel werden alle in demselben Sinne von **0** bis **360°** gezählt.

Man zerlege nun jede einzelne Kraft in ihrem Angriffspunkte nach den Richtungen der genannten Achsen in Seitenkräfte, so ergeben sich folgende zwei Systeme von parallelen Kräften:

$A\sin\alpha$, $B\sin\beta$, $C\sin\gamma$, $D\sin\delta$, ... ꝛc.;
und $A\cos\alpha$, $B\cos\beta$, $C\cos\gamma$, $D\cos\delta$, ... ꝛc.;
von welchen das eine mit OY, das andere aber mit OX parallel ist. Schließen wir vorläufig den Fall aus, daß keins von diesen beiden Systemen sich auf ein Kräftepaar reduciren läßt, so sei P die Mittelkraft des einen, Q die des andern Systems.

Was zunächst die Mittelkraft P betrifft, so ist dieselbe den zugehörigen Seitenkräften $A\sin\alpha$, $B\sin\beta$, ... ꝛc. parallel, und steht also wie diese auf der Achse OX senkrecht. Nach der angenommenen Bezeichnung sind a, b, c, ... ꝛc. die auf dieser Achse gemessenen Hebelsarme jener Seitenkräfte in Bezug auf O als Momentenpunkt, und wenn der Hebelsarm ihrer Mittelkraft mit p bezeichnet wird, so hat man nach §§. 67 und 68 folgende zwei Gleichungen:

(1) $P = A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + \cdots$ ꝛc. $= \Sigma A\sin\alpha$.

(2) $Pp = aA\sin\alpha + bB\sin\beta + cC\sin\gamma + \cdots$ ꝛc. $= \Sigma aA\sin\alpha$.

Die Kräfte des zweiten Systems stehen senkrecht auf der Achse OY, was also eben so für die mit ihnen parallele Mittelkraft Q gilt. Die Hebelsarme der ersteren sind gleich a', b', c', ... ꝛc., und wenn q den Hebelsarm von Q bezeichnet, so hat man die beiden Gleichungen:

(3) $Q = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + \cdots$ ꝛc. $= \Sigma A\cos\alpha$.

(4) $Qq = a'A\cos\alpha + b'B\cos\beta + c'C\cos\gamma + \cdots$ ꝛc. $= \Sigma a'A\cos\alpha$.

Durch diese vier Gleichungen sind nun die beiden partiellen Mittelkräfte P und Q vollkommen bekannt; denn die Gleichungen (1) und (3) geben unmittelbar ihre Intensitäten, während man aus (2) und (4) die Abstände p und q ihrer Richtungslinien von dem Coordinatenanfang O erhält. Es bleibt demnächst nur noch übrig, die Mittelkraft beider genannten Kräfte zu bestimmen, welche dann die des ganzen Systems sein wird.

Da die beiden Kräfte P und Q auf den Coordinaten-

achsen senkrecht stehen, so sind sie auch auf einander senkrecht, und die Intensität M ihrer Mittelkraft ergiebt sich daher nach §. 37 durch die Formel

$$(5)\quad M = \sqrt{P^2+Q^2} = \sqrt{(\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha)^2+(\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha)^2}.$$

Ist ferner M' (Fig. 50) der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt von P und Q, also der Angriffspunkt von M, und sind m, m' die Coordinaten dieses Punktes, so ist offenbar $m = p$ und $m' = q$. Mit Rücksicht hierauf geben nun die vorigen vier Gleichungen, wenn man (2) durch (1), ferner (4) durch (3) dividirt,

$$(6)\quad m = \frac{\Sigma a A \operatorname{Sin}\alpha}{\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha};\quad m' = \frac{\Sigma a' A \operatorname{Cos}\alpha}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha}.$$

Endlich sei μ der Winkel, den die Mittelkraft M mit der Achse OX bildet, welcher Winkel in demselben Sinne wie die der gegebenen Kräfte von 0 bis 360° gezählt wird. Man denke sich die Kraft M in ihrem Angriffspunkte nach den Richtungen der beiden Achsen OY und OX in Seitenkräfte zerlegt, so erhält man nach der einen Richtung $M \operatorname{Sin}\mu$, nach der andern $M \operatorname{Cos}\mu$. Diese Seitenkräfte müssen aber, wie sich ohne Weiteres ergiebt, den Kräften P und Q bezüglich gleich sein, so daß man also hat

$$(7)\quad \begin{cases} M \operatorname{Sin}\mu = P = \Sigma A \operatorname{Sin}\alpha; \\ M \operatorname{Cos}\mu = Q = \Sigma A \operatorname{Cos}\alpha. \end{cases}$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergiebt sich nun

$$(8)\quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha}.$$

Hier, wie überall, wo die Winkel im Sinne des Kreisumfanges von 0 bis 360° gezählt werden, muß man zur unzweideutigen Bestimmung der Richtungslinie jedesmal zwei trigonometrische Funktionen des Winkels μ haben (vergl. §. 44). Demgemäß kann man etwa noch den Sinus des genannten Winkels bestimmen, wofür man leicht erhält, wenn die erste von den unter (7) begriffenen Gleichungen durch

die Gleichung (5) dividirt wird,

$$(9) \qquad \operatorname{Sin}\mu = \frac{\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha}{\sqrt{(\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha)^2 + (\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha)^2}}.$$

§. 80.

Nach den Ergebnissen der vorhergehenden Untersuchung finden folgende vier Gleichungen zwischen den in einer Ebene nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften und deren Mittelkraft Statt:

$$(1) \quad M\operatorname{Sin}\mu = A\operatorname{Sin}\alpha + B\operatorname{Sin}\beta + C\operatorname{Sin}\gamma + \cdots \text{ ꝛc.}$$
$$(2) \quad M\operatorname{Cos}\mu = A\operatorname{Cos}\alpha + B\operatorname{Cos}\beta + C\operatorname{Cos}\gamma + \cdots \text{ ꝛc.}$$
$$(3) \quad mM\operatorname{Sin}\mu = aA\operatorname{Sin}\alpha + bB\operatorname{Sin}\beta + cC\operatorname{Sin}\gamma + \cdots \text{ ꝛc.}$$
$$(4) \quad m'M\operatorname{Cos}\mu = a'A\operatorname{Cos}\alpha + b'B\operatorname{Cos}\beta + c'C\operatorname{Cos}\gamma + \cdots \text{ ꝛc.}$$

Diese Gleichungen sollen hier in Bezug auf ihre statische Bedeutung noch einer nähern Erörterung unterworfen werden.

Was zunächst die beiden ersten betrifft, so geben dieselben unmittelbar zu erkennen, daß die Mittelkraft **M** eben so auf fortgehende Bewegung des festen Systems von Punkten nach den Richtungen der beiden Coordinatenachsen wirkt, wie alle Kräfte zusammen genommen. Und da die Lage dieser Achsen gegen das System ganz beliebig ist, so folgt, daß überhaupt das vereinigte Bestreben aller Kräfte in Bezug auf fortgehende Bewegung nach irgend einer Richtung hin durch die Wirkung der Mittelkaft vollkommen ersetzt wird.

Die beiden andern Gleichungen beziehen sich auf Drehung um eine Achse, die man sich im Coordinatenanfang auf der Ebene der Kräfte senkrecht denken muß. Um sich dies ganz klar zu machen, betrachte man irgend eine der gegebenen Kräfte, z. B. die Kraft **B** (Fig. 49), so ergiebt ein Blick auf die Figur, daß deren Seitenkräfte $B\operatorname{Sin}\beta$ und $B\operatorname{Cos}\beta$ im entgegengesetzten Sinne auf Drehung um den Punkt **O** wirken, jene am Hebelsarm $Og = b$, diese am Hebelsarm $Oh = b'$. Beide Bestrebungen werden aber durch

die Momente $bB\,\mathrm{Sin}\beta$ und $b'B\,\mathrm{Cos}\beta$ ausgedrückt, deren Differenz

$$bB\,\mathrm{Sin}\beta - b'B\,\mathrm{Cos}\beta = B(b\,\mathrm{Sin}\beta - b'\,\mathrm{Cos}\beta),$$

also der Ausdruck für das vereinigte Beſtreben beider Seitenkräfte, und mithin das Moment der Kraft B ſelbſt iſt. Demnach ſtellt die Binomialgröße $b\,\mathrm{Sin}\beta - b'\,\mathrm{Cos}\beta$, welche in dem letzten Ausdrucke als Factor vorkommt, den Hebelsarm der Kraft B vor, wie ſich dies auch leicht aus der Figur nachweiſen läßt. Dieſelbe ergiebt nemlich, wenn OB'' normal auf die Richtung von B gezogen, und der Durchſchnitt dieſer Kraft mit der Achſe OX durch k bezeichnet wird, $gk = b'\,\mathrm{Cotg}\beta$; alſo $Ok = Og - gk = b - b'\,\mathrm{Cotg}\beta$, und mithin

$$OB'' = Ok\cdot\mathrm{Sin}\beta = b\,\mathrm{Sin}\beta - b'\,\mathrm{Cos}\beta.$$

Subtrahirt man demnach die Gleichungen (3) und (4) von einander, ſo entſteht:

(5) $M(m\,\mathrm{Sin}\mu - m'\,\mathrm{Cos}\mu) = A(a\,\mathrm{Sin}\alpha - a'\,\mathrm{Cos}\alpha) + B(b\,\mathrm{Sin}\beta - b'\,\mathrm{Cos}\beta) + C(c\,\mathrm{Sin}\gamma - c'\,\mathrm{Cos}\gamma) + \cdots$ ꝛc.;

oder, wenn man die in dieſer Gleichung vorkommenden Klammergrößen, welche dem Obigen zufolge die Hebelsarme der Kräfte M, A, B, C,... ꝛc. vorſtellen, bezüglich mit m'', a'', b'', c'',... ꝛc. bezeichnet,

(6) $Mm'' = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \cdots$ ꝛc. $= \Sigma Aa''$.

Dieſer Gleichung zufolge iſt alſo das ſtatiſche Moment der Mittelkraft in Bezug auf den Coordinatenanfang O als Momentenpunkt, gleich der algebraiſchen Summe der Momente aller gegebenen Kräfte. Da aber jeder andere Punkt der Ebene als Coordinatenanfang genommen werden kann, ſo iſt die letzte Gleichung für alle Punkte der Ebene gültig; d. h. in welchem Punkte der Ebene man ſich auch eine auf derſelben normale Achſe angebracht denken mag, ſo iſt jedesmal das vereinigte Beſtreben aller Seitenkräfte, eine Drehung um dieſe Achſe hervorzubringen,

dem Bestreben ihrer gemeinschaftlichen Mittelkraft in Bezug auf dieselbe Achse gleichgeltend, und kann dadurch ersetzt werden.

In Absicht auf die Vorzeichen der Momente ist noch zu bemerken, daß, wenn die Kräfte mit der Achse **OX** concave Winkel bilden, alsdann ihre Momente positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem sie die genannte Achse rechts oder links vom Punkte **O** auf ihrer Verlängerung schneiden. Das Umgekehrte hievon findet dagegen für die Momente derjenigen Kräfte Statt, deren Richtungslinien mit der Achse **OX** convexe Winkel bilden. Diese Bemerkung findet indeß nur Anwendung auf eine Momentengleichung von der Form, wie sie die Gleichung (6) darstellt. Werden aber die Momente der Kräfte so berechnet, wie sie in der vorhergehenden Gleichung (5) vorkommen, so hat man nicht nöthig, auf die Vorzeichen noch besonders Rücksicht zu nehmen, da dieselben durch die allgemeinen Ausdrücke der Momente, und namentlich durch die Beschaffenheit der trigonometrischen Functionen **Sinus** und **Cosinus**, in jedem besonderen Falle ohne Weiteres bestimmt werden.

§. 81.

Erörterung des Falles, wenn sich Kräftepaare zeigen. In §. 79 haben wir bei Bestimmung der Mittelkraft von beliebig vielen Kräften, die in einer Ebene nach verschiedenen Richtungen wirken, die Voraussetzung zum Grunde gelegt, daß die beiden Systeme von parallelen Seitenkräften, welche durch die Zerlegung der gegebenen Kräfte nach zwei auf einander normalen Richtungen erhalten worden, sich nicht auf Kräftepaare reduciren lassen. Ist dies aber bei einem der beiden Systeme, oder bei beiden zugleich der Fall, so entsteht die Frage, wie es sich dann mit der Bestimmung der Mittelkraft verhalte. Der gegenwärtige Paragraph ist der Erörterung dieser Frage gewidmet.

a) Wenn nur eins der beiden Syſteme auf ein Kräftepaar führt, während das andere eine beſtimmte Mittelkraft liefert, dann iſt für die gegebenen Kräfte immer eine Geſammtmittelkraft vorhanden, deren Richtung auf dem Paare ſenkrecht ſteht.

Denn man nehme an, das mit der Achſe **OX** parallele Syſtem gebe ein Kräftepaar **W, W'** (Fig. 51), deſſen Intervall **JK = w** ſein mag, ſo hat man dieſer Annahme gemäß nach den Gleichungen (3) und (4) in §. 79

(1) $\quad 0 = \Sigma A \operatorname{Cos}\alpha; \quad Ww = \Sigma a' A \operatorname{Cos}\alpha.$

Bezeichnet **P** die Mittelkraft des andern auf **OX** normalen Syſtems, und **p** deren Abſtand vom Punkte **O**, ſo finden nach (1) und (2) in §. 79 die beiden Gleichungen Statt:

(2) $\quad P = \Sigma A \operatorname{Sin}\alpha; \quad Pp = \Sigma a A \operatorname{Sin}\alpha.$

Man verlängere die Richtungslinie von **P** bis ſie die gleichen Kräfte **W, W'** in **J** und **K** ſchneidet. Im letzteren Punkte nehme man von den beiden Kräften **P** und **W'** die Mittelkraft **R**, deren Richtungslinie innerhalb des rechten Winkels **PKW'** liegt, und die Kraft **W** in **L** ſchneiden möge. In dieſem Punkte ſetze man die beiden Kräfte **R** und **W** wieder zu einer neuen Mittelkraft **M** zuſammen, dann iſt letztere die Geſammtmittelkraft aller gegebenen Kräfte.

Es läßt ſich ſehr leicht beweiſen, daß die Geſammtmittelkraft **M** der partiellen Mittelkraft **P** gleich und parallel iſt, und daher wie die letztere auf der Achſe **OX** ſenkrecht ſteht. Denn zerlegt man die Kraft **R** im Punkte **L** nach den mit **KW'** und **KP** parallelen Richtungen **LJ, LM** in Seitenkräfte, ſo ſtellt man dadurch die urſprünglichen Kräfte **W'** und **P** wieder her, von welchen ſich die erſte als gleich und entgegengeſetzt mit **W** aufhebt, während nur die zweite nach der Richtung **LM** übrig bleibt.

Bezeichnet man den Abſtand der Kraft **M** von dem

Punkte O mit m, so ist $m = p - LJ$. Nun ist aber, wenn $\angle JKL = \angle PKR = \varphi$ gesetzt wird,

$$JL = KJ \cdot tg\varphi = w \cdot \frac{W'}{P};$$

also $$m = p - w \cdot \frac{W'}{P} = \frac{Pp - Ww}{P}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $M = P$, und substituire dann für Pp und Ww die entsprechenden Werthe, so kömmt

(3) $Mm = \Sigma aA \operatorname{Sin} a - \Sigma a'A \operatorname{Cos} \alpha = \Sigma A(a \operatorname{Sin} \alpha - a' \operatorname{Cos} \alpha)$,

eine Gleichung, die auch aus (5) des vorigen Paragraphen hervorgeht, wenn darin $\mu = 90°$ gesetzt wird.

b) Wenn beide Systeme von parallelen Kräften bei der Behandlung nach §. 79 auf Kräftepaare führen, dann reducirt sich das ganze System ebenfalls auf ein solches Paar; und in diesem Falle ist eine Mittelkraft nicht vorhanden.

Es sei V, V' das auf der Achse OX, ferner W, W' das auf OY senkrechte Paar (Fig. 52), und v, w seien die Intervalle dieser Paare. Die der obigen Annahme entsprechenden Gleichungen sind nach §. 79

(1) $0 = \Sigma A \operatorname{Sin} \alpha$; $Vv = \Sigma aA \operatorname{Sin} \alpha$.

(2) $0 = \Sigma A \operatorname{Cos} \alpha$; $Ww = \Sigma a'A \operatorname{Cos} \alpha$.

Man verlängere die Richtungslinien der die Paare bildenden Kräfte V, W und V', W', bis sie sich bezüglich in G und H schneiden, nehme in diesen Punkten die zugehörigen Mittelkräfte U und U', welche mit V und V' die Winkel φ und φ' bilden mögen, so hat man nach §. 37, weil $V = V'$ und $W = W'$ ist,

$$U = U' = \sqrt{V^2 + W^2};$$

$$tg\varphi = tg\varphi' = \frac{W}{V}.$$

Die beiden Mittelkräfte U, U' sind also einander gleich und parallel; sie bilden folglich ein Paar, welches auf eine einzige Gesammtmittelkraft nicht zurückgeführt werden kann.

Um das Moment dieses Paares zu bestimmen, sei $KL = u$ das Intervall desselben. Nach der in der Figur angegebenen Bezeichnung ergiebt sich ohne Weiteres

$$JK = w \cdot \operatorname{tg} \varphi' = \frac{wW}{V};$$

$$KG = JG - JK = \frac{Vv - Ww}{V};$$

$$KL = KG \cdot \operatorname{Cos} \varphi = \frac{Vv - Ww}{V} \operatorname{Cos} \varphi.$$

Nun ist aber, wie leicht aus der Figur folgt, $U \operatorname{Cos} \varphi = V$; und wenn dies eingesetzt wird, entsteht mit Rücksicht darauf, daß $Vv - Ww = \Sigma a A \operatorname{Sin} \alpha - \Sigma a' A \operatorname{Cos} \alpha = \Sigma A (a \operatorname{Sin} \alpha - a' \operatorname{Cos} \alpha)$ ist,

$$(3) \qquad u = \frac{\Sigma A (a \operatorname{Sin} \alpha - a' \operatorname{Cos} \alpha)}{U}.$$

Diese Gleichung auf beiden Seiten mit U multiplicirt, liefert demnächst für das Moment des Paares, welches die Gesammtwirkung aller Kräfte des Systems ersetzt, den Ausdruck

$$(4) \qquad Uu = \Sigma A (a \operatorname{Sin} \alpha - a' \operatorname{Cos} \alpha).$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung (5), so ergiebt sich, daß, wenn sämmtliche Kräfte sich auf ein Kräftepaar zurückführen lassen, alsdann das Moment dieses Paares der algebraischen Summe der Momente aller gegebenen Kräfte gleich ist.

§. 82.

Bedingungen des Gleichgewichts. Werden alle gegebenen Kräfte, von welchen in §. 79 die Mittelkraft bestimmt worden, als im Gleichgewicht vorausgesetzt, so müssen sie sich auf zwei gleiche Kräfte, die in einer und derselben geraden Linie nach entgegengesetzten Richtungen wirken, d. h. auf ein Kräftepaar, dessen Intervall gleich Null ist, zurückführen lassen.

Für den Fall eines Kräftepaares fanden wir aber im vorigen Paragraphen b) erſtlich die beiden Bedingungen

$$\Sigma A \operatorname{Sin}\alpha = 0; \quad \Sigma A \operatorname{Cos}\alpha = 0,$$

und demnächſt ergab ſich das Intervall des Paares, wenn U die Intenſität ſeiner Kräfte bezeichnet, durch die Formel

$$u = \frac{\Sigma A (a \operatorname{Sin}\alpha - a' \operatorname{Cos}\alpha)}{U}.$$

Setzt man alſo in dieſer Gleichung $u = 0$, ſo hat man folgende drei Gleichungen, welche die Bedingungen des vorausgeſetzten Gleichgewichts darſtellen:

$$(1)\quad \Sigma A \operatorname{Sin}\alpha = A \operatorname{Sin}\alpha + B \operatorname{Sin}\beta + C \operatorname{Sin}\gamma + \ldots = 0.$$
$$(2)\quad \Sigma A \operatorname{Cos}\alpha = A \operatorname{Cos}\alpha + B \operatorname{Cos}\beta + C \operatorname{Cos}\gamma + \ldots = 0.$$
$$(3)\quad \Sigma A(a \operatorname{Sin}\alpha - a' \operatorname{Cos}\alpha) = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \ldots = 0.$$

Nach §. 80. beziehen ſich die beiden erſten Gleichungen auf fortgehende, die dritte aber, welche eine ſtatiſche Momentengleichung iſt, auf drehende Bewegung um eine feſte Achſe, welche irgendwo auf der die Kräfte enthaltenden Ebene ſenkrecht ſteht. Indem aber die hierauf bezüglichen Ausdrücke mit Null verglichen ſind, ſo liegt darin die ſtatiſche Bedeutung ausgeſprochen, daß weder die eine noch die andere Art der Bewegung aus der vereinigten Wirkung aller Kräfte hervorgehen kann.

Hieraus folgt auch zugleich die Richtigkeit des umgekehrten Satzes, daß nämlich, wenn die obigen drei Gleichungen gegeben ſind, alsdann auch jedesmal die Kräfte mit einander im Gleichgewichte ſein müſſen. Daß ſich dieſer umgekehrte Satz auch dadurch beſonders beweiſen läßt, indem man darthut, daß in Folge der obigen Gleichungen jede Kraft des Syſtems ſich gegen alle übrigen Kräfte als deren entgegengeſetzte Mittelkraft verhält, mag hier nur andeutungsweiſe erwähnt werden.

§. 83.

Aufgaben zur Anwendung vorstehender Gesetze.

1) In §. 72. haben wir unter No. 2. die Wirkungen bestimmt, welche die mit einem Gewicht P beschwerte Stange AB (Fig. 40.) in den Stützpunkten A und B gegen die festen Ebenen AC und BC ausübt. Diese Aufgabe läßt sich mittelst der im vorigen §. gefundenen Bedingungsgleichungen auf folgende Art lösen:

Offenbar äußert das untere Ende der Stange auf die wagerechte Ebene AC zweierlei Wirkungen: einen vertikalen Druck U und einen horizontalen Schub S, während das obere Ende der Stange, welches sich gegen die Vertikalfläche BC lehnt, einen normalen Druck Q auf dieselbe ausübt. Man denke sich diesen Wirkungen entgegen die gleich großen Kräfte x, y und z als die entsprechenden Gegenwirkungen der beiden festen Ebenen angebracht, so kann man die letzteren fortlassen, und das Gleichgewicht der fraglichen Stange muß mit Beibehaltung ihres Neigungswinkels α unter den vier Kräften x, y, z und P unverändert fort bestehen. Diese vier Kräfte wirken nach verschiedenen Richtungen in einer Ebene, weshalb die Bedingungsgleichungen des vorigen §. auf sie Anwendung finden.

Nach den beiden ersten Bedingungsgleichungen, die sich auf fortgehende Bewegung beziehen, muß man die nicht parallelen Kräfte nach zwei auf einander normalen Richtungen zerlegen, und die algebraische Summe der entstandenen Seitenkräfte für jede Richtung gleich Null setzen. In dem vorliegenden Falle ist indeß diese Zerlegung nicht nöthig, da die Richtungslinien der fraglichen Kräfte von Hause als horizontal und vertikal gegeben sind. Mit Rücksicht darauf ergeben sich unmittelbar die Gleichungen

$$x - P = 0 \text{ und } y - z = 0;$$

woraus sich sofort $x = P$ und $y = z$ findet.

Die dritte Bedingungsgleichung bezieht sich auf Drehung, wobei ein beliebiger Punkt der, die Kräfte enthaltenden, Ebene als Momentenpunkt angenommen werden kann. Nimmt man den Punkt A hiefür an, so sind die Hebelsarme der durch diesen Punkt gehenden Kräfte x und y, also auch deren Momente, gleich Null. Für die beiden anderen Kräfte z und P sind die normalen Abstände ihrer Richtungen von dem Momentenpunkt, bezüglich $AB \cdot \mathrm{Sin}\alpha = a\,\mathrm{Sin}\alpha$ und $AD \cdot \mathrm{Cos}\alpha = b\,\mathrm{Cos}\alpha$, als Hebelsarme anzunehmen, und da diese Kräfte die Stange AB im entgegengesetzten Sinne um den Punkt A zu drehen streben, so hat man demgemäß die statische Momentengleichung

$$z \cdot a\,\mathrm{Sin}\alpha = P \cdot b\,\mathrm{Cos}\alpha.$$

Diese giebt

$$z = \frac{b}{a} P\,\mathrm{Cotg}\alpha,$$

was auch zugleich der Werth von y ist, da wir oben $y = z$ gefunden haben.

2) Die vorige Aufgabe werde dahin abgeändert, daß das obere Ende der mit dem Gewicht P belasteten Stange AB (Fig. 53.), anstatt gegen eine vertikale Wand gelehnt zu sein, auf einer festen Kante B liege, während das untere Ende sich wie früher auf der wagerechten Fläche AC stütze. Letztere wird daher auch in dem vorliegenden Falle einen vertikalen Druck und einen horizontalen Schub erleiden, und um die Stange ins Gleichgewicht zu bringen, muß man also die Kräfte x und y, jenen Wirkungen gleich und gerade entgegengesetzt, anbringen, während an dem oberen Ende eine Kraft z normal auf AB erforderlich ist, um die entsprechende Gegenwirkung der festen Kante zu ersetzen.

Zerlegt man nun z nach vertikaler und horizontaler Richtung in die Seitenkräfte $z' = z\,\mathrm{Cos}\alpha$ und $z'' = z\,\mathrm{Sin}\alpha$,

so hat man nach der ersten Richtung die parallelen Kräfte x und z', nach der andern Richtung aber die Kräfte y und z'' wirksam. In Bezug auf fortgehende Bewegung nach diesen Richtungen ergeben sich daher die Bedingungen des Gleichgewichts

$$x + z' - P = 0; \quad y - z'' = 0;$$

woraus man mit Rücksicht auf die Werthe von z' und z'' findet:

(1) $$x + z\,\mathrm{Cos}\,\alpha = P$$

(2) $$z\,\mathrm{Sin}\,\alpha = y.$$

In Bezug auf drehende Bewegung um den Punkt A ist AB = a der Hebelarm von z, während der von P wie vorhin AD · Cos α = b Cos α ist. Die Hebelsarme von x und y sind dagegen wieder Null. Demnach hat man die Momentengleichung:

(3) $$za = P \cdot b\,\mathrm{Cos}\,\alpha;$$

woraus sich findet: $$z = \frac{b}{a} P\,\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Setzt man diesen Werth anstatt z in (1) und (2) ein, so findet man ferner

$$x = P - z\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{a - b\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2}{a} \cdot P;$$

$$y = \frac{b}{a} P\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{b}{2a} P \cdot \mathrm{Sin}\,2\alpha.$$

Dieser letzte Ausdruck giebt den Seitenschub, den das untere Ende der Stange nach horizontaler Richtung ausübt, und dieser ist also jetzt dem Sinus des doppelten Neigungswinkels proportional, anstatt daß er bei der vorigen Aufgabe durch die Cotangente dieses Winkels bestimmt wurde.

Der obige Ausdruck von y giebt für $\alpha = 45°$ das Maximum des Schubes $= \frac{bP}{2a}$, während derselbe für $\alpha = 0$, d. h. für eine wagerechte Lage der Stange AB, verschwindet; und in der That kann eine horizontal liegende, an beiden Enden

unterstützte Stange, an welcher nur eine lothrechte Kraft wirkt, keinen Seitenschub ausüben.

3) Auch die dritte in §. 72. (Fig. 41.) vorgetragene Aufgabe läßt sich auf eine ähnliche Weise, wie die unmittelbar vorhergehenden, nämlich durch Anwendung der im vorigen §. gefundenen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts behandeln, welches hier noch gezeigt werden soll.

Man bringe in den Endpunkten der mit dem Gewicht P beschwerten Stange AB (Fig. 54.) nach den auf AC und BC normalen Richtungen die Kräfte x und z als Gegenwirkungen der genannten schiefen Ebenen, außerdem aber in A noch die Kraft y nach der Richtung AC an, welche letztere den Schub der Stange nach der entgegengesetzten Richtung aufhebt. Dadurch erhält man ein System von vier nicht parallelen Kräften in einer Ebene (x, y, z und P), die mit einander im Gleichgewichte sein müssen.

Um zunächst die beiden, auf fortgehende Bewegung Bezug habenden, Gleichungen darzustellen, muß man die genannten Kräfte nach zwei auf einander normalen Richtungen zerlegen und die algebraische Summe der Seitenkräfte nach jeder Richtung gleich Null setzen. Nimmt man diese Richtungen horizontal und vertikal an, so erhält man mit Hinsicht auf Fig. 54., worin der Vergleichung wegen die in Fig. 41. angenommene Bezeichnung beibehalten ist, für die vertikalen Seitenkräfte:

$$x' = x\cos\beta;\ y' = y\sin\beta;\ z' = z\cos\gamma \text{ und } P;$$

während die horizontalen Seitenkräfte ausgedrückt werden, durch

$$x'' = x\sin\beta;\ y'' = y\cos\beta;\ z'' = z\sin\gamma.$$

Mit Rücksicht auf die gegenseitige Lage dieser Kräfte gegen einander ergeben sich nun leicht die Gleichungen:

(1) $\quad x\cos\beta - y\sin\beta + z\cos\gamma - P = 0,$

(2) $\quad x\sin\beta + y\cos\beta - z\sin\gamma = 0.$

Zur Darstellung der auf drehende Bewegung sich beziehenden Gleichung wählt man am zweckmäßigsten den Punkt A zum Momentenpunkt, weil dann die unbekannten Kräfte x, y außer Betracht bleiben. Die von A auf die Richtungen z und P gefällten Perpendikel AF und AE, welche die Hebelsarme dieser Kräfte vorstellen, ergeben sich leicht folgendermaßen aus der Figur:

$$AF = AB \cdot \mathrm{Cos}\, BAF = a \cdot \mathrm{Cos}(\beta + \gamma - \alpha);$$
$$AE = AD \cdot \mathrm{Cos}\, DAE = b \cdot \mathrm{Cos}(\alpha - \beta).$$

Daher hat man die Momentengleichung

$$(3) \qquad z \cdot a\,\mathrm{Cos}(\beta + \gamma - \alpha) = P \cdot b\,\mathrm{Cos}(\alpha - \beta),$$

aus der sich sofort die Unbekannte z also findet:

$$(4) \qquad z = \frac{P\,b\,\mathrm{Cos}(\alpha - \beta)}{a\,\mathrm{Cos}(\beta + \gamma - \alpha)}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich wie folgt umstellen:

$$x\,\mathrm{Cos}\beta - y\,\mathrm{Sin}\beta = P - z\,\mathrm{Cos}\gamma;$$
$$x\,\mathrm{Sin}\beta + y\,\mathrm{Cos}\beta = z\,\mathrm{Sin}\gamma.$$

Da z gefunden ist, so erhält man hieraus durch die bekannte Eliminations-Methode

$$x = P\,\mathrm{Cos}\beta - z\,\mathrm{Cos}(\beta + \gamma);\ y = z\,\mathrm{Sin}(\beta + \gamma) - P\,\mathrm{Sin}\beta,$$

und wenn für z der gefundene Werth eingesetzt wird:

$$(5) \qquad x = \frac{P}{a}\left(a\,\mathrm{Cos}\beta - b\,\frac{\mathrm{Cos}(\alpha - \beta)\,\mathrm{Cos}(\beta + \gamma)}{\mathrm{Cos}(\beta + \gamma - \alpha)}\right),$$

$$(6) \qquad y = \frac{P}{a}\left(b\,\frac{\mathrm{Cos}(\alpha - \beta)\,\mathrm{Sin}(\beta + \gamma)}{\mathrm{Cos}(\beta + \gamma - \alpha)} - a\,\mathrm{Sin}\beta\right).$$

II. Nicht parallele Kräfte im Raume.

§. 84.

Bestimmung der Mittelkraft. Es seien A, B, C... ꝛc. die Intensitäten der Kräfte, welche nach verschiedenen Richtungen im Raume auf ein gegebenes System von materiellen Punkten wirken, ohne mit einander im Gleichge-

wichte zu sein. Die Coordinaten der Angriffspunkte rücksichtlich dreier Coordinaten-Ebenen, die sich paarweise in den Linien OX, OY, OZ (Fig. 55.) unter rechten Winkeln schneiden, seien a, a′, a″; b, b′, b″; c, c′, c″ ... ꝛc., und um die Richtungen der Kräfte festzusetzen, ziehe man aus jedem Angriffspunkte drei Linien mit den Achsen OX, OY und OZ parallel, und bezeichne die Winkel, welche die Kräfte mit diesen Linien bilden, bezüglich durch α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' ... ꝛc. In Figur 55. ist zur Verdeutlichung des Gesagten nur die Kraft A angegeben; A′ ist ihr Angriffspunkt und A′X′, A′Y′, A′Z′ sind die mit den Achsen parallelen Linien, mit welchen die Richtungslinie A′A die Winkel α, α', α'' bildet. Daß übrigens alle diese Winkel nur von 0 bis 180 Graden gezählt zu werden brauchen, ist für sich einleuchtend.

Man zerlege nun jede Kraft nach den mit den genannten drei Achsen parallelen Richtungen in Seitenkräfte, so erhält man folgende drei Systeme von parallelen Kräften:

1) Parallel mit OX, oder senkrecht auf der Ebene YOZ,
$A.\cos\alpha$, $B.\cos\beta$, $C.\cos\gamma$,... u. s. w.

2) Parallel mit OY, oder senkrecht auf XOZ,
$A.\cos\alpha'$, $B.\cos\beta'$, $C.\cos\gamma'$,... u. s. w.

3) Parallel mit OZ, oder senkrecht auf XOY,
$A.\cos\alpha''$, $B.\cos\beta''$, $C.\cos\gamma''$,... u. s. w.

Vorausgesetzt, daß keins von diesen drei Systemen sich auf ein Kräftenpaar reduciren läßt, seien P, Q und R die Mittelkräfte derselben, deren Richtungslinien die Ebenen YZ, XZ und XY in den Punkten P′, Q′ und R′ (Fig. 56.) rechtwinklig schneiden. Die Coordinaten dieser Durchschnittspunkte sollen bezüglich mit p′, p″; q, q″ und r, r′ bezeichnet werden, und zwar ohne Accent, ein oder zweimal accentuirt, je nachdem sie mit der Achse OX, OY oder OZ paral-

lel sind. Nach §. 74. hat man dann folgende Bestimmungsgleichungen für die Mittelkräfte dieser Systeme:

a) für das erste System;

$$P = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + \cdots = \Sigma A\cos\alpha;$$
$$p'P = a'\cdot A\cos\alpha + b'\cdot B\cos\beta + \cdots\cdots \text{ꝛc.} = \Sigma a' A\cos\alpha;$$
$$p''P = a''\cdot A\cos\alpha + b''\cdot B\cos\beta + \cdots\cdots \text{ꝛc.} = \Sigma a'' A\cos\alpha.$$

b) für das zweite System;

$$Q = A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' + \cdots = \Sigma A\cos\alpha';$$
$$qQ = a\cdot A\cos\alpha' + b\cdot B\cos\beta' + \cdots\cdots \text{ꝛc.} = \Sigma aA\cos\alpha';$$
$$q''Q = a''\cdot A\cos\alpha' + b''\cdot B\cos\beta' + \cdots\cdots \text{ꝛc.} = \Sigma a'' A\cos\alpha'.$$

c) für das dritte System;

$$R = A\cos\alpha'' + B\cos\beta'' + C\cos\gamma'' + \cdots = \Sigma A\cos\alpha'';$$
$$rR = a\cdot A\cos\alpha'' + b\cdot B\cos\beta'' + \cdots\cdots \text{ꝛc.} = \Sigma aA\cos\alpha'';$$
$$r'R = a'\cdot A\cos\alpha'' + b'\cdot B\cos\beta'' + \cdots\cdots \text{ꝛc.} = \Sigma a' A\cos\alpha''.$$

Durch die ersten Gleichungen dieser drei Gruppen sind unmittelbar die Intensitäten der fraglichen Mittelkräfte gegeben, und wenn man die zweite und dritte Gleichung einer jeden Gruppe durch die zugehörige erste Gleichung dividirt, findet man die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit den Coordinatenebenen. Auf diese Weise entstehen folgende Resultate:

(1) $P = \Sigma A\cos\alpha;\ Q = \Sigma A\cos\alpha';\ R = \Sigma A\cos\alpha''.$

(2) $$p' = \frac{\Sigma a' A\cos\alpha}{\Sigma A\cos\alpha};\quad p'' = \frac{\Sigma a'' A\cos\alpha}{\Sigma A\cos\alpha}.$$

(3) $$q = \frac{\Sigma a A\cos\alpha'}{\Sigma A\cos\alpha'};\quad q'' = \frac{\Sigma a'' A\cos\alpha'}{\Sigma A\cos\alpha'}.$$

(4) $$r = \frac{\Sigma a A\cos\alpha''}{\Sigma A\cos\alpha''};\quad r' = \frac{\Sigma a' A\cos\alpha''}{\Sigma A\cos\alpha''}.$$

Nachdem nun so die Intensitäten der drei Kräfte P, Q und R, welche als die partiellen Mittelkräfte des gegebenen Sy-

ſtems A, B, C... ꝛc. zu betrachten ſind, ſo wie ihre Poſitionen gegen einander beſtimmt ſind, bleibt noch die Erörterung der Frage übrig, in wiefern ſie einer gemeinſchaftlichen Mittelkraft fähig ſind oder nicht; d. h. in wie fern es möglich iſt, das gegebene Syſtem von Kräften auf eine einzige Geſammt-Mittelkraft zurückzuführen. Es wird ſich finden, daß dies nur in ſehr beſondern Fällen ausführbar iſt, wie in den folgenden Paragraphen näher gezeigt werden ſoll.

§. 85.

Zuvörderſt iſt klar, daß eine Geſammt-Mittelkraft allemal möglich iſt, ſo oft ſich die Kräfte P, Q und R in einem und demſelben Punkte ſchneiden. Nach §. 51. (2) findet man nämlich die Intenſität dieſer Mittelkraft

$$(1) \qquad M = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

und ihre Richtung gegen die drei Achſen beſtimmt ſich durch

$$(2) \qquad \begin{cases} \operatorname{Cos}\mu = \dfrac{P}{M} = \dfrac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; \\ \operatorname{Cos}\mu' = \dfrac{Q}{M} = \dfrac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; \\ \operatorname{Cos}\mu'' = \dfrac{R}{M} = \dfrac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}; \end{cases}$$

wo μ, μ' und μ'' die Winkel ſind, unter welchen die Kraft M gegen die drei Achſen, oder gegen die mit ihnen parallelen Kräfte P, Q und R, geneigt iſt. Der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt dieſer drei Kräfte iſt demnächſt als der Angriffspunkt ihrer Mittelkraft anzunehmen, und wenn m, m', m'' die Coordinaten deſſelben ſind, ſo hat man offenbar die der gemachten Vorausſetzung entſprechenden Bedingungen:

$$m = q = r; \; m' = p' = r' \text{ und } m'' = p'' = q'';$$

d. h. mit Rückſicht auf die Ausdrücke (2), (3) und (4) des vorigen Paragraphen,

$$(3)\quad \begin{cases} m = \dfrac{\Sigma a A \operatorname{Cos}\alpha'}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha'} = \dfrac{\Sigma a A \operatorname{Cos}\alpha''}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha''}; \\ m' = \dfrac{\Sigma a' A \operatorname{Cos}\alpha}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha} = \dfrac{\Sigma a' A \operatorname{Cos}\alpha''}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha''}; \\ m'' = \dfrac{\Sigma a'' A \operatorname{Cos}\alpha}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha} = \dfrac{\Sigma a'' A \operatorname{Cos}\alpha'}{\Sigma A \operatorname{Cos}\alpha'}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken also die Bedingung dafür aus, daß die drei Kräfte P, Q und R sich in einem und demselben Punkte schneiden, und es folgt aus dem Vorhergehenden, daß wenn die gegebenen Kräfte A, B, C ꝛc., d. h. die Elemente, welche dieselben in Bezug auf Intensität, Richtung und Angriffspunkt bestimmen, den obigen Gleichungen Genüge leisten, alsdann allemal eine einzelne Kraft M, welche die vereinigte Wirkung aller gegebenen Kräfte zu ersetzen im Stande ist, nachgewiesen werden kann. Wird aber jenen Gleichungen nicht zu gleicher Zeit Genüge geleistet, so schneiden sich die partiellen Mittelkräfte P, Q, R auch nicht in demselben Punkte, und in diesem Falle bleibt es zweifelhaft, ob sie einer gemeinsamen Mittelkraft fähig sind.

Schneiden sich z. B. nur zwei von ihnen, etwa die Kräfte P und Q, so kann man diese zu einer Mittelkraft S vereinigen, die folglich in einer Ebene liegt, auf welche die dritte Kraft R senkrecht steht. Das ganze System von Kräften ist also dann auf zwei Kräfte R und S zurückgeführt, die eine rechtwinklige Lage im Raume gegen einander haben, und nur in dem Falle, wenn letztere sich ebenfalls schneiden, gestatten sie eine Mittelkraft, welches dann die des ganzen Systems ist. Findet aber ein solches Schneiden der beiden Kräfte R und S nicht statt, so ist auch keine Mittelkraft möglich, wie eine kleine Ueberlegung leicht zeigen wird.

Im Allgemeinen sind es also die Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken der Kräfte A, B, C, ⋯ ꝛc., an welchen das Vorhandensein einer ihnen gemeinsamen Mittelkraft

geknüpft ist, und diese Beziehungen darzulegen, sei nun unsere nächste Aufgabe.

§. 86.

In §. 84. haben wir gesehen, wie das im Raume gegebene System von Kräften A, B, C, ... ꝛc. auf drei, mit den Coordinatenachsen parallele Systeme, deren Mittelkräfte P, Q und R sind, zurückgeführt werden kann. Die dort in den Gruppen a, b und c zusammengestellten Gleichungen drücken die Bedingungen dafür aus, daß die letzten drei Kräfte, welche durch die Ausdrücke (1) bis (4) bestimmt sind, die Wirkungen jenes Systems vollkommen ersetzen, und diese Bedingungs-Gleichungen müssen zuvörderst, ehe wir zu der Bestimmung einer Gesammt-Mittelkraft übergehen können, in Absicht auf ihre statischen Bedeutungen einer nähern Betrachtung unterworfen werden.

Was zunächst die ersten Gleichungen der drei Gruppen: I) $P = \Sigma A\,Cos\alpha$; $Q = \Sigma A\,Cos\alpha'$; $R = \Sigma A\,Cos\alpha''$ betrifft, so geben diese offenbar zu erkennen, daß die Kräfte P, Q und R eben so auf fortgehende Bewegung des festen Systems von Punkten nach den Richtungen der Achsen OX, OY, OZ wirken, wie die ursprünglich gegebenen Kräfte A, B, C, ꝛc. in ihrer Gesammtheit. — Die andern sechs Gleichungen jener Gruppen beziehen sich paarweise auf Drehung des festen Systems um die genannten Achsen, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die fraglichen Gleichungen folgendermaßen zusammenstellt:

(1) $qQ = \Sigma a\,Cos\alpha'$; $p'P = \Sigma a'A\,Cos\alpha$.

(2) $p''P = \Sigma a''A\,Cos\alpha$; $rR = \Sigma aA\,Cos\alpha''$.

(3) $r'R = \Sigma a'A\,Cos\alpha''$; $q''Q = \Sigma a''A\,Cos\alpha'$.

Unterwirft man nun die beiden unter (1) enthaltenen Gleichungen einer nähern Betrachtung, so leuchtet zuvörderst ein, daß die Produkte qQ und p'P, welche die linken Seiten je-

ner Gleichungen bilden, die ſtatiſchen Momente der Kräfte Q und P in Bezug auf die Achſe OZ ausdrücken; denn ein Blick auf die Fig. 56. lehrt ſofort, daß die genannten Kräfte an den Hebelsarmen q und p' auf Drehung des Syſtems um jene Achſe wirken, und zwar die eine im entgegengeſetzten Sinne der andern. Wo aber irgend zwei Kräfte entgegengeſetzten Sinnes auf Drehung um eine feſte Achſe wirken, da drückt allemal die Differenz der ſtatiſchen Momente die vereinigte Wirkung beider Kräfte aus, und daher iſt $qQ - p'P$ das vereinte Beſtreben der Kräfte Q und P, eine Drehung um die Achſe OZ hervorzubringen.

Ganz dieſelbe Bewandniß hat es nun mit den Seitenkräften von A, B, C, ... ꝛc., welche auf den rechten Seiten der Gleichungen (1) in den ſummatoriſchen Ausdrücken $\Sigma a A \operatorname{Cos}\alpha'$ und $\Sigma a' A \operatorname{Cos}\alpha$ vorkommen. Denn betrachtet man, mit Rückſicht auf Fig. 55., die beiden aus A entſtandenen Seitenkräfte $A \operatorname{Cos}\alpha'$ und $A \operatorname{Cos}\alpha$, welche die normalen Abſtände a und a' ihrer Richtungslinien von der Achſe OZ in jenen Ausdrücken zu Factoren haben, ſo überzeugt man ſich ſofort, daß dieſe Abſtände die Hebelsarme, die Producte $a \cdot A \operatorname{Cos}\alpha'$ und $a' \cdot A \operatorname{Cos}\alpha$ aber die ſtatiſchen Momente jener Seitenkräfte vorſtellen. Und da dieſelben entgegengeſetzten Sinnes auf Drehung wirken, ſo drückt die Differenz ihrer Momente, nämlich:

$$a \cdot A \operatorname{Cos}\alpha' - a' \cdot A \operatorname{Cos}\alpha = A(a \operatorname{Cos}\alpha' - a' \operatorname{Cos}\alpha),$$

das vereinte Beſtreben beider Seitenkräfte aus, eine Drehung um die Achſe OZ hervorzubringen. — Da ferner die dritte, durch die Zerlegung von A entſtandene Seitenkraft $A \operatorname{Cos}\alpha''$ mit der Drehachſe parallel geht, ſo kann dieſe auf die fragliche Drehung keinen Einfluß haben, weshalb ſie in dieſer Hinſicht außer Acht gelaſſen werden darf. Daraus folgt alſo, daß die obige Größe $A(a \operatorname{Cos}\alpha' - a' \operatorname{Cos}\alpha)$ das geſammte, aus der Kraft A hervorgehende, Beſtreben ausdrückt,

deren Angriffspunkt drehend um die Achse OZ zu bewegen, und auf ganz gleiche Weise stellen die Ausdrücke $B(b\,\mathrm{Cos}\,\beta' - b'\,\mathrm{Cos}\,\beta)$, $C(c\,\mathrm{Cos}\,\gamma' - c'\,\mathrm{Cos}\,\gamma)$ u. s. w. die Bestrebungen der Kräfte B, C, ... &c. dar, eine Drehung um dieselbe Achse hervorzubringen.

Die so eben vorgetragene Auseinandersetzung über die statische Bedeutung der Gleichungen (1) findet eine ganz analoge Anwendung auf die unter (2) und (3) neben einander gestellten Gleichungen. Wie nämlich jene auf Drehung um die Achse OZ Bezug hatte, so beziehen sich diese auf Drehung um die Achsen OY und OX, und man sieht also, daß man nur nöthig hat, die fraglichen Gleichungen paarweise durch Subtraction zu verbinden, um das aus den gegebenen Kräften hervorgehende Bestreben zur Drehung darzustellen. Man erhält dann nach einander:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} qQ - p'P = \Sigma A(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - a'\,\mathrm{Cos}\,\alpha); \\ p''P - rR = \Sigma A(a''\,\mathrm{Cos}\,\alpha - a\,\mathrm{Cos}\,\alpha''); \\ r'R - q''Q = \Sigma A(a'\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' - a''\,\mathrm{Cos}\,\alpha'); \end{cases}$$

welche Gleichungen nunmehr zu erkennen geben, daß die drei Kräfte P, Q und R auch in Bezug auf drehende Bewegung die vereinigte Wirkung aller gegebenen Kräfte zu ersetzen im Stande sind.

§. 87.

Sofern nun in den Elementen der Aufgabe, die Bestimmung der Mittelkraft betreffend, kein Widerspruch liegt, sei (wie in §. 85.) M die Intensität dieser Kraft, μ, μ', μ'' seien deren Richtungswinkel und m, m', m'' die Coordinaten ihres Angriffspunktes. Offenbar muß M die gemeinsame Wirkung von P, Q und R nicht bloß in Bezug auf fortgehende, sondern auch in Bezug auf drehende Bewegung vollkommen ersetzen. Zerlegt man sie also nach den Richtungen der drei Achsen in die Seitenkräfte $M\,\mathrm{Cos}\,\mu$, $M\,\mathrm{Cos}\,\mu'$ und

$M\,Cos\mu''$, so drücken dieſe ihr Beſtreben zur forgehenden Bewegung aus und müſſen daher bezüglich gleich P, Q und R geſetzt werden. Dies giebt alſo

(1) $M\,Cos\mu = P$; $M\,Cos\mu' = Q$; $M\,Cos\mu'' = R$.

Dieſe Gleichungen liefern nun, wenn ſie quadrirt und addirt werden:

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2; \text{ alſo } M = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2};$$

und demnächſt findet man aus ihnen:

$$Cos\mu = \frac{P}{M}; \quad Cos\mu' = \frac{Q}{M}; \quad Cos\mu'' = \frac{R}{M};$$

übereinſtimmend mit den im §. 85. gefundenen Ergebniſſen.

Ferner wird das aus der Kraft M hervorgehende Beſtreben, das Syſtem von Punkten um die Achſen OZ, OY und OX zu drehen, nach den im vorigen Parngraphen gegebenen Auseinanderſetzungen, durch $M(m\,Cos\mu' - m'\,Cos\mu)$, $M(m''\,Cos\mu - m\,Cos\mu'')$ und $M(m'\,Cos\mu'' - m''\,Cos\mu')$ ausgedrückt, wovon man ſich auch noch auf folgende Art überzeugen kann.

Um nämlich darzuthun, daß der erſte dieſer Ausdrücke das Moment von M in Bezug auf OZ als Drehachſe darſtellt, nehme man von den beiden Kräften $M\,Cos\mu$, $M\,Cos\mu'$, die in einer auf der genannten Achſe normalen Ebene enthalten ſind, die entſprechende Mittelkraft N. Stellt M'GZ'H (Fig. 57.) die genannte Ebene in ihrer geometriſchen Anſicht vor, und ſind $M'K = M\,Cos\mu$, $M'L = M\,Cos\mu'$ die auf einander ſenkrechten Seitenkräfte, ſo giebt die Diagonale M'N des Parallelogrammes M'KNL die Richtung und Größe der fraglichen Mittelkraft, und demgemäß findet man:

$N^2 = M^2\,Cos\mu^2 + M^2\,Cos\mu'^2 = M^2(Cos\mu^2 + Cos\mu'^2)$.

Aus der bekannten Formel $Cos\mu^2 + Cos\mu'^2 + Cos\mu''^2 = 1$ folgt aber:

$$\mathrm{Cos}\,\mu^2 + \mathrm{Cos}\,\mu'^2 = 1 - \mathrm{Cos}\,\mu''^2 = \mathrm{Sin}\,\mu''^2;$$

so daß man also hat

$$N^2 = M^2\,\mathrm{Sin}\,\mu''^2;\quad \text{folglich } N = M\,\mathrm{Sin}\,\mu''.$$

Offenbar würde man denselben Ausdruck erhalten haben, wenn man die Kraft unmittelbar in zwei auf einander normale Seitenkräfte zerlegt hätte, von denen die eine auf der die Achse OZ rechtwinklig schneidenden Ebene M'GZ'H im Punkte M' senkrecht, die andere aber in der genannten Ebene selbst, nach der Richtung der Projektion von M auf dieselbe, wirksam ist. Die erste Seitenkraft ergiebt sich dann $= M\,\mathrm{Cos}\,\mu''$, und diese geht, da sie mit der Drehachse parallel ist, in Hinsicht auf Drehung um dieselbe verloren. Die zweite Seitenkraft $N = M\,\mathrm{Sin}\,\mu''$ repräsentirt dagegen denjenigen Theil von M, der allein auf Drehung wirken kann, und der von Z' auf ihre Richtung M'N gefällte Perpendikel Z'N' = n stellt den Hebelsarm jener Kraft vor. Demgemäß giebt der Ausdruck

$$n \cdot N = n \cdot M\,\mathrm{Sin}\,\mu''$$

das statische Moment der Kraft N und somit auch in Bezug auf M selbst die Größe ihres Strebens nach Drehung um OZ. Man verbinde die Punkte M' und N (Fig. 57.) mit dem Punkte Z' durch gerade Linien, so erhält man das Dreieck M'NZ', welches M'N = N zur Grundlinie, Z'N' = n zur Höhe hat, und dessen Inhalt sich demnach durch $\frac{1}{2}\,N \cdot n$ ausdrückt. Mit Rücksicht auf obige Gleichung hat man daher

$$2 \cdot \Delta M'NZ' = n \cdot M\,\mathrm{Sin}\,\mu'',$$

d. h. das statische Moment der Kraft M (wie überhaupt einer beliebigen Kraft) in Bezug auf eine der drei Achsen ist allemal gleich dem doppelten Inhalt desjenigen Dreiecks, dessen Grundlinie die Projection jener Kraft auf eine die Achse senkrecht schneidende Ebene, und dessen Höhe die kürzeste Entfernung dieser Projection von derselben Achse ist.

Der Inhalt des Dreieckes $M'NZ'$ läßt sich aber noch auf folgende Weise aus der Figur berechnen. Es ist

$$\Delta M'NZ' = \Delta M'GZ' + \square M,GJN - \Delta NJZ'.$$

Aber

$$\Delta M'GZ' = \tfrac{1}{2}\cdot M'G\cdot GZ' = \tfrac{1}{2}mm';$$

$$\square M'GJN = \tfrac{1}{2}(M'G + NJ)\cdot M'L = \tfrac{1}{2}(2m + M\mathrm{Cos}\mu)\cdot M\mathrm{Cos}\mu'$$

$$\Delta NJZ' = \tfrac{1}{2}\cdot Z'J\cdot JN = \tfrac{1}{2}(m' + M\mathrm{Cos}\mu')(m + M\mathrm{Cos}\mu);$$

Substituirt man diese Inhalte und multiplizirt zugleich auf beiden Seiten mit 2, so entsteht nach gehöriger Reduction:

$$2\cdot\Delta M'NZ' = mM\mathrm{Cos}\mu' - m'M\mathrm{Cos}\mu,$$

und daher hat man als Ausdruck des fraglichen Momentes

$$n\cdot M\mathrm{Sin}\mu'' = M(m\mathrm{Cos}\mu' - m'\mathrm{Cos}\mu),$$

wie es vorhin durch andere Betrachtungen gefunden wurde. Auf dieselbe Weise läßt sich von den beiden andern Ausdrüken $M(m''\mathrm{Cos}\mu - m\mathrm{Cos}\mu'')$ und $M(m'\mathrm{Cos}\mu'' - m''\mathrm{Cos}\mu')$ zeigen, daß sie die Momente von M in Bezug auf die Achsen OY und OX darstellen.

Kehren wir nun zu der vorliegenden Aufgabe wieder zurück, so haben wir als Bedingung dafür, daß die Mittelkraft M die vereinte Wirkung der drei Kräfte P, Q und R in Bezug auf drehende Bewegung ersetzen muß, mit Rücksicht auf II. des vorigen Paragraphen, die Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} M(m\mathrm{Cos}\mu' - m'\mathrm{Cos}\mu) = qQ - p'P; \\ M(m''\mathrm{Cos}\mu - m\mathrm{Cos}\mu'') = p''P - rR; \\ M(m'\mathrm{Cos}\mu'' - m''\mathrm{Cos}\mu') = r'R - q''Q; \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich noch mehr abkürzen, wenn man auf der linken Seite für $M\mathrm{Cos}\mu$, $M\mathrm{Cos}\mu'$, $M\mathrm{Cos}\mu''$ die ihnen gleichen Werthe P, Q, R einsetzt; die rechts stehen Ausdrücke aber, welche die Momente in Bezug auf die Achsen OZ, OY und OX darstellen, bezüglich mit W, V, und U bezeichnet. Dadurch reduciren sich die obigen Gleichungen auf folgende:

$$(3)\quad \begin{cases} mQ - m'P = W; \\ m''P - mR = V; \\ m'R - m''Q = U. \end{cases}$$

Um hieraus die Coordinaten m, m', m'' des Angriffspunktes der Mittelkraft M zu finden, multiplizire man die zweite Gleichung mit Q, die dritte mit P, und addire beide Resultate; das giebt:

$$m'PR - mQR = PU + QV.$$

Hierdurch ist nun zwar m'' eliminirt, und die entstandene Gleichung in Verbindung mit der ersten enthalten nur noch m und m'. Allein wenn letztere mit R multiplizirt und dann zu der vorigen Gleichung addirt wird, so verschwinden die beiden Unbekannten m und m' zu gleicher Zeit, und man erhält

$$(4)\quad PU + QV + RW = 0;$$

eine Gleichung, welche keine der unbekannten Größen mehr enthält, und offenbar auf der Voraussetzung beruht, daß sich die Kräfte P, Q und R auch wirklich zu einer gleichgeltenden Mittelkraft zusammensetzen lassen. Sie enthält daher die Bedingung für die Beziehungen, welche zwischen diesen Kräften und den Coordinaten ihrer Angriffspunkte stattfinden müssen, damit sie überhaupt einer Mittelkraft fähig seien. Dieselbe ist allemal vorhanden, so oft die obige Bedingungsgleichung erfüllt wird, obgleich sich, wie wir gesehen haben, ein bestimmter Punkt des Systems als Angriffspunkt der Mittelkraft nicht nachweisen läßt. Inzwischen kann man die Gleichungen (3), welche in Folge der unter (4) gefundenen Bedingung unabhängig von den besondern Werthen der Coordinaten m, m' und m'' bestehen müssen, als zu den Projektionen der Richtungslinie der Mittelkraft auf die Coordinaten-Ebenen XY, XZ und YZ gehörig betrachten, und wenn man also eine von den genannten Coordinaten beliebig annimmt, so lassen sich darnach die beiden andern bestimmen.

So erhält man einen Punkt in der Richtungslinie der Mittelkraft, den man immer als deren Angriffspunkt annehmen kann, wofern derselbe mit dem System von Punkten in einer festen Verbindung gedacht wird.

§. 88.

Zusätze. 1) Setzt man in den Gleichungen (3) des vorigen Paragraphen für die Momente U, V und W die entsprechenden Werthe $Rr' - Qq''$, $Pp'' - Rr$ und $Qq - Pp'$, so entsteht

$$\begin{aligned} Qm - Pm' &= Qq - Pp', \\ Pm'' - Rm &= Pp'' - Rr, \\ Rm' - Qm'' &= Rr' - Qq'', \end{aligned}$$

welche Gleichungen sich leicht in folgende umformen lassen:

$$\begin{aligned} Q(q - m) - P(p' - m') &= 0 \\ P(p'' - m'') - R(r - m) &= 0 \\ R(r' - m') - Q(q'' - m'') &= 0. \end{aligned}$$

In dieser Gestalt beziehen sie sich nun offenbar auf ein Achsensystem, welches mit den früheren Achsen parallel ist, und dessen Anfangspunkt in einem beliebigen, durch die Coordinaten m, m', m'' bestimmten Punkt der Richtungslinie der Mittelkraft liegt, wofern eine solche überhaupt vorhanden ist. Die obigen, mit Null verglichenen Ausdrücke haben in Bezug auf die neuen Achsen dieselbe Bedeutung, wie die Größen W, V und U in Bezug auf die früheren; sie stellen nämlich die Momente der in Rede befindlichen Kräfte gegen die mit OZ, OY, OX parallelen Achsen vor. Der Sinn jener Gleichungen besteht also darin, daß aus der vereinigten Wirkung aller Kräfte kein Bestreben hervorgehen kann, eine Drehung des Systems von Punkten um diese neuen Achsen zu veranlassen, vorausgesetzt, daß alle Kräfte auf eine einzige, ihnen gleichgeltende Kraft zurückgeführt werden können.

2) Eben so läßt sich die im vorigen Paragraphen ge-

fundene Bedingungsgleichung (4) für das Daſein einer Mittelkraft durch Einſetzung der Werthe für U, V und W folgendergeſtalt darſtellen:

$$P(Rr' - Qq'') + Q(Pp'' - Rr) + R(Qq - Pp') = 0.$$

Dieſelbe reducirt ſich aber, wenn man die Klammern auflöſt und die gleichartigen Glieder zuſammenfaßt, auf nachſtehende Gleichung:

$$PQ(p'' - q'') - PR(p' - r') + QR(q - r) = 0.$$

Die Bedingung, welche die in Rede befindlichen drei Kräfte durch ihre Intenſitäten und Stellungen gegen einander zu erfüllen haben, damit ſie einer gemeinſamen Mittelkraft fähig ſeien, beſteht alſo darin, daß die algebraiſche Summe der Produkte aus je zweien von ihnen in die Differenz der Abſtände ihrer Richtunglinien von der Coordinatenebene, mit der ſie parallel ſind, gleich Null ſein muß.

3) Für den ſchon im §. 85. erwähnten beſondern Fall, daß ſich alle drei Kräfte in einem und demſelben Punkte ſchneiden, hat man $p'' = q''$, $p' = r'$ und $q = r$; die Glieder der vorigen Bedingungsgleichung ſind alſo dann einzeln gleich Null, und die Gleichung wird für jeden Werth von P, Q und R erfüllt, ſo daß dieſe Kräfte in dem vorliegenden Falle jedesmal eine Mittelkraft haben.

4) Schneiden ſich nur zwei von den drei Kräften, etwa die beiden mit der Ebene XY parallelen Kräfte P und Q, ſo ſind ihre Abſtände p'' und q'' von dieſer Ebene einander gleich und die vorige Gleichung reducirt ſich dann auf folgende:

$$P(p' - r') = Q(q - r);$$

woraus ſich $P : Q = q - r : p' - r'$ ergiebt.

Eine Mittelkraft iſt in dieſem Falle nur dann möglich, wenn die Intenſitäten von P und Q ſich umgekehrt wie die normalen Entfernungen dieſer Kräfte von der dritten Kraft

R verhalten; und dieſe Bedingung kann, wie eine kleine Ueberlegung bald zeigt, nur dadurch erfüllt werden, daß die Mittelkraft der beiden erſten Kräfte mit der dritten Kraft in einer Ebene liegt, und ſich alſo mit dieſer Kraft ſchneidet.

§. 89.

In dem Vorhergehenden haben wir die Bedingungen kennen gelernt, unter welchen drei Kräfte, die im Raum eine rechtwinklige Lage gegen einander haben, zu einer Mittelkraft vereinigt werden können. Auch iſt gezeigt worden, daß im Allgemeinen jedes Syſtem von Kräften, die nach beliebigen Richtungen im Raume wirken, durch Zerlegung nach drei auf einander normalen Achſen immer zurückgeführt werden kann, auf drei mit dieſen Achſen parallelen Kräfte, welche die vereinigte Wirkung des gegebenen Syſtems in Abſicht auf fortgehende und drehende Bewegung vollkommen erſetzen. Daraus folgt alſo, daß dieſelbe Bedingung, an welcher das Daſein einer Mittelkraft für drei auf einander normalen Kräfte geknüpft iſt, in ganz gleicher Weiſe auch für beliebige Kräfte im Raume gelten muß, von welchen jene die partiellen Mittelkräfte ſind. Dieſe Bedingung drückt aber die Gleichung aus:

I. $$PU + QV + RW = 0,$$

und wenn dieſelbe auf das in §. 84. gegebene Syſtem von Kräften angewendet wird, dann haben die in der Gleichung vorkommenden Größen folgende Bedeutungen

II. $$P = \Sigma A \operatorname{Cos}\alpha;\ Q = \Sigma A \operatorname{Cos}\alpha';\ R = \Sigma A \operatorname{Cos}\alpha''.$$

III. $$\begin{cases} U = \Sigma A(a' \operatorname{Cos}\alpha'' - a'' \operatorname{Cos}\alpha'); \\ V = \Sigma A(a'' \operatorname{Cos}\alpha - a \operatorname{Cos}\alpha''); \\ W = \Sigma A(a \operatorname{Cos}\alpha' - a' \operatorname{Cos}\alpha). \end{cases}$$

Sind dieſe Ausdrücke ſo beſchaffen, daß ſie der obigen Gleichung ein Genüge leiſten, dann hat das Syſtem eine Mittelkraft, ſonſt aber nicht. Im letztern Falle iſt es aber

immer möglich, die gegebenen Elemente, durch welche die Kräfte des Systems in Absicht auf Richtung, Intensität und Angriffspunkt bestimmt werden, so zu ändern, daß dadurch der Widerspruch gegen jene Bedingungsgleichung gehoben wird. Hiezu bedarf es nur der Bestimmung von einem dieser Elemente, das man aus der obigen Gleichung I. wie eine unbekannte Größe entwickeln kann. Nimmt man z. B. die Coordinate a als unbekannt an, so kömmt diese Größe nur in den unter III. enthaltenen Ausdrücken V und W vor, und wenn man sie herauszieht, so stellen sich diese Ausdrücke also dar:

$$V = V' - aA\,Cos\,\alpha''; \quad W = W' + aA\,Cos\,\alpha'.$$

Substituirt man dieselben in der Bedingungsgleichung I. und entwickelt daraus a, so kommt

$$a = \frac{PU + QV' + RW'}{A(Q\,Cos\,\alpha'' - R\,Cos\,\alpha')}.$$

Nachdem man nun diesem Resultate gemäß die als Beispiel gewählte Coordinate abgeändert hat, so ist damit der erwähnte Widerspruch gegen die Bedingungsgleichung vollständig gehoben, und es kann nunmehr zur Bestimmung der Mittelkraft geschritten werden. Dieselbe erfolgt demnächst nach der im §. 87. gegebenen Anleitung und bietet durchaus keine Schwierigkeiten mehr dar.

§. 90.

Bedingungen des Gleichgewichtes. In §. 86. sind die Wirkungen nachgewiesen, welche die im Raume gegebenen Kräfte A, B, C, ... ꝛc. ausüben, wenn sie nicht im Gleichgewichte sind, und zwar drücken die dort gefundenen Gleichungen I. diese Wirkungen in Bezug auf fortgehende Bewegung nach den drei Achsen, die Gleichungen II. aber in Bezug auf drehende Bewegung um diese Achsen aus. Werden nun die Kräfte als im Gleichgewichte vorausge-

ſetzt, ſo können ſie keine von dieſen Wirkungen ausüben, und man muß alſo die dafür gefundenen Ausdrücke ſämmtlich gleich Null ſetzen. Das giebt dann folgende ſechs Bedingungsgleichungen:

$$(1)\quad \Sigma A\,\mathrm{Cos}\,\alpha = 0;\ \Sigma A\,\mathrm{Cos}\,\alpha' = 0;\ \Sigma A\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' = 0.$$

$$(2)\quad \begin{cases} \Sigma A(a'\,\mathrm{Cos}\,\alpha'' - a''\,\mathrm{Cos}\,\alpha') = 0; \\ \Sigma A(a''\,\mathrm{Cos}\,\alpha - a\,\mathrm{Cos}\,\alpha'') = 0; \\ \Sigma A(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha' - a'\,\mathrm{Cos}\,\alpha) = 0. \end{cases}$$

Die drei erſten Gleichungen drücken aus, daß keine fortgehende, die drei andern, daß keine drehende Bewegung entſtehen kann; alle ſechs ſind demnach zur Bedingung des Gleichgewichtes erforderlich, aber auch hinreichend.

Was nun die Gleichung (4) in §. 87. betrifft; nämlich

$$PU + QV + RW = 0;$$

ſo fällt dieſe für den Fall des Gleichgewichtes von ſelbſt fort; denn da die Größen P, Q, R und U, V, W in Folge der obigen ſechs Bedingungs-Gleichungen einzeln gleich Null ſind, ſo hat die angezogene Gleichung keine Bedeutung mehr.

Wenn umgekehrt die erwähnten Bedingungsgleichungen gegeben ſind, ſo kann man daraus ſofort auf das Vorhandenſein des Gleichgewichtes ſchließen; denn in Folge jener Gleichungen läßt ſich jede Kraft leicht als die entgegengeſetzte Mittelkraft aller übrigen Kräfte des Syſtems nachweiſen, was jedoch dem eigenen Fleiße des Leſers überlaſſen bleiben möge. — Die obigen Gleichungen ſind demnach allemal als ſichere Kennzeichen des Gleichgewichtes zu betrachten.

Viertes Kapitel.

Vom Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

§. 91.

Wenn man in der Ebene, welche die Richtungslinie einer Kraft A (Fig. 58.) enthält, einen beliebigen Punkt P' annimmt und dieſen mit dem materiellen Punkte P, worauf die genannte Kraft wirkt, durch eine gerade Linie P'P verbindet, ſo nennt man die Projection Pp dieſer Verbindungslinie auf die Richtungslinie PA die virtuelle Geſchwindigkeit des materiellen Punktes nach der Richtung der auf ihn wirkenden Kraft, oder die Größe des Strebens nach Geſchwindigkeit.

Das Produkt aus der Zahl, welche die Größe der Kraft A angiebt, in diejenige Zahl, wodurch die Länge der Projection Pp ausgedrückt wird, ſoll virtuelles Moment der Kraft heißen. Iſt nämlich der materielle Punkt P durch eine anderweitige Thätigkeit nach P' gebracht, ohne daß dabei die Richtung der Kraft geändert wurde, ſo ſtellt die Projection Pp den Weg vor, den der materielle Punkt im Sinne der auf ihn wirkſamen Kraft durchlaufen hat; d. h. wenn man ſich vorſtellt, das Beſtreben der Kraft beſtehe darin, den materiellen Punkt P der auf ihrer Richtung normalen Linie XY — dem Ziele der Kraft — näher zu

bringen, so wird, indem der Punkt von P nach P' fortgerückt ist, das Stück Pp seine Annäherung an die Linie XY repräsentiren. Sofern nun P einer der materiellen Punkte von einem sich, im Gleichgewicht befindlichen Systeme ist, so kann die so eben angenommene Bewegung nicht Statt finden, obwohl sie von der wirksamen Kraft stets angeregt wird, und es ist aus diesem Grunde, daß man jene Projection die Größe des Strebens nach Geschwindigkeit, oder virtuelle Geschwindigkeit genannt hat.

§. 92.

Um die virtuellen Geschwindigkeiten in die Rechnung aufnehmen zu können, bezeichne man die Länge PP' (Fig. 58.) mit x, und den Winkel, den diese Linie mit der Richtungslinie PA bildet, mit α; so ist

$$Pp = x \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

So lange der Winkel α spitz ist, wird die virtuelle Geschwindigkeit Pp positiv sein und auf der Richtungslinie PA selbst liegen; ist aber α ein stumpfer Winkel, also $\mathrm{Cos}\,\alpha$ negativ, so ergiebt sich auch die virtuelle Geschwindigkeit Pp negativ und fällt auf die Verlängerung der genannten Richtungslinie (Fig. 59.). Im ersten Falle stellt die virtuelle Geschwindigkeit eine Annäherung zu dem Ziele der Kraft, im letzteren aber eine Entfernung von demselben vor.

Ist α ein rechter Winkel, also die Bewegung PP' (Fig. 60.) senkrecht auf der Richtung der Kraft, oder parallel mit der auf ihr normalen Linie XY, so ist die virtuelle Geschwindigkeit = 0, d. h. der materielle Punkt ist dieser Linie weder genähert noch davon entfernt worden.

Wenn ferner der Winkel $\alpha = 0$ oder $= 180°$, also die virtuelle Geschwindigkeit Pp entweder gleich $x\,\mathrm{Cos}\,0 = x$, oder gleich $x\,\mathrm{Cos}\,180° = -x$ ist, so hat die Bewegung des materiellen Punktes P auf der Richtungslinie der Kraft selbst Statt gefunden, und das positive x bezeichnet eine Annähe-

rung, das negative aber, eine Entfernung des materiellen Punktes von der Linie XY.

Aus dieser Auseinandersetzung können wir nun, in Bezug auf die algebraischen Vorzeichen der virtuellen Momente, den Schluß ziehen, daß dieselben in allen Fällen positiv sein werden, wenn die zugehörigen virtuellen Geschwindigkeiten auf den Richtungslinien der Kräfte selbst; negativ hingegen, wenn sie auf den Verlängerungen derselben liegen.

§. 93.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist ein statisches Gesetz, welches von Johann Bernoulli[1]) im Anfange des vorigen Jahrhunderts gefunden, und von Lagrange in seiner **Mécanique analytique** als erster Grundsatz der Statik aufgestellt wurde. Es besteht in folgendem Lehrsatze:

„Wirken mehrere Kräfte nach beliebigen Richtungen „auf ein System von Punkten und sind mit einander „im Gleichgewicht, so ist für jede nur denkbare Bewe„gung des Systems, sowohl fortgehende, als auch dre„hende und krummlinige Bewegung, jedesmal die alge„braische Summe der virtuellen Momente gleich Null."

Wir wollen dies Gesetz in den folgenden Paragraphen zuerst für ein festes, nächstdem aber für ein loses System von Punkten, wie auch die Kräfte darauf wirken mögen, bewei-

---

1) In dem Briefe, den Joh. Bernoulli im Jahre 1717 an Varignon geschrieben und den dieser in seiner: Nouvelle mécanique ou statique. Ouvrage posthume. Paris 1725. auf pag. 175—176 des zweiten Theils mittheilt, nennt er die Produkte aus den Intensitäten der Kräfte in die zugehörigen virtuellen Geschwindigkeiten „Énergies des forces", und sagt dann, daß im Falle eines Gleichgewichtes: „la somme des Énergies affirmatives sera égale à la somme des Énergies négatives, prises affirmativement."

sen. Dabei wird sich zugleich ergeben, wiefern die in den vorhergehenden Kapiteln für ein System der ersten Art gefundenen Bedingungsgleichungen auf ein System der letzten Art Anwendung finden, oder welche Modifikationen sie in dieser Hinsicht zu erleiden haben.

I. Beweis des Princips für ein festes System.

§. 94.

Drei Kräfte an einem Punkte wirksam. Sind die drei Kräfte **A**, **B** und **C** unter den ihnen gegenüber liegenden Winkeln α, β und γ am Punkte **P** (Fig. 61.) mit einander im Gleichgewichte, so hat man nach §. 39. die Bedingung:

$$(1) \qquad A : B : C = \mathrm{Sin}\alpha : \mathrm{Sin}\beta : \mathrm{Sin}\gamma.$$

Man denke sich nun den materiellen Punkt **P** nach **p** fortgerückt, jedoch ohne dabei die Richtungen der Kräfte zu ändern, und fälle aus **p** auf die Richtungslinien **PA**, **PB**, **PC** die Perpendikel **pa**, **pb** und **pc**, so liegen die Punkte **a**, **b**, **c** in der Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser die Linie **Pp** ist, und die Sehnen **Pa**, **Pb**, **Pc** repräsentiren, zufolge der aufgestellten Definition, die virtuellen Geschwindigkeiten der gegebenen Kräfte. Verbindet man die Punkte **a**, **b**, **c** durch gerade Linien mit einander, so erhält man das im Kreise liegende Viereck **Pabc**, aus welchem sich, nach dem bekannten ptolemäischen Lehrsatze, folgende Gleichung entnehmen läßt:

$$(2) \qquad ac \cdot Pb = bc \cdot Pa + ab \cdot Pc.$$

Im Dreieck **abc** verhält sich nun bekanntlich

$$ac : bc : ab = \mathrm{Sin}abc : \mathrm{Sin}bac : \mathrm{Sin}acb;$$

aber nach bekannten Lehrsätzen der Geometrie ist:

$\angle abc = 180^0 - \beta$; folglich $\sin abc = \sin\beta$;
$\angle bac = \angle bPc = 180^0 - \alpha$; „ $\sin bac = \sin\alpha$;
$\angle acb = \angle aPb = 180^0 - \gamma$; „ $\sin acb = \sin\gamma$;

folglich entsteht, wenn man diese Werthe in der vorigen Proportion substituirt:

$$ac : bc : ab = \sin\beta : \sin\alpha : \sin\gamma;$$

oder mit Rücksicht auf die, als Bedingung des Gleichgewichts stattfindende Proportion (1)

$$ac : bc : ab = B : A : C.$$

Hieraus erhält man nun leicht die Vergleichungen:

$$\frac{bc}{ac} = \frac{A}{B}, \text{ oder } bc = ac \cdot \frac{A}{B};$$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{C}{B}, \text{ „ } ab = ac \cdot \frac{C}{B}.$$

und wenn man diese Ausdrücke an die Stelle von bc und ab in der Gleichung (2) substituirt, so kommt

$$ac \cdot Pb = ac \cdot \frac{A}{B} \cdot Pa + ac \cdot \frac{C}{B} \cdot Pc.$$

Diese Gleichung läßt sich mit ac dividiren, und wenn man sie dann mit B noch multiplicirt, so erhält man:

$$B \cdot Pb = A \cdot Pa + C \cdot Pc.$$

Sofern man nun die Kraft B nach der PB gerade entgegengesetzten Richtung Pb wirken läßt, wird sie die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte A und C vorstellen, und die virtuelle Geschwindigkeit Pb ist positiv, weil sie auf der Richtungslinie selbst liegt. Demgemäß folgt aus der obigen Gleichung, daß das virtuelle Moment der Mittelkraft gleich ist der Summe von den virtuellen Momenten der beiden Seitenkräfte.

Wenn man aber gegentheils die Kraft B als mit A und C im Gleichgewicht seiend ansieht, so liegt ihre virtuelle Geschwindigkeit Pb nicht auf der Richtungslinie PB selbst,

sondern auf deren Verlängerung, und muß daher, zufolge §. 92., als negativ in der Rechnung erscheinen. Dies wird auch der Fall sein, wenn man die vorige Gleichung auf Null bringt, wodurch man erhält:

$$0 = A \cdot Pa - B \cdot Pb + C \cdot Pc,$$

und dies ist die, dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entsprechende Gleichung, welches also hiedurch für das Gleichgewicht dreier Kräfte an einem Punkte bestätigt ist.

§. 95.

Wir haben die vorige virtuelle Momenten-Gleichung unter der speciellen Voraussetzung gefunden, daß die Linie Pp, längs welcher die Bewegung des materiellen Punktes angenommen wurde, zwischen den Richtungslinien der Kräfte A und C liege, wodurch die Momente dieser Kräfte positiv wurden, während das Moment der dritten Kraft B negativ ausfiel. Man wird leicht einsehen, daß wenn die angenommene Bewegung längs einer Linie erfolgt wäre, die zwischen den Richtungen der Kräfte A, B oder B, C liegt, alsdann im ersten Falle die Gleichung:

$$0 = A \cdot Pa + B \cdot Pb - C \cdot Pc;$$

im zweiten Falle aber die Gleichung

$$0 = -A \cdot Pa + B \cdot Pb + C \cdot Pc$$

entstanden sein würde.

Nimmt man ferner die Bewegung des materiellen Punktes nach einer Linie Pp (Fig. 62.) an, die auf der Richtung von einer der drei Kräfte, z. B. auf C, senkrecht steht, so ist die virtuelle Geschwindigkeit dieser Kraft gleich Null; folglich erhält man, indem man in den vorigen Gleichungen $Pc = 0$ setzt,

$$0 = \pm A \cdot Pa \mp B \cdot Pb; \text{ oder } A \cdot Pa = B \cdot Pb,$$

woraus sich die Proportion bilden läßt:

$$A : B = Pb : Pa.$$

Diese Proportion läßt sich auch leicht, unabhängig von den vorigen Gleichungen, aus der Betrachtung der 62sten Figur ableiten. Denn vorausgesetzt, daß Pp senkrecht auf PC ist, und daß man durch die, aus dem Punkte p auf die Richtungen der Kräfte A und B gefällten Perpendikel pa, pb die virtuellen Geschwindigkeiten Pa und Pb abgeschnitten hat, so wird der über Pp als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Punkte a und b gehen, und die Richtungslinie PC in P berühren. Zieht man nun die Verbindungslinie ab, so verhält sich im Dreieck Pab

$$Pa : Pb = \mathrm{Sin}\,Pba : \mathrm{Sin}\,Pab.$$

Nach einem bekannten geometrischen Lehrsatze vom Kreise hat man nun:

$\angle Pba = \angle APq = 180° - \beta$; also $\mathrm{Sin}\,Pba = \mathrm{Sin}\,\beta$;

$\angle Pab = \angle CPb = 180° - \alpha$; „ $\mathrm{Sin}\,Pab = \mathrm{Sin}\,\alpha$;

und daher $Pa : Pb = \mathrm{Sin}\,\beta : \mathrm{Sin}\,\alpha$.

Aber wegen des vorhandenen Gleichgewichtes verhält sich auch

$$B : A = \mathrm{Sin}\,\beta : \mathrm{Sin}\,\alpha;$$

folglich erhält man durch Vereinigung dieser beiden Proportionen:

$$A : B = Pb : Pa.$$

Wenn also zwei Kräfte mit einer dritten Kraft, die man sich auch als irgend einen festen Widerstand denken kann, im Gleichgewichte sind, und man nimmt eine auf die Richtung des Widerstandes C normale Bewegung an, so verhalten sich die beiden Kräfte A und B umgekehrt wie die zugehörigen virtuellen Geschwindigkeiten.

Dieser besondere Fall ist unter dem Namen des Carteſiſchen Grundſatzes bekannt.

§. 96.

Beiſpiel zur Anwendung. Man stelle sich z. B. unter Pp (Fig. 63.) eine durchaus feste und unbiegsame

Linie vor, über welcher sich ein Ring P frei hin und her schieben läßt. An diesem Ringe seien die Kräfte A und B so wirksam, daß sie denselben im Gleichgewicht erhalten; alsdann wird die feste Linie nach einer auf ihr normalen Richtung einen Druck C erleiden, welcher der Mittelkraft von A und B gleich ist. Denkt man sich nun den Ring durch irgend eine anderweitige Thätigkeit längs der festen Linie von P nach p fortgeschoben, und dann von p auf die Richtungen der beiden, im Gleichgewicht befindlichen Kräfte die Perpendikel pa und pb gefällt, so sind Pa und Pb die virtuellen Geschwindigkeiten, und damit die angenommene, einzig mögliche, Bewegung des Ringes nicht Statt finden kann, muß sich dem Carteſiſchen Grundsatze gemäß verhalten:

$$A : B = Pb : Pa.$$

Sind α und β die Winkel, welche die Richtungen der fraglichen Kräfte mit der festen Linie bilden, so hat man $Pa = Pp \cdot \cos\alpha$ und $Pb = Pp \cdot \cos\beta$; also

$$A : B = \cos\beta : \cos\alpha,$$

oder

$$A \cdot \cos\alpha = B \cdot \cos\beta.$$

Diese Vergleichung hätte man auch durch Anwendung des Parallelogrammes der Kräfte finden können; denn die letzten Ausdrücke geben die Seitenkräfte von A und B nach der Richtung der festen Linie, welche offenbar einander gleich sein müssen, wofern Gleichgewicht stattfinden soll.

§. 97.

Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für fortgehende Bewegung, wenn beliebige Kräfte auf ein festes System von Punkten im Raume wirken. Es seien A, B, C ··· ꝛc. die Intensitäten der Kräfte, welche an den zu einem festen System mit einander verbundenen Punkten A′, B′, C′ ··· ꝛc. wirken und sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Läßt man diesem

Systeme nach irgend einer Richtung hin eine fortgehende Bewegung machen, ohne es dabei zu drehen, so ist klar, daß alle materiellen Punkte desselben parallele und gleiche Wege durchlaufen, deren gemeinschaftliche Länge wir mit x bezeichnen wollen. Die aus den Endpunkten dieser gleichen Wege auf die Richtungslinien der Kräfte gefällten Perpendikel schneiden auf denselben die virtuellen Geschwindigkeiten ab, und diese sollen bezüglich mit a, b, c, ... ꝛc. bezeichnet werden.

In Bezug auf fortgehende Bewegung überhaupt finden nun nach §. 90. drei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts statt, von welcher die Gleichung

$$\Sigma A \cos\alpha = A\cdot\cos\alpha + B\cdot\cos\beta + C\cdot\cos\gamma + \cdots \text{ ꝛc.} = 0,$$

für diejenige Richtung gilt, gegen welche die Kräfte unter den Winkeln α, β, γ ... ꝛc. geneigt sind. Nimmt man dieselbe mit der Richtung der willkürlich veranlaßten Bewegung des Systems parallel an, was allemal zulässig ist, so werden α, β, γ ... ꝛc. zugleich die Winkel sein, welche die von der materiellen Punkten beschriebenen Wege mit den Richtungslinien der Kräfte bilden, und die Produkte $x\cdot\cos\alpha$, $x\cdot\cos\beta$, $x\cdot\cos\gamma$ ... ꝛc. drücken, mit Rücksicht auf §. 92., nach der Reihe die virtuellen Geschwindigkeiten a, b, c ... ꝛc. dieser Kräfte aus. Um also den vorliegenden Zweck zu erreichen, hat man nur nöthig, die vorhin als Voraussetzung angeführte Bedingungsgleichung des Gleichgewichts mit der Länge x zu multipliziren, wodurch man erhält:

$$Ax\cos\alpha + Bx\cos\beta + Cx\cos\gamma \cdots \text{ ꝛc.} = 0,$$

und indem man darin für $x\cos\alpha$, $x\cos\beta$, $x\cos\gamma$ ... ꝛc. die gleichen Werthe a, b, c ... ꝛc. einsetzt, so ergiebt sich die virtuelle Momentengleichung

$$Aa + Bb + Cc + \cdots \text{ ꝛc.} = 0,$$

welche nunmehr, mit Berücksichtigung der algebraischen Vorzeichen, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf fortgehende Bewegung ausspricht.

Hätte man sämmtliche Kräfte als parallel mit einander vorausgesetzt, so würde der obige Beweis noch einfacher ausgefallen sein, weil dann nicht blos die mit x bezeichneten Wege der Angriffspunkte, sondern auch deren Projektionen auf die Richtungslinien der Kräfte, d. h. die virtuellen Geschwindigkeiten der letztern, sich als gleich ergeben hätten. Auch erhellet leicht, daß der Beweis ganz eben so für Kräfte gilt, die nach beliebigen Richtungen auf einen und denselben Punkt wirken.

Uebrigens verdient bemerkt zu werden, daß die obige Herleitung von der Größe der angenommenen Parallelbewegung ganz unabhängig ist, was bei einer krummlinigen Bewegung, zu deren Betrachtung wir sogleich übergehen werden, allgemein genommen nicht mehr der Fall ist.

§. 98.

Beweis des Princips für drehende Bewegung um feste Achsen. Es wurde vorhin bemerkt, daß das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf fortgehende Bewegung, wobei die materiellen Punkte des festen Systems parallele und gleiche Wege durchlaufen, von der Größe dieser Bewegung ganz unabhängig sei, so daß die genannten Wege beliebig groß oder klein angenommen werden können.

In Bezug auf drehende Bewegung, welche jetzt der Gegenstand unserer Betrachtung sein soll, muß nun aber eine Beschränkung eintreten, darin bestehend, daß wir nur unendlich kleine Ortsveränderungen der materiellen Punkte voraussetzen. Daß hierdurch der Allgemeinheit des zu beweisenden Gesetzes kein Eintrag geschieht, wird sofort einleuchten, sobald man nur die Voraussetzung eines vollkommenen Gleichgewichtes vor Augen behält. Denn sind die auf das System wirkenden Kräfte mit einander im Gleichgewicht, so können sie überhaupt keine, selbst nicht unendlich kleine Ortsverände-

rungen hervorbringen, und umgekehrt, finden diese nicht statt, so sind die Kräfte gewiß im Gleichgewicht. Dabei ist nicht zu übersehen, daß der erste Anfang einer jeden Bewegung immer nur in einer unendlich kleinen Ortsveränderung bestehen kann.

Von der oben erwähnten Einschränkung ist indessen ein besonderer Fall ausgenommen, derjenige nämlich, wo die gegebenen Kräfte normal an unbiegsamen Linien wirken, die hinsichtlich der angenommenen Drehachse ihre Hebelsarme, im Sinne der in §. 60 gegebenen Definition, vorstellen; überdies müssen ihre Richtungslinien entweder alle in einer Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, auf welchen die Drehachse senkrecht ist. Dieser besondere Fall findet unter andern statt, wenn die Richtungslinien der Kräfte Tangenten zu parallelen Kreisen bilden, deren Mittelpunkte in der gemeinschaftlichen Drehachse liegen; oder, wenn man sich jene Richtungslinien als vollkommen biegsame Fäden denkt, welche über die Umfänge paralleler, mit einer gemeinsamen Drehachse zu einem festen System verbundener Kreisscheiben gelegt sind. Der folgende §. ist der nähern Erörterung dieses Falles gewidmet.

§. 99.

Es seien A, B, C... ꝛc. die Intensitäten der gegebenen Kräfte; $PA' = a$, $PB' = b$, $PC' = c$ ... ꝛc. (Fig. 64) die unbiegsamen Linien, an deren Endpunkten die Kräfte nach Richtungen wirken, die auf den genannten Linien normal sind. Dabei kann man sich vorstellen, daß die Richtungslinien A'A, B'B, C'C... ꝛc. entweder alle in der Ebene liegen, worin sie gezeichnet sind; oder, daß sie sich in verschiedenen Ebenen befinden, die mit jener parallel sind. Im letzteren Falle kann man sich unter den Linien A'A, B'B, C'C... ꝛc. die Projectionen der Richtungslinien auf die Ebene der Tafel denken; so wie der Punkt P die Projection der,

auf den genannten Ebenen senkrechten Drehachse vorstellt. Ferner muß man sich die Angriffspunkte A', B', C'... ꝛc., oder, was dasselbe ist, die parallelen Ebenen, worin die wirksamen Kräfte befindlich sind, mit einander in einer so festen Verbindung denken, daß keine derselben eine drehende Bewegung annehmen kann, ohne daß alle andern sich gleichzeitig mit drehen.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, das System habe eine beliebige Drehung um die Achse P erlitten; dann werden alle Angriffspunkte concentrische Bögen A'A'', B'B'', C'C''... ꝛc. beschreiben, die zu demselben Drehungswinkel φ gehören. Damit nun die Kräfte in Bezug auf diese angenommene Drehung im Gleichgewichte seien, so findet bekanntlich die statische Momenten-Gleichung statt:

$$(1) \qquad Aa + Bb + Cc + \ldots \text{ ꝛc.} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\operatorname{Sin}\varphi$, so entsteht

$$Aa\operatorname{Sin}\varphi + Bb\operatorname{Sin}\varphi + Cc\operatorname{Sin}\varphi + \ldots \text{ ꝛc.} = 0.$$

Sofern nun die Kräfte in der veränderten Lage des Systemes noch mit ihren ursprünglichen Richtungen parallel wirken, werden die Producte $a\operatorname{Sin}\varphi$, $b\operatorname{Sin}\varphi$, $c\operatorname{Sin}\varphi$... ꝛc. ihre virtuellen Geschwindigkeiten A'a', B'b', C'c'... ꝛc. darstellen, und wenn man diese nach der Reihe mit a', b', c'.. ꝛc. bezeichnet, so hat man

$$(2) \qquad Aa' + Bb' + Cc' + \ldots \text{ ꝛc.} = 0;$$

eine Gleichung, welche das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf Drehung ausspricht.

Es wurde so eben vorausgesetzt, daß die Richtungen der Kräfte während der Drehung nicht geändert sind. Bleiben aber die Letzteren an den Bögen, die ihre Angriffspunkte beschreiben, stets tangential wirksam, so multiplicire man die statische Momenten-Gleichung

$$Aa + Bb + Cc + \ldots \text{ ꝛc.} = 0$$

mit φ, wo der gemeinschaftliche Drehungswinkel φ in Bo-

genmaaß für den Halbmesser = 1 zu verstehen ist; alsdann kommt

$$Aa\varphi + Bb\varphi + Cc\varphi + \ldots \text{ ꝛc.} = 0.$$

Nun sind, wie man leicht aus der Figur sehen kann, die Producte $a\varphi$, $b\varphi$, $c\varphi$... ꝛc. nichts anderes, als die von den Angriffspunkten beschriebenen Bögen A'A", B'B", C'C"... ꝛc. für die Halbmesser a, b, c... ꝛc.; folglich hat man, indem man diese Bögen mit α, β, γ... ꝛc. bezeichnet, die Gleichung

$$(3) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots \text{ ꝛc.} = 0.$$

d. h. wenn das System von Kräften im Gleichgewichte ist, und man denkt sich durch eine anderweitige Thätigkeit eine drehende Bewegung erzeugt, so ist die algebraische Summe der Producte, die man erhält, indem man die Intensitäten der Kräfte mit den von ihren Angriffspunkten beschriebenen Bögen multiplicirt, gleich Null.

§. 100.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für den besondern Fall bewiesen haben, wo eine Drehung von beliebiger Größe zulässig war, wenden wir uns jetzt zu dem allgemeineren Fall, wo die Kräfte auf ein ganz beliebiges System von Punkten wirken. Hiebei muß nun die Einschränkung eintreten, von welcher in §. 98 die Rede war, so wie wir auch die im vor. §. gemachte Voraussetzung, daß die Richtungslinien aller Kräfte entweder in einer und derselben, oder in parallelen Ebenen enthalten sind, vorläufig noch beibehalten müssen.

Zu dem Ende seien A, B, C ... ꝛc. die Intensitäten der Kräfte, welche auf die materiellen Punkte A', B', C'... ꝛc. (Fig. 65) nach verschiedenen Richtungen wirken. Die Richtungslinien A'A, B'B, C'C ... ꝛc. mögen sich mit den genannten materiellen Punkten in derselben Ebene befinden, welche die der Figurentafel sein mag.

Nimmt man nun an, daß diese Ebene eine unendlich kleine Drehung um irgend einen ihrer Punkte P, durch den man sich eine feste Achse normal auf der Ebene zu denken hat, erlitten habe, so beschreiben die Angriffspunkte concentrische Bögen $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$... ꝛc., die zu demselben Drehungswinkel φ gehören. Die von den Punkten A'', B'', C''... ꝛc. auf die Richtungslinien der Kräfte gefällten Perpendikel bestimmen auf ihnen die virtuellen Geschwindigkeiten $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$... ꝛc. der gegebenen Kräfte, und es kommt nun darauf an zu beweisen, daß die Gleichung statt findet:

$$A \cdot A'a' + B \cdot B'b' + C \cdot C'c' + \ldots \text{ ꝛc.} = 0.$$

Damit nun in Bezug auf jede mögliche Drehung, und also auch hinsichtlich der so eben angenommenen, ein Gleichgewicht vorhanden sei, hat man nach §. 82 (3) die Bedingungs-Gleichung:

$$Aa + Bb + Cc + \ldots \text{ ꝛc.} = 0;$$

wo a, b, c ... ꝛc. die Hebelsarme der Kräfte, also die Längen der vom Drehungspunkte P auf ihre Richtungslinien gefällten Perpendikel $PA_{,,}$, $PB_{,,}$, $PC_{,,}$ ... ꝛc. bedeuten.

Die Längen der von den Angriffspunkten beschriebenen Kreisbögen können wie folgt ausgedrückt werden:
$A'A'' = PA' \cdot \varphi$; $B'B'' = PB' \cdot \varphi$; $C'C'' = PC' \cdot \varphi$; ꝛc.
wofern man φ in Bogenmaaß für den Halbmesser $= 1$ versteht, und da die genannten Bögen als unendlich klein gedacht werden, so kann man sie als gerade Linien betrachten, die auf den Verbindungslinien PA', PB', PC' ... ꝛc. der Angriffspunkte mit dem Drehungspunkte P normal sind. Unter dieser Voraussetzung lassen sich folgende Dreiecke leicht als ähnlich nachweisen:

$$\Delta A'PA_{,,} \sim \Delta A'A''a';$$
$$\Delta B'PB_{,,} \sim \Delta B'B''b';$$
$$\Delta C'PC_{,,} \sim \Delta C'C''c'; \text{ u. s. w.}$$

weil sie nämlich alle rechtwinklig, und ihre homologen Seiten auf einander senkrecht sind. Hieraus ergeben sich nun die Proportionen:

$$PA' : PA_{,,} = A'A'' : A'a';$$
$$PB' : PB_{,,} = B'B'' : B'b';$$
$$PC' : PC_{,,} = C'C'' : C'c';\ \text{u. s. w.}$$

oder, wenn man für die Hebelsarme $PA_{,,}$, $PB_{,,}$, $PC_{,,}$... ꝛc. und für die Bögen $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$... ꝛc. die entsprechenden Werthe von vorhin einsetzt:

$$PA' : a = PA' \cdot \varphi : A'a';$$
$$PB' : b = PB' \cdot \varphi : B'b';$$
$$PC' : c = PC' \cdot \varphi : C'c';\ \text{u. s. w.}$$

Aus diesen Proportionen findet man folgende Werthe der unendlich kleinen virtuellen Geschwindigkeiten:

$$A'a' = a\varphi;\ B'b' = b\varphi;\ C'c' = c\varphi;\ \text{u. s. w.}$$

Wenn man also die statische Momenten-Gleichung, welche das Gleichgewicht in Bezug auf Drehung bedingt, mit dem Maaße φ des Drehungswinkels multiplicirt, so erhält man

$$A \cdot a\varphi + B \cdot b\varphi + C \cdot c\varphi + \cdots \text{ ꝛc.} = 0;$$

oder mit Rücksicht auf die vorigen Vergleichungen:

$$A \cdot A'a' + B \cdot B'b' + C \cdot C'c' + \cdots \text{ ꝛc.} = 0;$$

welches die dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten entsprechende Gleichung ist.

Beiläufig verdient hier bemerkt zu werden, daß man für Kräfte in einer Ebene immer die virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf drehende Bewegung erhält, wenn man die Hebelsarme mit dem zum Drehungswinkel gehörigen Bogen φ (für den Halbmesser = 1) multiplicirt.

§. 101.

Überblickt man den Gang des obigen Beweises noch einmal, so wird man leicht die Bemerkung machen, daß es nicht unumgänglich nöthig war, die Richtungslinien der

Kräfte als alle in derselben Ebene befindlich vorauszusetzen; vielmehr gilt der Beweis auch ganz eben so, wenn jene Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, wofern diese Ebenen nur unter einander parallel und auf der gemeinschaftlichen Drehachse rechtwinklig sind. Dagegen müssen die materiellen Punkte, worauf die Kräfte wirken, in einer durchaus festen Verbindung mit einander gedacht werden, damit sie sich zugleich durch ähnliche, dem Drehungswinkel φ angehörige Bögen bewegen.

Ferner leuchtet ohne Weiteres ein, daß der vorige Beweis von den Richtungen der Kräfte ganz unabhängig ist, und daß er also auch, ohne irgend eine Änderung, gültig bleibt, wenn man die besondere Voraussetzung macht, die Kräfte seien alle mit einander parallel. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf Drehung ist daher nunmehr sowohl für nicht parallele als auch für parallele Kräfte bewiesen; jedoch unter der Bedingung, daß deren Richtungslinien entweder in einerlei Ebene, oder in verschiedenen unter einander parallelen Ebenen liegen, auf welchen die Drehachse senkrecht steht.

§. 102.

Es bleibt uns nun noch übrig, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für Kräfte zu beweisen, welche nach beliebigen Richtungen im Raume, auf ein festes System von materiellen Punkten wirken.

Denkt man sich mit dem System von Punkten irgend eine feste Achse verbunden, um welche eine unendlich kleine Drehung statt gefunden habe, so durchlaufen alle materiellen Punkte Kreisbögen, die zu demselben Drehungswinkel gehören. Die Mittelpunkte dieser Bögen liegen sämmtlich in der Drehachse, und die Bögen selbst befinden sich in parallelen Ebenen, welche, durch die Angriffspunkte gehend, auf der Achse senkrecht sind.

Man zerlege nun jede von den gegebenen Kräften A, B, C... ꝛc. in zwei, auf einander normale Seitenkräfte, von denen die ersteren A″, B″, C″... ꝛc. auf den parallelen Ebenen senkrecht, die anderen A′, B′, C′... ꝛc. aber in diesen Ebenen selbst, und zwar nach den Richtungen der Projectionen der gegebenen Kräfte auf sie, wirken. Die Kräfte A″, B″, C″... ꝛc. sind mit der Drehachse parallel, und wirken daher nicht mit auf Drehung um dieselbe; die andern Kräfte A′, B′, C′ ... ꝛc. können nur allein ein Bestreben zur Drehung haben, und sie müssen daher in dieser Beziehung unter sich im Gleichgewichte sein. Aber da sich diese Kräfte in parallelen auf der Achse normalen Ebenen befinden, so ist, nach den beiden vorhergehenden Paragraphen, die Summe ihrer virtuellen Momente gleich Null; d. h. wenn man die auf ihren Richtungen genommenen virtuellen Geschwindigkeiten mit a′, b′, c′... ꝛc. bezeichnet, so hat man als Folge des vorausgesetzten Gleichgewichtes:

$$A'a' + B'b' + C'c' + \cdots \text{ ꝛc.} = 0.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die in dieser Gleichung enthaltenen virtuellen Momente der Seitenkräfte A′, B′, C′... ꝛc., denen der gegebenen Kräfte A, B, C ... ꝛc. selbst nach der Reihe gleich sind. Zu dem Ende sei, in der perspectivischen Zeichnung Fig. 66, P der Angriffspunkt und PA die Richtungslinie der Kraft A; ferner sei XY die Drehachse, Pp der von dem Angriffspunkte beschriebene Bogen, dessen Mittelpunkt in V liegen mag. In der Ebene PVp dieses Bogens liegt die Seitenkraft A′, während die andere A″ auf dieser Ebene senkrecht steht, und also mit der Achse XY parallel ist. Übrigens erhält man beide Seitenkräfte durch Construction des rechtwinkligen, auf der Ebene PVp normalen Parallelogrammes AA′PA″, dessen Diagonale PA die Kraft A vorstellt.

Man fälle aus p auf die Richtungslinien der Kräfte A

und A′ die Perpendikel pa und pa′, so erhält man dadurch die virtuellen Geschwindigkeiten Pa = a und Pa′ = a′ dieser Kräfte *). Die Linie pa′ steht perpendikulär auf der Ebene des Parallelogrammes A′A″, also auch die Ebene des Dreiecks paa′. Da nun die Gerade Pa, zufolge der Construction, rechtwinklig zu pa ist, so wird sie auch auf der Ebene des Dreiecks paa′, folglich auch auf aa′ perpendikulär sein; und daher ist ΔPaa′ bei a rechtwinklig. Auch ist ΔPAA′ bei A′ rechtwinklig, und weil beide genannte Dreiecke überdies noch bei P einen gemeinschaftlichen Winkel haben, so sind sie einander ähnlich. Demnach verhält sich:

$$PA : PA' = Pa' : Pa,$$

oder

$$A : A' = a' : a;$$

woraus folgt

$$A'a' = Aa;$$

d. h. das virtuelle Moment der Seitenkraft A′ ist gleich dem virtuellen Moment der gegebenen Kraft A. Dies Gesetz läßt sich ganz in derselben Art für alle übrigen Kräfte B, B′; C, C′ ... ꝛc. beweisen, und daher hat man die virtuelle Momenten-Gleichung

$$Aa + Bb + Cc + \ldots \text{ꝛc.} = 0;$$

wofern nämlich a, b, c ... ꝛc. die virtuellen Geschwindigkeiten der gegebenen Kräfte sind.

Dieser Beweis ist von den Richtungen der Kräfte ganz unabhängig, und gilt daher ganz in derselben Art für parallele Kräfte in verschiedenen Ebenen.

---

*) Der größeren Deutlichkeit wegen ist in Fig. 67 noch eine andere Ansicht dieser Construction im Raume, in der Projection normal auf die Ebene des rechtwinkligen Parallelogrammes AA′PA″, gezeichnet. Hier erscheint die auf der Drehachse senkrechte Ebene PVp, worin die drehende Bewegung des materiellen Punktes statt gehabt, als die gerade Linie Pa′; der Punkt p liegt senkrecht über a′, so daß Pa′ die Projection des Bogens Pp, und a′a die Projection des von p auf die Richtungslinie PA gefällten Perpendikels ist. Die Vergleichung dieser Figur mit der vorigen wird das Folgende deutlicher machen.

§. 103.

Gültigkeit des Princips für eine beliebige krummlinige Bewegung. In dem Vorhergehenden haben wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein festes System von Punkten sowohl in Bezug auf fortgehende, als drehende Bewegung bewiesen. Allein dasselbe gilt auch für jede krummlinige Bewegung, wie schon daraus hervorgeht, daß bei einer unendlich kleinen Ortsveränderung des Systems die von den verschiedenen Punkten desselben beschriebenen Curvenelemente als unendlich kleine Kreisbögen, jene Bewegung selbst also als eine Art Drehung betrachtet werden kann. Statt aller weiteren Demonstration soll hier nur ein Beispiel zur Erläuterung gegeben werden, wozu wir die Aufgabe wählen, von welcher schon in den §§. 72 und 83 mit Bezug auf Fig. 40 die Rede gewesen ist.

Anstatt der beiden Ebenen **AC** und **BC**, gegen welche sich der mit dem Gewicht **P** belastete Stab **AB** stützt, denke man sich die Kräfte **x**, **y** und **z** angebracht, die den Wirkungen des Stabes in beiden Stützpunkten gleich und entgegengesetzt sind. Man hat dann, wie in §. 83, ein System von vier mit einander im Gleichgewicht befindlichen Kräften, nämlich **y** und **z** nach horizontaler, **x** und **P** nach vertikaler Richtung, und zwar bei jedem Paare die eine Kraft im entgegengesetzten Sinne der andern wirksam. Läßt man nun den festen Stab zuerst nach horizontaler, dann nach vertikaler Richtung, jedesmal parallel mit sich selbst, um ein beliebiges Stück fortrücken, so werden bei der ersten Bewegung die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte **x** und **P** gleich Null, die der Kräfte **y** und **z** aber, auf deren Richtungslinien die Angriffspunkte derselben fortgerückt sind, gleich und entgegengesetzt ausfallen; während bei der zweiten Bewegung das Umgekehrte statt finden wird. — Da bei jeder fortgehenden Parallelbewegung die Größe derselben, nach §. 97, beliebig

angenommen werden kann, so wollen wir sie für beide Fälle, der Kürze halber, gleich 1 annehmen, und zwar $+1$ oder -1, je nachdem sich die Kräfte bei jenen Bewegungen ihrem Ziele genähert oder sich von demselben entfernt haben. Mit Rücksicht darauf ergeben sich dann sofort die Gleichungen:

$$y - z = 0; \quad \text{also } y = z;$$
$$x - P = 0; \quad \text{» } x = P;$$

was auch mit den in §. 83 gefundenen Ergebnissen übereinstimmt.

In Betracht, daß nach §. 82 in dem vorliegendem Falle nur zwei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes in Bezug auf fortgehende Bewegung zulässig sind, darf man hier auch nicht mehr als zwei Bewegungen dieser Art geschehen lassen. Um daher noch eine dritte Gleichung zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y und z zu erhalten, nehme man an (Fig. 68), das untere Ende des Stabes AB gleite auf dem horizontalen Boden von A bis A', während das obere Ende von B bis B' längs der vertikalen Wand herabstreift, so daß der Stab in die Lage A'B' kommt. Bei einer solchen Bewegung beschreiben alle Punkte des Stabes elliptische Bögen, welche C zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und dies gilt folglich ebenso von der Curve, in welcher der Punkt D nach D' fortgerückt ist. Bildet man also von letzterer Curve die Projection auf die Richtungslinie der Kraft P, indem man den Perpendikel D'd auf dieselbe fällt, so ist Dd die (positiv zu nehmende) virtuelle Geschwindigkeit dieser Kraft. Die der Kraft y ist gleich AA', negativ genommen, während die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte x und z gleich Null sind, da sich die Angriffspunkte der letzteren senkrecht auf deren Richtungslinien fortbewegt haben. Demgemäß ergiebt sich die virtuelle Momentengleichung:

$$-y \cdot AA' + P \cdot Dd = 0;$$

woraus folgt: $$y = \frac{Dd}{AA'} \cdot P.$$

Bezeichnet α den urſprünglichen Neigungswinkel BAC des Stabes, α' den Winkel $B'A'C$ in der veränderten Lage deſſelben, und ſetzt man wie früher $AB = a$, $AD = b$, ſo ergeben ſich die obigen virt. Geſchwindigkeiten leicht folgendermaßen aus der Figur:

$$Dd = AD \cdot \operatorname{Sin}\alpha - A'D' \cdot \operatorname{Sin}\alpha' = b(\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\alpha'),$$

$$AA' = A'B' \cdot \operatorname{Cos}\alpha' - AB \cdot \operatorname{Cos}\alpha = a(\operatorname{Cos}\alpha' - \operatorname{Cos}\alpha).$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in den Ausdruck von y, ſo kömmt:

$$y = \frac{b}{a} P \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\alpha'}{\operatorname{Cos}\alpha' - \operatorname{Cos}\alpha} = \frac{b}{a} P \cdot \operatorname{Cotg}\frac{\alpha + \alpha'}{2},$$

wenn man für die Differenzen der Sinus und Coſinus die bekannten Formeln der Trigonometrie einſetzt, wo dann $2\operatorname{Sin}\frac{\alpha - \alpha'}{2}$ im Zähler und Nenner als Factor vorkommt, und daher ſich hebt. Nun ſei φ der Winkel zwiſchen den Linien AB und $A'B'$, um welchen alſo die Stange bei der ſtattgehabten Bewegung aus ihrer urſprünglichen Lage gedreht worden iſt, ſo iſt $\alpha' = \alpha - \varphi$; daher $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \alpha - \frac{1}{2}\varphi$; und mithin

$$y = \frac{b}{a} P \cdot \operatorname{Cotg}(\alpha - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Sofern es ſich aber hier um eine Bewegung handelt, bei welcher die verſchiedenen Punkte des Syſtems nicht parallele und gleiche, ſondern gewiſſe krummlinige Wege durchlaufen, ſo iſt, wie bei der Drehung um feſte Achſen (§. 98), nur eine unendlich kleine Ortsveränderung zuläſſig. Daher muß in dem obigen Ausdrucke $\varphi = 0$ geſetzt werden, wodurch derſelbe ſich auf

$$y = \frac{b}{a} P \cdot \operatorname{Cotg}\alpha$$

reducirt, übereinstimmend mit dem durch die früheren Methoden gefundenen Resultate.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß die obige Auflösung keineswegs kürzer ist, als die früher mitgetheilten; eine einfache Vergleichung läßt vielmehr das Gegentheil ersehen. Sie ist hier nur deshalb vorgetragen, um daran die Gültigkeit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auch für eine beliebige krummlinige Bewegung zu erläutern.

II. Beweis des Princips für ein loses System.

§. 104.

Gleichgewicht eines losen Systems von Punkten überhaupt. Bei den Untersuchungen über das Gleichgewicht der Kräfte, welche den Inhalt der vorhergehenden Kapitel ausmachen, haben wir stets ein *festes System* von Punkten vorausgesetzt, und in Bezug auf ein solches gewisse Gleichungen gefunden, die in jedem besondern Falle als sichere Kennzeichen des vorhandenen Gleichgewichtes zwischen den Kräften zu betrachten sind. Da wir aber künftig öfter in den Fall kommen werden, veränderliche oder *lose Systeme* von Punkten einer ähnlichen Behandlung zu unterwerfen, so bleibt hier noch die Erledigung der Frage übrig, in wiefern die früher für ein festes System gefundenen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes auf ein loses System Anwendung finden, oder ob dabei in Rücksicht der Möglichkeit einer Formänderung des letztern gewisse Modifikationen eintreten müssen.

Unter einem losen oder veränderlichen System ist aber nach §. 2 ein solches zu verstehen, dessen Punkte zwar so miteinander verbunden sind, daß die Wirkung einer Kraft auf einen dieser Punkte zu allen übrigen fortgepflanzt wird, jedoch ohne dabei eine Änderung in der gegenseitigen Lage der

Punkte auszuſchließen. Ein derartiges Syſtem kann auf ſehr mannigfaltige Weiſe zuſammengeſetzt ſein, worauf es jedoch hier nicht weiter ankommt. Um indeß einen beſtimmten Fall vor Augen zu haben, denke man ſich z. B. eine gewiſſe Anzahl materieller Punkte, von denen jeder mit allen übrigen, oder auch nur mit einigen der letzteren, durch vollkommen biegſame, undehnbare Fäden verbunden iſt. Denkt man ſich nun die ſo verbundenen Punkte der Einwirkung verſchiedener Kräfte unterworfen, ſo iſt klar, daß ihre Lage gegen einander durch die Beſchaffenheit der letzteren bedingt ſein muß, daß alſo die äußere Geſtalt des Syſtems nach Maaßgabe, wie die einwirkenden Kräfte in Bezug auf Richtung und Intenſität ſich ändern, eine ſtets wechſelnde iſt. Sobald aber dieſe Kräfte mit einander ins Gleichgewicht gekommmen ſind, wird ſich auch die Lage der ihrer Einwirkung unterworfenen Punkte fixirt haben, und das ganze Syſtem hat alſo dann eine beſtimmte Geſtalt gewonnen, welche der Verbindung zwiſchen ſeinen Punkten wie der Beſchaffenheit der Kräfte entſpricht. Und da Daſſelbe die einmal angenommene Geſtalt nicht ändern kann, ſo lange das erwähnte Gleichgewicht fortbeſteht, ſo verhält es ſich in dieſem Zuſtande wie ein feſtes Syſtem von Punkten; denn das Gleichgewicht zwiſchen den Kräften wird offenbar nicht geſtört, wenn man ſich die biegſamen Fäden, welche die materiellen Punkte mit einander verbinden, als feſte und ſteife, wenngleich gewichtloſe, Stäbe denkt.

Als Ergebniß der vorſtehenden Betrachtungen können wir alſo den Schluß ziehen, daß dieſelben Gleichungen, welche bei den früheren Unterſuchungen für ein feſtes Syſtem von Punkten gefunden wurden, auch gültig bleiben für ein loſes Syſtem, das ſich unter der Einwirkung gegebener Kräfte im Gleichgewichte befindet. Sind alſo die letzteren parallel mit einander, ſo kommen die im §. 70 oder 77, und wenn ſie

nicht parallel sind die in §. 82 oder 90 gefundenen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts in Anwendung, je nachdem die Richtungslinien der Kräfte in einer und derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen.

§. 105.

Man denke sich nun eine gewisse Anzahl von materiellen Punkten so mit einander verbunden, wie es im vorigen §. angegeben wurde, und setze voraus, daß an jedem derselben beliebig viele Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken, so hat man eben so viele Systeme von Kräften als materielle Punkte gegeben sind. Von diesen Kräftesystemen sei keins für sich allein im Gleichgewicht, wogegen vorausgesetzt werden soll, daß die Wirkung eines jeden derselben vermöge der Verbindung zwischen den materiellen Punkten durch die Gesammtwirkung aller übrigen Systeme aufgehoben wird.

Offenbar kann dies nicht anders geschehen, als indem sich nach den Richtungen der Fäden, durch welche die Wirkung auf einen der Punkte nach den mit ihm verbundenen fortgepflanzt wird, gewisse Spannungen erzeugen, welchen die Fäden vermöge ihrer Undehnbarkeit zu widerstehen haben. Diese Spannungen pflegt man die innern Kräfte zu nennen, im Gegensatze zu den äußern Kräften, worunter man diejenigen begreift, die an den materiellen Punkten angebracht sind. Man könnte jene auch passive, diese aber active Kräfte nennen, da erstere nur als Widerstände von letzteren hervorgerufen, nicht aber selbstthätig sind, d. h. keine Bewegung erzeugen, sondern die von den äußern oder activen Kräften angeregte Bewegung nur verhindern können. — Sofern wir nun das ganze System von Punkten als im Gleichgewichte voraussetzen, in welchem es also zu einer bestimmten Gestalt gekommen ist, so leuchtet ein, daß dieses Gleichgewicht nur unter der Bedingung bestehen kann,

daß jeder Faden nach entgegengeſetzter Richtung gleiche Längenſpannungen erleidet. Denn würde irgend ein Faden, welcher zwei materielle Punkte verbindet, nach der einen Richtung ſtärker als nach der entgegengeſetzten Richtung gezogen, ſo müßte er ſich im Sinne des ſtärkeren Zuges fortbewegen, was offenbar eine Formänderung des Syſtems zur nothwendigen Folge haben würde.

Um dies noch anſchaulicher zu machen, betrachte man (Fig. 69) die beiden durch einen undehnbaren Faden verbundenen Punkte M_1 und M_2, an welchen die äußern Kräfte $A, A_1, A_2 \ldots$ und $B, B_1, B_2 \ldots$ ꝛc. wirken, ſo ſind das zwei Syſteme, die ſich gegenſeitig vermittelſt des Fadens $M_1 M_2$ das Gleichgewicht halten, während jedes Syſtem für ſich genommen, der Vorausſetzung gemäß, nicht im Gleichgewichte iſt. Bezeichnet daher S die Mittelkraft des einen, T die des andern Syſtems, ſo iſt klar, daß das vorausgeſetzte Gleichgewicht auch zwiſchen dieſen beiden Mittelkräften beſtehen muß, was aber nach §. 13 nur möglich iſt, wenn S und T einander gleich und gerade entgegengeſetzt ſind. Die Richtungslinien der fraglichen Kräfte müſſen alſo in die Verlängerungen des Fadens $M_1 M_2$ fallen; oder, mit andern Worten, der genannte Faden erleidet an jedem Endpunkte eine gleich große Spannung, ſo daß er alſo durch ſeine Feſtigkeit in Bezug auf jedes der beiden Syſteme von Kräften, die an ſeinen Endpunkten angebracht ſind, die Stelle der entgegengeſetzten Mittelkraft vertritt. Da dies nun von allen Fäden, welche die materiellen Punkte des Syſtems verbinden, ganz eben ſo gilt, ſo folgt, daß im Zuſtande des Gleichgewichtes die ſämmtlichen innern Kräfte ſich paarweiſe mit einander aufheben.

Bei dem in Fig. 69 angenommenen Fall wurde den Mittelkräften S und T ein Beſtreben beigelegt, die materiellen Punkte M_1 und M_2 von einander zu entfernen, und um dies

zu verhindern genügte es, beide Punkte durch einen unzerreißbaren Faden zu verbinden. Hätten aber jene Kräfte das entgegengesetzte Bestreben, so müßte man zum Behuf des Gleichgewichtes die verbindende Linie M_1M_2 als einen festen, unbiegsamen Stab voraussetzen, der die von den Kräften S' und T' (Fig. 69) beabsichtigte Annäherung der Punkte zu einander verhindert. Daß hiedurch die vorigen Betrachtungen und die daraus hergeleiteten Folgerungen auf keine Weise alterirt werden können, bedarf wohl kaum noch der besondern Erwähnung.

§. 106.

Allgemeiner Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für ein loses System von Punkten. Nach Vorausschickung der in den beiden vorhergehenden Paragraphen dargelegten Betrachtungen über das Gleichgewicht eines veränderlichen Systems von Punkten, hat es nun keine Schwierigkeit mehr, die Richtigkeit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für ein solches System zu beweisen.

Zu dem Ende seien M_1, M_2, M_3, ... ꝛc. die mit einander durch Fäden oder Stäbe verbundenen Punkte, an welchen die äußern Kräfte A, A_1, A_2 ... ꝛc.; B, B_1, B_2 ... ꝛc.; C, C_1, C_2 ... u. s. w. nach beliebigen Richtungen wirken, und in ihrer Gesammtheit sich einander das Gleichgewicht halten. Die von diesen Kräften hervorgerufenen Spannungen, also die innern Kräfte, welche von den oben genannten Punkten ausgehen, sollen bezüglich mit S, S_1, S_2 ... ꝛc.; T, T_1, T_2 ... ꝛc.; U, U_1, U_2 ... u. s. f. bezeichnet werden. — Offenbar kann nun das Gleichgewicht des ganzen Systems nicht anders bestehen, als indem jeder einzelne Punkt desselben unter den daran wirkenden äußern und innern Kräften für sich im Gleichgewichte ist. Daher findet das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in der Fassung, wie es in

§. 97 bewieſen worden iſt, auf jeden der materiellen Punkte unbedingte Anwendung.

Dies vorausgeſetzt, ſo denke man ſich nun eine unendlich kleine Bewegung im Syſteme hervorgebracht, und bezeichne die Projectionen der von den verſchiedenen Punkten durchlaufenen Wege auf die an ihnen wirkenden Kräfte durch dieſelben Buchſtaben des kleinen Alphabets, mit welchen oben die Intenſitäten bezeichnet wurden, eben ſo wie dieſe accentuirt, dann hat man nach §. 97 die folgenden virtuellen Momentengleichungen:

Für das Gleichgewicht des Punktes $\mathbf{M}_1$:

$$\mathbf{Aa} + \mathbf{A}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{a}_2 + \cdots \text{ꝛc.} + \mathbf{Ss} + \mathbf{S}_1\mathbf{s}_1 + \mathbf{S}_2\mathbf{s}_2 + \cdots \text{ꝛc.} = 0;$$

oder in abgekürzter Darſtellung:

$$\Sigma\,\mathbf{Aa} + \Sigma\,\mathbf{Ss} = 0.$$

Desgleichen für die übrigen Punkte $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, ...ꝛc.

$$\Sigma\,\mathbf{Bb} + \Sigma\,\mathbf{Tt} = 0;$$
$$\Sigma\,\mathbf{Cc} + \Sigma\,\mathbf{Uu} = 0; \text{ u. ſ. w.}$$

Addirt man dieſe Gleichungen, deren Anzahl gleich der der materiellen Punkte iſt, ſo entſteht

$$(\mathrm{I}) \qquad \left.\begin{array}{l} \Sigma\,\mathbf{Aa} + \Sigma\,\mathbf{Bb} + \Sigma\,\mathbf{Cc} + \cdots \text{ꝛc.} \\ \Sigma\,\mathbf{Ss} + \Sigma\,\mathbf{Tt} + \Sigma\,\mathbf{Uu} + \cdots \text{ꝛc.} \end{array}\right\} = 0,$$

und nun läßt ſich leicht darthun, daß die in der zweiten Zeile enthaltene, auf die innern Kräfte ſich beziehende, Summe der virtuellen Momente für ſich gleich Null ſein muß.

Im vorigen §. iſt nämlich gezeigt worden, daß dieſe Kräfte paarweiſe vorkommen, und zwar in ſo vielen Paaren, je aus zwei gleichen und gerade entgegengeſetzt wirkenden Kräften beſtehend, als geſpannte Fäden in dem Syſteme vorhanden ſind. Es braucht alſo nur noch dargethan zu werden, daß zu je zweien von den innern Kräften, die ſich an einem und demſelben Faden das Gleichgewicht halten, gleiche und entgegengeſetzte virtuelle Geſchwindigkeiten gehören. Dies

soll hier bloß für zwei gleiche Kräfte bewiesen werden, da der Beweis für alle übrigen Paare derselbe bleibt.

Zu dem Ende stelle $M_1 M_2$ (Fig. 70) irgend einen der Fäden vor, der von den gleichen Kräften S und T nach der Richtung seiner Länge gespannt wird, und $m_1 m_2$ sei die veränderte Lage, in welche dieser Faden durch die im System veranlaßte unendlich kleine Bewegung gekommen ist. Fällt man aus den Punkten m_1 und m_2 auf die ursprünglichen Richtungen der genannten Kräfte die Perpendikel $m_1\sigma$, $m_2\tau$, so sind $M_1\sigma = s$ und $M_2\tau = t$ die virtuellen Geschwindigkeiten jener Kräfte. Um sie zu bestimmen, verlängere man die Linie $m_1 m_2$ bis sie sich mit der Verlängerung von $M_1 M_2$ in O schneidet, und bezeichne den Winkel, den beide Linien mit einander bilden, mit φ, dann ist, wie leicht aus der Figur erhellet:

$$M_1\sigma = s = Om_1 \cdot \operatorname{Cos}\varphi - OM_1;$$
$$M_2\tau = t = Om_2 \cdot \operatorname{Cos}\varphi - OM_2.$$

Beide Gleichungen von einander abgezogen liefert:

$$s - t = (OM_1 - Om_2) \cdot \operatorname{Cos}\varphi - (OM_1 - OM_2)$$
$$= m_1 m_2 \cdot \operatorname{Cos}\varphi - M_1 M_2.$$

Bezeichnet l die unveränderliche Länge des Fadens $M_1 M_2$, so ist auch $m_1 m_2 = l$, und wenn dies eingesetzt wird, entsteht:

$$s - t = l \cdot (\operatorname{Cos}\varphi - 1);$$

oder:
$$t - s = \tfrac{1}{2} l \cdot \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

So lange also der Winkel φ noch eine angebbare Größe hat, wird $t < s$ sein; wogegen diese Ungleichheit immer mehr verschwindet, je kleiner φ angenommen wird. Da nun in dem vorliegenden Falle nur eine unendlich kleine Ortsveränderung der materiellen Punkte, also nur ein unendlich kleiner Werth von φ, vorausgesetzt wurde, so kann man um so mehr $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varphi^2$ als eine verschwindende Größe betrachten, und demgemäß $t = s$ annehmen. Die beiden virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte S und T sind also,

wie dieſe Kräfte ſelbſt, abſolut genommen einander gleich; daß denſelben aber entgegengeſetzte Vorzeichen beigelegt werden müſſen, folgt unmittelbar aus der Figur, nach welcher, wenn $s = M_1 \sigma$ eine Annährung an das Ziel der Kraft S vorſtellt, alsdann $t = M_2 \tau$ als eine Entfernung von dem Ziele der gleichen Kraft T zu nehmen iſt, oder umgekehrt.

Demnach iſt $Ss = Tt$, oder $Ss - Tt = 0$, und da ſich auf ganz gleiche Weiſe in dem Ausdrucke

$$\Sigma Ss + \Sigma Tt + \Sigma Uu + \cdots \text{ꝛc.}$$

je zwei zuſammengehörige Glieder annulliren, ſo iſt der ganze Ausdruck gleich Null, und die Gleichung (1) reducirt ſich auf folgende:

$$(2) \qquad \Sigma Aa + \Sigma Bb + \Sigma Cc + \cdots \text{ꝛc.} = 0.$$

Dieſe Gleichung ſtellt nunmehr das Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeiten dar für ein veränderliches Syſtem von Punkten und für eine beliebige unendlich kleine Bewegung in demſelben, entſprechend der Natur der Verbindung zwiſchen den Punkten.

Anm. Der obige Beweis rührt in ſeinen Grundzügen von Navier her. Man vergleiche deſſen Résumé des leçons de mécanique, données à l'école polytechnique. Paris 1841. S. 213 u. f.

§. 107.

Sind drei Kräfte A, B, C an einem beliebigen Syſtem von materiellen Punkten im Gleichgewicht, und man bezeichnet ihre virtuellen Geſchwindigkeiten, ſei es in Bezug auf fortgehende oder drehende Bewegung, mit a, b, c, ſo hat man nach dem, in den vorhergehenden Paragraphen bewieſenen Principe:

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

Macht man nun die beſondere Vorausſetzung, daß die eine oder die andere Bewegung des Syſtems, worauf ſich die

virtuellen Geschwindigkeiten beziehen, so erfolgt sei, daß $c = 0$ ist, so entsteht

$$Aa + Bb = 0.$$

Die Summe der beiden Producte Aa und Bb kann nur dann $= 0$ sein, wenn sie einander gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind, d. h. die vorige Gleichung hat die Form

$$\pm Aa \mp Bb = 0;$$

woraus folgt $$Aa = Bb,$$

oder $$A : B = b : a.$$

Man denke sich statt der dritten Kraft C irgend einen festen Widerstand, dessen Mitwirkung zur Erhaltung des Gleichgewichtes mit A und B durch C dargestellt wird, und stelle sich die Verbindung des Systems mit jenem Widerstande als von der Art vor, daß nur eine Bewegung entstehen kann, in Bezug auf welche der Widerstand C niemals eine virtuelle Geschwindigkeit erlangt; alsdann kann man die vorige Proportion folgendermaßen aussprechen:

> Sind zwei Kräfte A und B, durch Mitwirkung eines unbeweglichen Widerstandes C, an einem beliebigen System von Punkten im Gleichgewichte, so verhalten sich die Intensitäten jener Kräfte umgekehrt, wie die zugehörigen virtuellen Geschwindigkeiten.

Dies ist der Inhalt des Carteſiſchen Grundſatzes (§. 95), der sich hier als ein besonderer Fall des allgemeinen Princips ergeben hat. Man wird aus der so eben gegebenen Auseinandersetzung ersehen haben, daß die Richtigkeit dieses Satzes stets an die Bedingung eines unfreien Systemes, d. h. eines solchen geknüpft ist, bei welchem nur eine Bewegung auf vorgeschriebenem Wege erfolgen kann. Die Anwendungen, welche später von dem Carteſiſchen Grundsatze gemacht werden sollen, werden diese Aussage bestätigen.

III. Über die praktische Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 108.

Nachdem in den vorhergehenden Paragraphen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für alle Systeme von Kräften, die im Gleichgewichte sind, sowohl in Bezug auf gerad- wie krummlinige Bewegung vollständig bewiesen ist, mag hier noch eine Bemerkung Platz finden, welche sich auf die praktische Anwendung dieses Principes bezieht.

Soll nämlich durch Hülfe desselben irgend eine dynamische Aufgabe gelöst werden, so gewährt es in allen denjenigen Fällen eine wesentliche Erleichterung der Operationen, wo von fortgehender oder Parallel-Bewegung die Rede ist. In den Fällen aber, wo gegebene oder fragliche Kräfte auf Drehung wirken, gelangt man in der Regel einfacher durch statische Momenten-Gleichungen zum Ziel. Dies hat darin seinen Grund, weil bei einer entstehenden Drehung die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte nicht so einfach ausgemittelt werden können, als deren Hebelsarme, weshalb auch leichter eine statische als eine virtuelle Momenten-Gleichung angesetzt werden kann. Sind also gewisse unbekannte Kräfte zu bestimmen, die mit andern bekannten Kräften an einem gegebenen System von materiellen Punkten ein Gleichgewicht herstellen sollen, so gelangt man am leichtesten zu den gewünschten Bestimmungs-Gleichungen, wenn man diejenigen, die sich auf fortgehende Bewegung beziehen, nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten; die sich auf Drehung beziehenden aber durch Hülfe der statischen Momente ansetzt. Dabei hat man so viele Parallelbewegungen nach verschiedenen Richtungen anzunehmen, und die darauf bezüglichen virtuellen Geschwindigkeiten auszumitteln, als

Gleichungen der ersteren Art, der Natur der Aufgabe gemäß, erforderlich sind.

In den meisten Fällen der Anwendung sind die Angriffspunkte und Richtungen der fraglichen Kräfte entweder unmittelbar gegeben, oder durch andere Umstände schon bestimmt, so daß es dann nur auf die Ausmittelung der Intensitäten ankommt. Übrigens versteht es sich von selbst, daß man weder mehr noch weniger Kräfte als unbekannt in Rechnung bringen darf, als die vorliegende Aufgabe, ihrer besondern Beschaffenheit gemäß, dynamische Gleichungen zuläßt. Die Anzahl dieser Gleichungen bestimmt sich aber in jedem besondern Falle dadurch, daß man beurtheilt, wie die Kräfte in das gegebene System wirken sollen, d. h. ob ihre Richtungslinien in einer und derselben, oder in verschiedenen Ebenen liegen; ob sie mit einander parallel sind, oder nicht; kurz, in welches der vorigen Kapitel die Aufgabe gehört, weil die dort aufgestellten Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichtes bei der Lösung irgend einer Aufgabe der Statik zur Grundlage dienen.

In den folgenden Paragraphen wollen wir nun an einigen Aufgaben, sowohl die Anwendung der früheren statischen Gesetze, als auch die des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zeigen, um beide Methoden besser mit einander vergleichen zu können. Vorher aber müssen wir uns mit dem Grundsatze: Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich, aber gerade entgegengesetzt, bekannt machen. Dies ist das dritte von den sogenannten Bewegungsgesetzen, die Newton zuerst als allgemeine Grundsätze der Dynamik aufgestellt hat. (Vergl. die Anmerk. zu Nr. 3 der Einleitung.)

Wenn nämlich eine Kraft auf einen festen, unbeweglichen Körper wirkt (es sei unmittelbar oder mittelbar), und von demselben im Gleichgewicht erhalten wird, so kann man sich statt

dessen auch eine zweite Kraft denken, die der ersten gleich und gerade entgegengesetzt ist, und daher mit dieser dasselbe Gleichgewicht herstellt wie jener feste Körper. Diese entgegengesetzte Kraft repräsentirt dann den Widerstand oder die Gegenwirkung des unbeweglichen Körpers gegen die Einwirkung der Kraft, und beide sind also gleich und entgegengesetzt. Hiermit soll nicht gesagt sein, daß der Körper keinen andern Widerstand als den, welchen er der auf ihn wirkenden Kraft entgegensetzt, zu leisten vermag; sondern der Newton'sche Grundsatz behauptet nur so viel, daß die thätige Kraft keine andere Gegenwirkung in Anspruch nimmt. Dabei ist nicht zu vergessen, daß der Körper sich vermöge der Trägheit der Materie nur passiv, niemals aber als selbstthätig, verhalten kann. Wenn also z. B. ein festes System von materiellen Punkten, worauf mehrere Kräfte wirken, nur dadurch im Gleichgewicht erhalten werden kann, daß es sich mit einem oder mit mehreren seiner Punkte gegen gewisse unbeweglich feste Widerstände stützt, und man soll die Wirkungen auf letztere, sofern sie mittelbar aus den Kräften hervorgehen, bestimmen, so denke man sich die Gegenwirkungen in den Stützpunkten als thätige, vorläufig noch unbekannte, Kräfte wirksam; letztere können dann durch die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichtes, welche nach früheren Lehren für das gegebene System gelten, oder durch eine entsprechende Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, algebraisch bestimmt werden.

§. 109.

Aufgabe zur praktischen Anwendung obiger Regeln. Es stelle **ABCD** (Fig. 71) eine feste Ebene vor, in welcher die darin befindliche Kraft **Q** wirkt, und zwar in einem Punkte **E**, der durch die in der Figur angedeuteten Winkel β und γ bestimmt wird. Die Richtung dieser Kraft

sei durch den Winkel α gegeben, den sie verlängert mit der Seite **AB** der Ebene bildet. Wird nun vorausgesetzt, daß diese Ebene sich bei **A** und **B** gegen feste Widerstände stützt, so soll bestimmt werden, was diese für Wirkungen erleiden.

Auflösung 1. Bezeichnet man die Gegenwirkungen in den Stützpunkten **A** und **B** mit **x**, **y** und **z**; erstere nach der Richtung **AB**, die beiden andern aber nach den auf dieser Linie normalen Richtungen **AD** und **CB**, so hat man ein im Gleichgewicht befindliches System von Kräften, deren Richtungen in einer Ebene liegen und nicht mit einander parallel sind. Die Aufgabe gehört demnach zum ersten Abschnitte des dritten Kapitels, und da nach §. 82 drei Bedingungs-Gleichungen für's Gleichgewicht statt finden, so können die drei unbekannten Kräfte **x**, **y**, **z** durch sie bestimmt werden.

Um nun jene Gleichungen hier in Anwendung bringen zu können, müssen erst die Winkel ausgemittelt werden, welche von den Richtungslinien mit der Linie **AB** in demselben Sinne gebildet werden; diese Winkel sind:

für die Kräfte **Q**, **x**, **y**, **z**;
bezüglich gleich α, $180°$, $90°$, $270°$.

Nimmt man ferner **A** als Momentenpunkt an, so ist der aus ihm auf die Richtung von **Q** gefällte Perpendikel **AF** der Hebelsarm dieser Kraft, so wie **AB** der Hebelsarm der Kraft **z** ist. Die Kräfte **x** und **y** haben dagegen keine Hebelsarme, weil ihre Richtungslinien durch den Momentenpunkt selbst gehen. Der Perpendikel **AF** findet sich nun, der in der Figur angegebenen Bezeichnung gemäß, wie folgt:

$$\mathbf{AF} = \mathbf{AE} \cdot \mathrm{Sin}\, \mathbf{AEF} = \mathbf{AE} \cdot \mathrm{Sin}\,(\alpha + \gamma).$$

Nach einem bekannten Lehrsatze der ebenen Trigonometrie ergiebt sich aus dem Dreieck **ABE** die Proportion

$$\mathbf{AB} : \mathbf{AE} = \mathrm{Sin}\,(\beta+\gamma) : \mathrm{Sin}\,\beta;\ \text{folglich}\ \mathbf{AE} = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathrm{Sin}\,\beta}{\mathrm{Sin}\,(\beta+\gamma)};$$

und wenn man dies in den Ausdruck von AF substituirt, wird

$$AF = AB \cdot \frac{\operatorname{Sin}\beta \cdot \operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)}.$$

Zufolge der in §. 82 aufgestellten statischen Gesetze entstehen nun für den gegenwärtigen Fall, folgende Bedingungs-Gleichungen:

1) $x \cdot \operatorname{Cos} 180^0 + y \cdot \operatorname{Cos} 90^0 + z \cdot \operatorname{Cos} 270^0 + Q \operatorname{Cos}\alpha = 0;$

2) $x \cdot \operatorname{Sin} 180^0 + y \cdot \operatorname{Sin} 90^0 + z \cdot \operatorname{Sin} 270^0 + Q \operatorname{Sin}\alpha = 0;$

3) $z \cdot AB - Q \cdot AB \cdot \frac{\operatorname{Sin}\beta \cdot \operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{Sin}.(\beta+\gamma)} = 0;$

wo in der letzten Gleichung die Momente mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung gebracht sind, weil die zugehörigen Kräfte auf Drehung im entgegengesetzten Sinne wirken. Vereinfacht man die obigen Gleichungen, so nehmen sie nachstehende Form an:

$$-x + Q \operatorname{Cos}\alpha = 0;$$

$$y - z + Q \operatorname{Sin}\alpha = 0;$$

$$z - Q \cdot \frac{\operatorname{Sin}\beta \cdot \operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)} = 0;$$

woraus nunmehr die Unbekannten x, y und z leicht gefunden werden können.

Aufl. 2. Mit Hülfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten lassen sich die beiden ersten von diesen Gleichungen noch einfacher, wie folgt, herleiten.

Man nehme erstlich eine Parallelbewegung der festen Ebene ABCD nach der Richtung BA, also der Kraft x entgegengesetzt an, so erhalten die Kräfte y und z keine virtuellen Geschwindigkeiten, weil die angenommene Bewegung auf ihren Richtungen normal ist (§. 92). Die virtuelle Geschwindigkeit von x ist $= EE'$, negativ genommen, und die von Q ist $Ee = EE' \cdot \operatorname{Cos}\alpha$, positiv genommen; folglich hat man, nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten,

$$-x\cdot EE' + Q\cdot EE'\cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = 0,$$

oder
$$-x + Q\cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = 0.$$

Nimmt man zweitens eine fortgehende Bewegung nach der auf AB normalen Richtung BC oder AD an, so hat die Kraft x keine virtuelle Geschwindigkeit; dagegen sind die von y und z gleich EE'', für erstere Kraft positiv, für letztere negativ genommen, während die virtuelle Geschwindigkeit der Kraft Q gleich $Ee' = EE''\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$, positiv genommen, ist. Demnach hat man, zufolge des allgemeinen Princips,

$$y\cdot EE'' - z\cdot EE'' + Q\cdot EE''\mathrm{Sin}\,\alpha = 0,$$

oder
$$y - z + Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha = 0.$$

Die Herleitung der dritten von den vorigen Gleichungen, mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf Drehung um den Momentenpunkt A, kann nach der am Ende von §. 100 gemachten Bemerkung dadurch geschehen, daß man die Hebelsarme der Kräfte z und Q mit dem zum Drehungswinkel gehörigen Bogen, für den Halbmesser 1, multiplicirt. Aber wenn doch einmal die Hebelsarme ausgemittelt sind, so kann man lieber gleich die statischen Momente bilden, als daß man erst einen Umweg macht, um die virtuellen Momente zu erhalten.

Entwickelt man nun aus den vorhin gefundenen drei Gleichungen die unbekannten Kräfte x, y und z, so findet man dafür folgende Werthe:

$$x = Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha; \quad z = Q\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\beta\cdot\mathrm{Sin}\,(\alpha+\gamma)}{\mathrm{Sin}\,(\beta+\gamma)};$$

$$y = Q\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\beta\cdot\mathrm{Sin}\,(\alpha+\gamma) - \mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Sin}\,(\beta+\gamma)}{\mathrm{Sin}\,(\beta+\gamma)};$$

$$= Q\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\gamma\cdot\mathrm{Sin}\,(\beta-\alpha)}{\mathrm{Sin}\,(\beta+\gamma)}.$$

Es sollen nun von derselben Aufgabe noch zwei andere Auflösungen gegeben werden, damit der Anfänger deutlich

einſehen lerne, wie die verſchiedenen ſtatiſchen Geſetze in Anwendung kommen.

Aufl. 3. Zur Anwendung des Parallelogramms der Kräfte zerlege man die Kraft Q nach den beiden Richtungen **BE** und **EA** (Fig. 72) in die Seitenkräfte p und q. Bezeichnet man nämlich die Winkel, welche die Mittelkraft mit den beiden Seitenkräften macht, durch φ und ψ, und conſtruirt über **EF** = Q das Parallelogramm **EpFq**, ſo verhält ſich:

$$Q : p = \operatorname{Sin}(\varphi+\psi) : \operatorname{Sin}\psi; \quad \text{alſo } p = \frac{Q\cdot\operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin}(\varphi+\psi)};$$

$$Q : q = \operatorname{Sin}(\varphi+\psi) : \operatorname{Sin}\varphi; \quad \text{„ } q = \frac{Q\cdot\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}(\varphi+\psi)}.$$

Nun iſt, der Bezeichnung in der Figur gemäß,

$$\psi = \alpha+\gamma;\ \varphi = \beta-\alpha;\ \varphi+\psi = \beta+\gamma;$$

und wenn dieſe Werthe ſubſtituirt werden, ſo kommt

$$p = Q\cdot\frac{\operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)}; \quad q = Q\cdot\frac{\operatorname{Sin}(\beta-\alpha)}{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)}.$$

Den Angriffspunkt der Kraft p verlege man in ihrer Richtungslinie nach **B**, und zerlege hier die genannte Kraft wieder nach den auf einander normalen Richtungen **BC** und **BA** in die Seitenkräfte

$$z = p\cdot\operatorname{Sin}\beta = Q\cdot\frac{\operatorname{Sin}\beta\cdot\operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)},$$

und $$v = p\cdot\operatorname{Cos}\beta = Q\cdot\frac{\operatorname{Cos}\beta\cdot\operatorname{Sin}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)};$$

von denen erſtere die geſuchte Wirkung auf den feſten Widerſtand **B**, die andere aber ein Theil von der nach **BA** ſtattfindenden Wirkung x auf den Stützpunkt **A** iſt.

Ferner nehme man den Angriffspunkt der Kraft q im Punkte **A** an, und zerlege dieſelbe nach den normalen Richtungen **BA** und **DA** in die Seitenkräfte

$$w = q \operatorname{Cos}\gamma = Q \cdot \frac{\operatorname{Cos}\gamma \cdot \operatorname{Sin}(\beta - \alpha)}{\operatorname{Sin}(\beta + \gamma)},$$

und $$y = q \cdot \operatorname{Sin}\gamma = Q \cdot \frac{\operatorname{Sin}\gamma \cdot \operatorname{Sin}(\beta - \alpha)}{\operatorname{Sin}(\beta + \gamma)};$$

von welchen die letztere die gesuchte Wirkung auf den festen Widerstand **A** nach der Richtung **DA** ist. Die erste repräsentirt den anderen Theil der Wirkung x nach der Richtung **BA** auf denselben Widerstand, und daher hat man

$$x = v + w = Q \cdot \frac{\operatorname{Cos}\beta \cdot \operatorname{Sin}(\alpha + \gamma) + \operatorname{Cos}\gamma \cdot \operatorname{Sin}(\beta - \alpha)}{\operatorname{Sin}(\beta + \gamma)}.$$

Löst man $\operatorname{Sin}(\alpha + \gamma)$ und $\operatorname{Sin}(\beta - \alpha)$ nach den bekannten Formeln auf, so entsteht nach gehöriger Reduction

$$x = Q \cdot \frac{\operatorname{Cos}\alpha(\operatorname{Sin}\beta \cdot \operatorname{Cos}\gamma + \operatorname{Cos}\beta \cdot \operatorname{Sin}\gamma)}{\operatorname{Sin}(\beta + \gamma)};$$

oder $$x = Q \cdot \operatorname{Cos}\alpha.$$

Vergleicht man diese Auflösung mit der vorigen, so wird man bemerken, daß es bei Anwendung des Parallelogramms der Kräfte nicht nöthig war, die Gegenwirkungen als thätige Kräfte in Rechnung zu bringen, sondern man erhält jedesmal die auf die Stützpunkte sich äußernden Wirkungen selbst. Dies ist jedoch nur bei Anwendung des Parallelogramms der Kräfte der Fall; bei den andern Methoden der Auflösung muß man aber jedesmal die Gegenwirkungen in Rechnung bringen.

Aufl. 4. Man verlängere die Richtungslinie der Kraft Q aufwärts bis zum Durchschnitt **G** mit der Verlängerung von **AB** (Fig. 51), und nehme diesen Punkt als Angriffspunkt von Q an. Hier zerlege man die in Rede befindliche Kraft nach **GA** und normal darauf in die Seitenkräfte $Q' = Q\operatorname{Cos}\alpha$ und $Q'' = Q\operatorname{Sin}\alpha$, so ist erstere die vorhin mit x bezeichnete Wirkung auf die Unterstützung bei **A**, so daß man also hat:

$$Q' = x = Q\operatorname{Cos}\alpha.$$

Die andere Seitenkraft Q'' wirkt nun hebelartig auf die bei A und B angebrachten Unterstützungen, indem sie auf letztere die Seitenpressungen y und z ausübt. Betrachtet man die Linie AG als fest und unbiegsam, Q'', y und z als drei parallele Kräfte, die sich an dieser Linie das Gleichgewicht halten, so erhält man nach §. 58 oder §. 61

$$y = \frac{BG}{AB} \cdot Q'' = \frac{BG}{AB} \cdot Q \sin\alpha;$$

$$z = \frac{AG}{AB} \cdot Q'' = \frac{AG}{AB} \cdot Q \sin\alpha.$$

Das Dreieck ABE giebt zunächst

$$AE = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}; \quad BE = \frac{AB \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)};$$

und demnächst geben die Dreiecke BGE und AGE

$$BG = BE \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} = AB \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)\sin\gamma}{\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)};$$

$$AG = AE \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} = AB \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man endlich

$$y = Q \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha) \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)};$$

$$z = Q \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

§. 110.

Zusätze. Nachdem wir in dem Vorhergehenden vier verschiedene Auflösungen des vorgelegten Problems kennen gelernt haben, aus deren Vergleichung leicht der Vortheil der einen Methode vor der andern erhellet, wollen wir hier die gefundenen Resultate noch einer nähern Betrachtung unterwerfen.

1) Die Ausdrücke der Pressungen x und z ergeben sich stets positiv, so lange α, β und γ, wie es angenommen wurde,

spitze Winkel sind. Die Pressung y fällt dagegen positiv oder negativ aus, je nachdem α kleiner oder größer als β ist. Ersteres findet statt bei dem in der Figur angenommenen Fall, wo die Richtungslinie der Kraft Q die Linie AB oberhalb B auf ihrer Verlängerung schneidet; letzteres ist der Fall, wenn das erwähnte Schneiden unterhalb B geschieht. Der Druck gegen die untere Stütze A ist also in dem einen Falle links aufwärts, in dem andern rechts abwärts gerichtet, was auch aus einer einfachen Betrachtung der Figur leicht erhellet.

Fällt die Richtung der Kraft Q mit der Linie BE zusammen, so ist $\alpha = \beta$, und es entsteht

$$x = Q \cdot \mathrm{Cos}\beta; \quad y = 0; \quad z = Q \cdot \mathrm{Sin}\beta.$$

In diesem Falle verschwindet also die Seitenwirkung gegen den Stützpunkt A.

2) Ist die Richtungslinie der Kraft Q parallel mit der Linie BA, so ist $\alpha = 0$, und man erhält:

$$x = Q; \quad y = z = Q \cdot \frac{\mathrm{Sin}\beta \cdot \mathrm{Sin}\gamma}{\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)};$$

oder

$$y = z = \frac{Q}{\mathrm{Cotg}\beta + \mathrm{Cotg}\gamma}.$$

Es sei EH senkrecht auf AB (Fig. 72), so ist

$$BH = EH \cdot \mathrm{Cotg}\beta, \quad AH = EH \cdot \mathrm{Cotg}\gamma;$$

folglich ergiebt sich durch Addition dieser beiden Ausdrücke,

$$AH + BH = AB = EH \cdot (\mathrm{Cotg}\beta + \mathrm{Cotg}\gamma),$$

und also

$$\mathrm{Cotg}\beta + \mathrm{Cotg}\gamma = \frac{AB}{EH}.$$

Dies in den vorigen Werth von y und z gesetzt, giebt

$$y = z = \frac{EH}{AB} \cdot Q.$$

3) Wird die Kraft Q und der Abstand EH ihrer Richtungslinie von der Seite AB, womit sie parallel ist, als unveränderlich angesehen, so sind die Seitenwirkungen y, z

der Entfernung AB der Stützen umgekehrt proportional; d. h. je größer diese Entfernung ist, desto geringer werden die Seitenwirkungen auf die genannten Stützpunkte.

Macht man ferner die besondere Voraussetzung, daß die Kraft Q der Fläche des Rectangels ABCD = AB·BC proportional sei, etwa Q = AB·BC·q, so ergiebt sich, wenn dies substituirt wird,

$$y = z = EH \cdot BC \cdot q.$$

Ist nun EH irgend ein aliquoter Theil von BC, z. B. EH = $\frac{1}{2}$BC, so erhält man dafür

$$y = z = \tfrac{1}{2} BC^2 \cdot q,$$

d. h. die Seitenwirkungen auf die Stützpunkte sind in diesem Falle von der Entfernung der letzteren unabhängig und verhalten sich, bei verschiedenen Breiten BC oder AD, wie die Quadrate derselben. Dies ist der Fall bei einem vertikal hängenden Thore, dessen Gewicht seiner Fläche proportional ist, und welches von zweien an den Enden des Thores angebrachten Stützhaken gehalten wird.

§. 111.

Anwendung des Princips auf ein loses System von Punkten. Gleichgewichts-Curve. Zwei Körper von den Gewichten Q und P, die sich auf den festen Curven ACE und BDH (Fig. 73) befinden, seien durch den undehnbaren, vollkommen biegsamen Faden CRD, welcher über die Rolle oder Leitscheibe R frei hin und her beweglich ist, mit einander verbunden. Es wird vorausgesetzt, daß die obigen Körper sich längs den Curven ohne alle Hindernisse verschieben lassen, und daß sie sich an jeder Stelle vermittelst des sie verbindenden Fadens einander im Gleichgewicht erhalten. Unter dieser Voraussetzung bilden also beide Körper ein loses System von Punkten, dessen fortwährendes Gleichgewicht offenbar eine bestimmte Beziehung zwischen den

festen Curven bedingt. Findet letztere statt, so nennt man jede Curve die Gleichgewichtscurve der andern.

Wir wollen nun das eine Gewicht Q und die Curve ACE, auf welcher sich jenes befindet, als gegeben betrachten, die Größe des andern Gewichtes P aber, so wie die geometrische Beschaffenheit der zugehörigen Gleichgewichtscurve BDH der obigen Bedingung gemäß zu bestimmen suchen.

Zu dem Ende ziehe man durch den Mittelpunkt der Rolle R die vertikale Linie RN, und nehme diese zur gemeinschaftlichen Abscissenachse der beiden Curven, von welchen die zweite ihren Anfang in dem auf der Lothrechten RG befindlichen Punkte B hat. Es werde angenommen, daß, wenn sich das Gegengewicht P im Anfangspunkte B der Gleichgewichts-Curve befindet und also frei lothrecht herabhängt, alsdann das andere Gewicht Q im Punkte A der gegebenen Curve ECA sein mag. Der vollkommen biegsame Faden, welcher die beiden Gewichte verbindet, wird dann die Lage ARB haben, und seine constante Länge soll mit l bezeichnet werden. Setzt man daher dessen lothrecht herabhängendes Ende RB = b, so ist die Länge des nach der Richtung AR gespannten Endes AR = l − b.

Im Punkte A ziehe man zur Curve ACE die Normale AN, und zerlege die Kraft Q in A nach den Richtungen RA und AN in die Seitenkräfte Q′ und Q″, so verhält sich, weil die Richtungslinien der Kräfte Q, Q′ und Q″ mit den Seiten RN, RA und AN des Dreiecks ARN parallel sind,

$$Q : Q' = RN : RA; \quad \text{folglich } Q' = \frac{RA}{RN} \cdot Q.$$

Zieht man nun aus A die Linie AG in horizontaler Richtung, also perpendikulär auf RG, und setzt RG = a, die Subnormale NG = n, welche letztere bekannt sein wird, sofern die Curve ACE gegeben ist, dann ist RN = a + n.

Außerdem war $RA = l - b$, und durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$Q' = \frac{l - b}{a + n} \cdot Q.$$

Da nun die beiden Kräfte P und Q', welche nach den Richtungen RB und RA wirken, mittelst der frei beweglichen Rolle R mit einander im Gleichgewichte sein müssen, so hat man die Bedingung $P = Q'$, oder

$$P = \frac{l - b}{a + n} \cdot Q; \tag{1}$$

wodurch die Größe des constanten Gegengewichtes P bestimmt ist.

Um nun die Gleichung der fraglichen Curve BDH zu finden, nehmen wir an, daß eine Bewegung der beiden Gewichte Q und P stattgefunden habe, wodurch jenes von A nach C, dieses aber von B nach D fortgerückt, und der sie verbindende Faden in die Lage CRD übergegangen ist. Fällt man von den Punkten C und D die Perpendikel CK und DF auf die Vertikale RG, so ist Q bei dieser Bewewegung um den Weg KG lothrecht gehoben, während P sich gleichzeitig um die Länge BF lothrecht gesenkt hat. Sofern nun die genannten Gewichte in den Punkten C und D noch eben so mit einander im Gleichgewichte sind, wie vorhin in A und B, repräsentiren KG und BF ihre virtuellen Geschwindigkeiten, und daher hat man nach dem Carteſischen Grundsatze:

$$P : Q = KG : BF.$$

Wählt man nun R als Anfangspunkt der Coordinaten der Curve ECA und setzt $RK = z$, $KG = u$, deren Relation durch eine Gleichung von der Form $u = f(z)$ gegeben ist, so ist $KG = a - z$. Für die Gleichgewichtscurve BDH seien $BF = x$ und $FD = y$ die Coordinaten des Punktes D, in Bezug auf B als den Anfangspunkt derſel-

ben. Diese Werthe an die Stelle von KG und BF in die obige Proportion gesetzt, verwandeln dieselbe in folgende:

$$P : Q = a - z : x;$$

und wenn man hierin für P den vorhin gefundenen Werth (1) setzt und dann x entwickelt, so kommt

$$(2) \qquad x = \frac{a+n}{l-b} \cdot (a - z);$$

eine Gleichung, welche für jeden Werth von z immer die zugehörige Abscisse x der fraglichen Curve BDH liefert. Da nun alles, was sich auf die Curve ECA bezieht, bekannt ist, so könnte man mittelst der obigen Formel die Gleichgewichts-Curve BDH leicht construiren, wenn man die verschiedenen Werthe von x berechnet und von B aus auf die Vertikale BG abträgt. Ist nämlich BF ein solcher Werth, der sich nach der obigen Formel für z = RK ergeben hat, so ziehe man die Ordinate FD normal auf RG und bestimme deren Endpunkt D dadurch, daß man mit einem Radius RD, gleich der Differenz zwischen der Länge l des Fadens CRD und der bekannten Länge CR, aus R als Mittelpunkt einen Kreisbogen schlägt. Dieser Bogen wird die aus F gezogene Ordinate in einem Punkte D schneiden, welcher der Gleichgewichts-Curve angehört.

Zur Bestimmung der Länge der Ordinate FD = y, welche zu der beliebigen Abscisse BF = x der Gleichgewichts-Curve gehört, bezeichne man die Länge des einen Endes RD des Fadens CRD mit l', so hat dessen anderes Ende RC die Länge $l - l'$. Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken RCK und RDF ergeben sich nun leicht die Gleichungen:

$$(l - l')^2 = z^2 + u^2,$$

und

$$l'^2 = (b + x)^2 + y^2,$$

welche sich nach der Elimination von l' auf folgende reduciren:

$$y^2 = (1 - \sqrt{z^2 + u^2})^2 - (b + x)^2.$$

Substituirt man hierin für x den vorhin gefundenen Werth (2), so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$(3)\quad y = \sqrt{\left(1 - \sqrt{z^2 + u^2}\right)^2 - \left(b + \frac{a + n}{1 - b}(a - z)\right)^2}.$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit der vorigen (2), bestimmt für jeden Werth von z, womit auch gleichzeitig u bekannt ist, die zusammengehörigen Coordinaten für die verschiedenen Punkte der Gleichgewichts-Curve.

§. 112.

Bei der so eben dargestellten allgemeinen Theorie der Gleichgewichtscurve wurde vorausgesetzt, daß die Curve ACE, auf welcher sich das bekannte Gewicht Q befindet, gegeben sei. Wir wollen daher, als besondern Fall, einen Kreisquadranten dafür annehmen, der mit dem Halbmesser GA = GE = a (Fig. 74) aus G als Mittelpunkt beschrieben ist. Die Rolle, über welche der, die beiden Gewichte Q und P verbindende Faden geleitet ist, befinde sich im Scheitel E dieses Quadranten, und die übrigen Bezeichnungen werden eben so, wie vorhin, beibehalten.

Für den Endpunkt A des Quadranten ist AG die Normale, also die Subnormale n = 0. Ferner ist

$$AE = 1 - b = a\sqrt{2}, \text{ daher } \frac{a + n}{1 - b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Die Gleichung des Kreises, welcher a zum Halbmesser hat, ist bekanntlich $u^2 = 2az - z^2$; also $u^2 + z^2 = 2az$, und wenn man diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke des vorhergehenden Paragraphen setzt, so erhält man folgende Resultate:

(1) $P = Q\sqrt{2}$;

(2) $x = \frac{1}{2}(a - z)\sqrt{2}$;

(3) $y = \sqrt{(l - \sqrt{2az})^2 - (b + \frac{1}{2}(a-z)\sqrt{2})^2}.$

Will man eine Gleichung bloß zwischen den Coordinaten x und y der Gleichgewichts-Curve haben, so entwickele man die Größe z aus der zweiten Gleichung, und setze deren Werth in die dritte. Dadurch erhält man

(4) $y = \sqrt{(l - \sqrt{2a^2 - 2ax\sqrt{2}})^2 - (b+x)^2}.$

Man fälle den Perpendikel GL vom Mittelpunkte G auf die Linie AE und bezeichne die Länge desselben mit d, so ist $d = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Zieht man ferner aus dem Punkte C, in welchem sich das gegebene Gewicht Q befindet, wenn das Gegengewicht P auf der Gleichgewichts-Curve in D ist, den Radius CG und bezeichnet den Erhebungswinkel AGC mit α, so lassen sich die vorigen Ausdrücke noch etwas einfacher darstellen. Es wird nämlich, wenn $EK = z$ die zum Punkte C gehörige Abscisse ist, $GK = a - z$ sein, und weil sich GK durch $a\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ ausdrücken läßt, so hat man $a - z = a\,\mathrm{Sin}\,\alpha$. Nach den Gleichungen (2) und (4) entsteht also:

(5) $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\mathrm{Sin}\,\alpha = d\,\mathrm{Sin}\,\alpha;$

(6) $y = \sqrt{(l - a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\,\alpha})^2 - (b + \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\mathrm{Sin}\,a)^2}.$

Die Coordinaten BM und MH des tiefsten Punktes der Gleichgewichts-Curve findet man, wenn man entweder in den beiden letzten Formeln den Winkel $\alpha = 90^0$, oder in den Gleichungen (2) und (3) die Abscisse $z = 0$ setzt. Dadurch entsteht

(7) $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = d; \quad y = \sqrt{l^2 - (b + \frac{1}{2}a\sqrt{2})^2}.$

Mittelst der Formel (5) lassen sich die verschiedenen Punkte der Gleichgewichts-Curve leicht construiren. Die Abscisse x ist nämlich gleich dem Sinus des Erhebungswinkels α für den Halbmesser $GL = d$. Beschreibt man also mit diesem Halbmesser aus dem Mittelpunkte G einen Kreisquadranten A'LS, und fällt aus dem Punkte B', in welchem

derſelbe den einen Schenkel CG des Erhebungswinkels ſchneidet, den Perpendikel B'F' auf den anderen Schenkel AG, ſo iſt B'F' die Abſciſſe des Punktes D der Gleichgewichts-Curve, in welchem ſich das Gegengewicht P befindet, wenn das Gewicht Q auf dem Quadranten in C iſt. Man mache alſo BF = B'F', ziehe FD normal auf EG und beſtimme durch einen Zirkelſchlag aus E den Punkt D ſo, daß ED = AEB — CE wird, ſo iſt D ein Punkt der fraglichen Curve. — Ganz auf dieſelbe Weiſe laſſen ſich beliebig viele Punkte der Gleichgewichtscurve finden, durch welche die letztere demnächſt ſtetig gezogen werden kann.

Anm. Weil bei dieſer Conſtruction der Sinus eine Hauptrolle ſpielt, ſo hat Belidor die ſo eben dargeſtellte Curve, welche er in ſeiner Ingenieur-Wiſſenſchaft (S. 38—48 der deutſchen Ausgabe, Nürnberg 1757) auf die Anordnung der Brückenklappen anwendet, ſehr uneigentlich eine Sinusoide genannt. Sie iſt aber nichts anderes als eine Epicykloide, wie dies ſchon Johann Bernoulli einige 60 Jahre früher bemerkt hat. Den Beweis hierfür kann man in Grunert's Lehrbuch der Statik S. 561 u. f. nachſehen.

Fünftes Kapitel.

Anwendung der allgemeinen Gesetze des Gleichgewichtes auf die Schwere. Die Lehre vom Schwerpunkte.

---

§. 113.

Die Erfahrung lehrt uns, daß alle Naturkörper das Bestreben haben, sich dem Mittelpunkte der Erde zu nähern. Wird diesem Bestreben kein Hinderniß entgegengesetzt, so bewegen sich die Körper wirklich gegen die Erde herab, d. h. sie fallen; findet dagegen ein materielles Hinderniß statt, so nimmt man einen beständigen Druck oder Zug wahr, indem der Körper das Streben zum Fallen nicht aufgiebt. Die Ursache dieser Erscheinung ist eine durch die ganze Natur verbreitete Kraft, welche die Schwere (Gravitation) genannt wird.

Die Richtung der Schwerkraft, oder die der geraden Linie, in der ein Körper frei gegen die Erde herabfällt, heißt lothrecht oder vertikal. Sie wird bestimmt durch einen dünnen, vollkommen biegsamen Faden, an welchem ein Körper herabhängt. Jede Ebene durch eine solche Linie heißt eine Vertikalebene; dagegen heißt eine Ebene, auf der die lothrechte Linie perpendikulär steht, eine Horizontalebene, und jede gerade Linie in ihr eine Horizontallinie.

§. 114.

Der Druck oder Zug, den der Körper wegen der beständig auf ihn wirkenden Schwerkraft gegen ein horizontales Unterlager, oder an dem lothrechten Faden, woran er hängt, ausübt, heißt sein Gewicht, und man sagt: ein Körper habe mehr Gewicht als ein anderer, wenn er stärker drückt oder zieht.

Um eine Vergleichung zwischen verschiedenen Gewichten möglich zu machen, wird ein bestimmtes Gewicht als Einheit zum Grunde gelegt. Diese Einheit ist, an sich betrachtet, ganz willkürlich, und daher in verschiedenen Ländern auch verschieden angenommen. Im preußischen Staate ist dafür, zufolge der Maaß- und Gewichts-Ordnung vom 16. Mai 1816, der sechs und sechszigste Theil vom Gewicht eines Kubikfußes destillirten Wassers, bei einer Temparatur von 15 Grad Reaumur im luftleeren Raume, gesetzlich festgestellt, welches unter dem Namen Pfund (u.) bekannt ist.

§. 115.

Den Raum, den ein Körper nach Länge, Breite und Höhe einnimmt, nennt man sein Volumen oder seinen Kubikinhalt. Es ist schon in der Einleitung bemerkt, daß die Materie das Raumerfüllende sei. Die Menge der materiellen Theile, welche in dem Volumen eines Körpers enthalten sind, heißt seine Masse. Materie und Masse unterscheiden sich daher wie Qualität und Quantität.

Die Schwere wirkt auf jedes materielle Theilchen eines Körpers mit gleicher Intensität. Je mehr Masse also ein Körper enthält, desto größer ist die Wirkung der Schwere auf ihn, d. h. desto größer ist sein Gewicht. Daher verhalten sich allemal die Massen zweier Körper, wie die Gewichte derselben.

Je mehr materielle Theile in dem Volumen eines Kör-

pers enthalten sind, desto näher müssen diese Theile an einander liegen, d. h. desto größer ist die Dichtigkeit des Körpers; bei gleichem Volumen verhalten sich daher die Dichtigkeiten zweier Körper, wie ihre Massen.

Bei gleicher Dichtigkeit hingegen verhalten sich die Volumen wie die Massen, und also auch wie die Gewichte.

Sind demnach P, P' die Gewichte; M, M' die Massen; D, D' die Dichtigkeiten und V, V' die Volumen zweier Körper, so verhält sich, dem Obigen zufolge,

$$M : M' = P : P';$$

$$M : M' = \begin{pmatrix} D : D' \\ V : V' \end{pmatrix} = DV : D'V';$$

also auch $$P : P' = DV : D'V',$$

und $$D : D' = \frac{P}{V} : \frac{P'}{V'}.$$

d. h. „Bei verschiedenartigen Körpern verhalten sich die „Dichtigkeiten direkt wie die Gewichte und umgekehrt „wie die Volumen."

§. 116.

Bei den Untersuchungen, welche wir in den vorhergehenden Kapiteln angestellt haben, setzten wir ein System von materiellen Punkten voraus, die sich in beliebigen Entfernungen von einander befinden und an welchen beliebige Kräfte wirken. Die unter dieser Voraussetzung gefundenen Gleichungen behalten offenbar ihre Gültigkeit, wie groß auch die Anzahl der Punkte und wie klein auch die Entfernungen sein mögen. Nimmt man nun an, daß das System von Punkten innerhalb eines, auf eine bestimmte Art begrenzten Raumes enthalten sei, so werden die Abstände der materiellen Punkte von einander in demselben Maaße immer kleiner werden als ihre Anzahl größer wird, und jene werden unendlich klein sein, wenn diese unendlich groß angenommen

wird. Durch diese Betrachtungen gelangen wir zu dem Begriff eines continuirlichen Systems von materiellen Punkten im Gesatz des discontinuirlichen, welches der Gegenstand der früheren Untersuchungen war.

Da die Theilbarkeit der Materie ohne Grenzen ist, so leuchtet ein, daß man sich jeden physischen Körper als den Inbegriff einer unendlichen Anzahl von materiellen Punkten, in unendlich kleinen Entfernungen von einander, vorstellen kann, und umgekehrt kann man die materiellen Punkte als die elementaren Bestandtheilchen eines Körpers betrachten, die in ihrer Gesammtheit denselben constituiren. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, erscheint jeder Körper als ein continuirliches System von materiellen Punkten, an welchen Schwerkräfte nach parallelen Richtungen wirken, und daher werden die Gleichungen, welche wir für parallele, an einem discontinuirlichen System von Punkten wirksame Kräfte gefunden haben, auch mit geringer Modification für einen der Schwere unterworfenen physischen Körper gültig sein.

Strenge genommen sind zwar die Schwerkräfte nicht mit einander parallel, weil sie sämmtlich nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet sind, und bei großen Entfernungen muß dies auch berücksichtigt werden; aber in Bezug auf die terrestrischen Körper, womit wir Versuche anstellen können, kann man diese Richtungen immer als parallel annehmen, weil ihre Entfernung vom Erdmittelpunkte, in Vergleich zu dem größten Abstande ihrer materiellen Punkte von einander, als unendlich groß erscheint.

§. 117.

Bei den Untersuchungen über die parallelen Kräfte haben wir gefunden, daß ihre Mittelkraft gleich der Summe derselben ist, wofern sie nicht mit einander im Gleichgewichte sind, und daß man den Abstand des Angriffspunktes der

Mittelkraft von irgend einer Ebene findet, indem man die algebraiſche Summe der ſtatiſchen Momente der Seitenkräfte, in Bezug auf dieſe Ebene genommen, durch die algebraiſche Summe der Kräfte ſelbſt dividirt.

Sind nämlich A, B, C ··· ꝛc. die parallelen Kräfte, welche auf ein discontinuirliches Syſtem von Punkten wirken, und bezeichnen a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' u. ſ. w. die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in Bezug auf drei, einander unter rechten Winkeln ſchneidende Ebenen; iſt ferner M die Intenſität der Mittelkraft, und ſind m, m', m'' die auf dieſelben Ebenen bezogenen Coordinaten ihres Angriffspunktes, ſo haben wir in §. 73 die Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} M &= A + B + C + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma A; \\ Mm &= Aa + Bb + Cc + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma Aa; \\ Mm' &= Aa' + Bb' + Cc' + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma Aa'; \\ Mm'' &= Aa'' + Bb'' + Cc'' + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma Aa''. \end{aligned}$$

Dividirt man die drei letzten von dieſen Gleichungen durch die erſte, ſo kommt

$$m = \frac{\Sigma Aa}{\Sigma A}; \quad m' = \frac{\Sigma Aa'}{\Sigma A}; \quad m'' = \frac{\Sigma Aa''}{\Sigma A}.$$

Den durch dieſe Coordinaten beſtimmten Angriffspunkt der Mittelkraft haben wir Mittelpunkt oder Centrum der parallelen Kräfte genannt, weil ſeine Lage im Syſtem von den Richtungen der Kräfte ganz unabhängig iſt, wofern dieſe nur ſtets parallel mit einander bleiben. Es hat ſich nämlich gezeigt, daß dieſer Punkt in jedem Syſteme von materiellen Punkten, worauf parallele Kräfte wirken, allemal vorhanden iſt, ſo lange ſich letztere nicht auf ein Kräftepaar reduciren, und daß er ſtets derſelbe bleibt, wenn auch die Richtungslinien, indem ſie ſich um die Angriffspunkte drehen, andere und andere Lagen annehmen, ohne daß ſie aufhören parallel zu ſein.

Denkt man ſich nun unter den vorhin genannten Kräf-

ten A, B, C ··· ꝛc. lauter Schwerkräfte, und ſetzt man voraus, daß das Syſtem von materiellen Punkten, worauf dieſelben wirken, ein continuirliches oder ein phyſiſcher Körper ſei, ſo bleiben die vorigen Geſetze noch dieſelben. Die Mittelkraft von allen den parallelen Schwerkräften iſt dann dem Gewichte des Körpers gleich und ihr Angriffspunkt, d. h. das Centrum der parallelen Kräfte, erhält jetzt den beſondern Namen: „Mittelpunkt der Schwere“ oder „Schwerpunkt.“ Er iſt, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgt, in jedem Körper einzig vorhanden; denn der Ausnahmefall, wo ſich die Kräfte auf zwei gleiche und entgegengeſetzte reduciren, kann hier nicht eintreten, weil die Schwerkräfte nicht bloß nach parallelen, ſondern auch nach einerlei Richtungen wirken. Auch folgt aus dem Vorhergehenden, daß der Schwerpunkt für alle Lagen des Körpers ſtets derſelbe bleibt, und daß man ſich in ihm das ganze Gewicht des Körpers als eine einzelne Kraft concentrirt denken kann.

Nimmt man das Centrum der parallelen Kräfte als Anfangspunkt der Coordinaten, ſo iſt

$$m = 0, \quad m' = 0, \quad m'' = 0,$$

und daher gehen die vorigen Gleichungen in folgende über:

$$1)\ M = A + B + C + \cdots \text{ ꝛc.}$$
$$2)\ 0 = Aa + Bb + Cc + \cdots \text{ ꝛc.}$$
$$3)\ 0 = Aa' + Bb' + Cc' + \cdots \text{ ꝛc.}$$
$$4)\ 0 = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \cdots \text{ ꝛc.}$$

Denkt man ſich den Schwerpunkt eines Körpers vertikal unterſtützt, ſo erleidet die Unterſtützung, wie die erſte Gleichung anzeigt, einen Druck = M, d. h. gleich dem ganzen Gewichte des Körpers. Die drei anderen Gleichungen beziehen ſich auf Drehung um geradlinige Achſen, welche durch den Schwerpunkt gehen, und da jede von ihnen mit Null verglichen iſt, ſo geben ſie zu erkennen, daß eine ſolche Drehung nicht ſtatt finden kann. Hieraus folgt die charakteri-

stische Eigenschaft des Schwerpunktes, daß, wenn derselbe unterstützt ist, alsdann der Körper in jeder beliebigen Lage um ihn im Gleichgewichte bleibt.

§. 118.

Was nun die Bestimmung des Schwerpunktes im Allgemeinen anbelangt, so findet man ihn durch Rechnung ganz nach denselben Gesetzen, wonach wir im zweiten Kapitel den Mittelpunkt der parallelen Kräfte gefunden haben. Ist nämlich eine Schwerkraft über eine krumme Linie, die in einer Ebene liegt, oder über eine Ebene selbst vertheilt, so zerlege man die Curve oder die Ebene in solche Theile, von denen die Schwerpunkte bekannt sind, nehme von den sämmtlichen Theilen die Summe der Momente in Bezug auf zwei nicht mit einander parallele Linien, die in derselben Ebene liegen, und dividire jede dieser Summen durch die Summe der Gewichte, oder durch das Gewicht der ganzen Curve oder Ebene; so findet man dadurch die Abstände des Schwerpunktes von jenen beiden Linien. In derselben Art bestimmt sich der Schwerpunkt von einem Körper oder von der Oberfläche desselben, wenn man in Bezug auf drei sich schneidende Coordinaten-Ebenen die Summen der Momente bildet, und diese jedesmal durch das ganze Gewicht des Körpers oder dessen Oberfläche dividirt.

Nennt man jede gerade Linie, welche durch den Schwerpunkt einer Fläche oder eines Körpers geht, eine Schwerlinie oder einen Durchmesser der Schwere, und jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene eine Schwerebene, so kann man den Schwerpunkt construiren: 1) durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien, 2) durch den Durchschnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene, und 3) durch drei Schwerebenen, die sich im Schwerpunkte schneiden. Die bei-

den ersten Constructionsmethoden werden hier öfter in Anwendung kommen.

§. 119.

Ein Körper wird homogen oder gleichartig genannt, wenn die Materie in dem Volumen desselben dergestalt vertheilt ist, daß auf gleiche Theile des Volumens gleich viel Materie kommt; im entgegengesetzten Falle heißt der Körper heterogen oder ungleichartig. In homogenen Körpern ist die Schwere gleichmäßig vertheilt, d. h. gleiche Raumtheile haben gleiche Gewichte; oder, es verhalten sich die Schwerkräfte, welche auf verschiedene Theile eines Körpers wirken, wie die Volumen derselben. Daher kann man bei allen Schwerpunktsbestimmungen die Schwerkraft, welche auf einen Theil des Körpers wirkt, dessen Volumen der Raumeinheit gleich ist, für die Einheit der Schwere des ganzen Körpers annehmen. Hierdurch gewinnt man den Vortheil, daß dieselbe Zahl, welche die Größe des Volumens ausdrückt, auch zugleich die Größe der darin gleichförmig vertheilten Schwere angiebt. Dieselbe Erleichterung läßt sich, wie man leicht einsehen wird, bei Linien und Flächen eben so in Anwendung bringen. Wenn daher in den folgenden Untersuchungen von dem Momente eines Raumtheiles die Rede sein wird, so verstehe man darunter das Produkt aus dem Volumen desselben in den Abstand seines Schwerpunktes von der Momentenachse oder Momentenebene.

I. Bestimmung der Schwerpunkte von Linien.

§. 120.

Schwerpunkt der geraden Linie. Wenn über eine gerade Linie eine Materie gleichförmig vertheilt ist, so daß

gleiche Längentheile gleiche Gewichte haben, so liegt der Schwerpunkt dieser Linie in der Mitte ihrer Länge.

Es sei nämlich **AB** (Fig. 75) die schwere Linie und **C** ihre Mitte. Man denke sich beide Hälften **AC** und **BC** in eine gleiche Anzahl unbegrenzt kleiner und gleicher Elementartheilchen getheilt, die nach der Voraussetzung von gleichen Schwerkräften nach parallelen Richtungen angeregt werden, so wird es immer auf beiden Seiten von **C** und in gleichem Abstande von diesem Punkte zwei Theilchen wie **D** und **E** geben, deren parallele Schwerkräfte eine Mittelkraft liefern, für welche **C** der Angriffspunkt ist. Dies gilt von allen Elementartheilchen der Linie **AB**, die von **C** zu beiden Seiten gleich weit abstehen; woraus folgt, daß **C** der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist, welche auf **AB** wirken, und insofern dies lauter Schwerkräfte sind, ist die Mitte **C** der Schwerpunkt der Linie **AB**.

§. 121.

Bestimmung des Schwerpunktes vom Umfange eines beliebigen Dreiecks. Wird vorausgesetzt, daß über den Umfang des beliebigen Dreiecks **ABC** (Fig. 76) eine Materie gleichförmig vertheilt sei, so verhalten sich die Gewichte der Seiten wie ihre Längen. Die Schwerpunkte der Seiten **AB**, **AC** und **BC** befinden sich, nach dem Vorhergehenden, in ihren Mitten **D**, **E** und **F**, und wenn man sich in diesen Punkten die den genannten Seiten proportionalen Gewichte vereinigt denkt, so hat man ein unveränderliches System von drei parallelen Kräften, von deren Mittelkraft nun der Angriffspunkt zu bestimmen ist. Dies kann auf zweierlei Art geschehen, und zwar durch Rechnung und durch geometrische Construction.

Um zuerst die Lage des genannten Punktes durch Rechnung zu bestimmen, setze man die Längen der Seiten **BC**

$= a$, $AC = b$, $AB = c$; die Perpendikel von den Winkelspitzen A, B, C auf die gegenüber liegenden Seiten nach der Reihe gleich a', b', c' und die Perpendikel von dem noch unbekannten Schwerpunkte G auf dieselben Seiten, gleich x, y und z. Nimmt man nun zuerst die Seite BC als Momentenachse und fällt darauf aus den beiden Punkten D und E die Perpendikel DD' und EE', von denen jeder gleich dem halben aus A auf BC gefällten Perpendikel AA', also gleich $\frac{1}{2}a'$ ist, so findet sich das Moment von AC gleich $\frac{1}{2}a' \cdot b$; das Moment von AB gleich $\frac{1}{2}a' \cdot c$, und das Moment von BC selbst ist gleich Null. Demnach ist die Summe der Momente in Bezug auf die Achse BC gleich $\frac{1}{2}a'(b+c)$, und wenn man dies durch die Summe der Schwerkräfte, nämlich durch $a+b+c$ dividirt, so findet man den Abstand des Schwerpunktes G von der Seite BC, nämlich:

$$x = \frac{\frac{1}{2}a'(b+c)}{a+b+c}.$$

Bezeichnet man die Summe der drei Seiten $a+b+c$ mit S, so ist $b+c = S-a$, und demnach

$$(1) \qquad x = \tfrac{1}{2}a' \cdot \frac{S-a}{S}.$$

Ganz in derselben Art findet man die Abstände des Schwerpunktes G von den Seiten AC und AB durch die Formeln

$$(2) \qquad y = \tfrac{1}{2}b' \cdot \frac{S-b}{S},$$

$$(3) \qquad z = \tfrac{1}{2}c' \cdot \frac{S-c}{S}.$$

Multiplicirt man die erste Formel im Zähler und Nenner mit a, die zweite mit b und die dritte mit c, und berücksichtigt, daß die Produkte $\frac{1}{2}a'a$, $\frac{1}{2}b'b$, $\frac{1}{2}c'c$ den Inhalt F des gegebenen Dreiecks ausdrücken, so entsteht

$$x = \frac{S-a}{Sa} \cdot F; \quad y = \frac{S-b}{Sb} \cdot F; \quad z = \frac{S-c}{Sc} \cdot F.$$

§. 122.

Construction des Schwerpunktes von dem Umfange eines Dreiecks. Man verbinde die Schwerpunkte D und E (Fig. 76) zweier Seiten AB, AC durch eine gerade Linie DE, und betrachte diese als eine solche, an deren Endpunkten die durch AB und AC dargestellten Kräfte nach parallelen Richtungen wirken. Nach §. 57 liegt dann der Angriffspunkt K der Mittelkraft dieser beiden Kräfte auf der Geraden DE, und er bestimmt sich durch die Proportion:

(1) $$DK : EK = AB : AC.$$

Denkt man sich nun in K die Gewichte AB und AC vereinigt angebracht, und verbindet diesen Punkt mit dem Schwerpunkte F der dritten Seite BC, so muß auf der Verbindungslinie KF der Angriffspunkt der Mittelkraft von den parallelen, in K und F wirkenden Kräften AB + AC und BC, folglich auch der Schwerpunkt der drei Seiten AB, AC und BC liegen, und daher ist KF eine Schwerlinie für den Umfang des gegebenen Dreiecks ABC. Ganz in derselben Art läßt sich noch eine zweite Schwerlinie DH construiren, wenn man den Punkt H auf der Verbindungslinie EF so wählt, daß sich

(2) $$EH : FH = BC : AC$$

verhält. Da nun der Schwerpunkt des Umfanges ABC zugleich auf FK und DH liegen muß, so folgt, daß ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt G der gesuchte Schwerpunkt ist.

Man ziehe noch die Verbindungslinie DF, so ist, nach einem bekannten Satze der Geometrie, $DE = \frac{1}{2}BC$, $EF = \frac{1}{2}AB$ und $DF = \frac{1}{2}AC$; daher lassen sich die beiden vorigen Proportionen auch folgendergestalt darstellen:

$$DK : EK = DF : EF$$

und

$$EH : FH = DE : DF.$$

Hieraus sieht man, daß die Schwerlinien FK und DH die

Winkel **DFE** und **EDF** halbiren, und daß also der Schwerpunkt **G** zugleich der Mittelpunkt eines Kreises ist, der in das Dreieck **DEF** beschrieben werden kann.

Im vorliegenden Falle giebt es aber noch eine einfachere Construction des Schwerpunktes, welche auf folgendem Wege gefunden werden kann.

Man halbire nämlich die Winkel **BAC** und **ACB** durch die geraden Linien **AL** und **CM**, so läßt sich leicht beweisen, daß diese Linien bezüglich mit **FK** und **DH** parallel sind. Denn **AEFD** ist ein Parallelogramm, in welchem zwei gegenüber liegende Winkel bei **A** und **F** durch die Linien **AL**, **FK** halbirt sind. Aus nahe liegenden Gründen der Geometrie müssen also die genannten Halbirungslinien parallel mit einander sein. Aus denselben Gründen folgt aber auch der Parallelismus der Linien **CM** und **DH**, welche die bei **C** und **D** sich gegenüber liegenden Winkel des Parallelogrammes **CEDF** halbiren.

Aus dem hier dargelegten ergiebt sich nun die folgende höchst einfache Construction des Schwerpunktes:

Man halbire zwei Winkel des gegebenen Dreiecks, und ziehe aus den Mitten der gegenüber liegenden Seiten mit den geraden Halbirungslinien zwei Parallelen, so sind letztere Schwerlinien, und ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt ist der gesuchte Schwerpunkt.

§. 123.

Von einem unveränderlich zusammenhangenden System gerader Linien von gleichförmiger Schwere findet man den Schwerpunkt, wenn die Gewichte der Linien in ihren Mitten vereinigt gedacht, und von diesen Punkten auf zwei, nicht mit einander parallele, Achsen Perpendikel gefällt werden. Die Summe der Momente sämmtlicher Linien, in Bezug auf

jede dieser beiden Achsen genommen, dividirt durch die Summe der Linien selbst, giebt alsdann den Abstand des gesuchten Schwerpunktes von der bezüglichen Achse.

Ist das System von gleichförmig schweren Linien ein Theil von dem Umfange eines regulären Polygons **ABC..G** (Fig. 77), so denke man sich durch den Mittelpunkt **O** des darum beschriebenen Kreises eine Gerade **XY** gelegt, welche mit der Sehne **AG** parallel ist, und nehme diese zur Momentenachse. Es sei **BC** irgend eine von den gleichen Seiten des regulären Polygons und **QR** der normale Abstand ihres Schwerpunktes **Q** von der Achse **XY**; alsdann wird ihr Moment rücksichtlich dieser Achse durch das Produkt **BC·QR** ausgedrückt. Man fälle von den Endpunkten **B** und **C** der in Betrachtung gezogenen Seite **BC** die Perpendikel **BB'**, **CC'** auf die Sehne **AG**, und ziehe **BC''** parallel mit **AG**. Verbindet man nun die Mitte **Q** der Seite **BC** mit dem Kreis-Mittelpunkte **O** durch die Gerade **OQ**, so ist diese Linie auf **BC** senkrecht, und man kann leicht beweisen, daß die Dreiecke **OQR** und **BCC''** mit einander ähnlich sind. Hieraus ergiebt sich die Proportion

$$OQ : QR = BC : BC'';$$

also

$$BC \cdot QR = OQ \cdot BC''.$$

Setzt man $OQ = a$ und berücksichtigt, daß $BC'' = B'C'$ die Projection der Polygonseite **BC** auf die Sehne **AG** ist, so erhält man für das Moment dieser Seite den Ausdruck

$$a \cdot B'C'.$$

Man findet demnach das Moment von irgend einer der gleichen Polygonseiten in Bezug auf die Achse **XY**, wenn man den Perpendikel vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises auf diese Seite mit ihrer Projection auf die Sehne **AG** multiplicirt. Dies Gesetz läßt sich für alle andern Polygonseiten ganz auf dieselbe Art nachweisen, und da die vom Kreis-Mittelpunkte **O** auf sie gefällten Perpendikel alle die-

selbe Länge a haben, so erhält man für die Summe der Momente aller Polygonseiten, oder für das Moment des Umfanges ABC...G, den Ausdruck

$$a\cdot AB' + a\cdot B'C' + a\cdot C'D' + \cdots + a\cdot F'G =$$
$$a(AB' + B'C' + C'D' + \cdots + F'G).$$

Die Summe der Projectionen, welche auf der rechten Seite dieser Gleichung in der Klammer steht, giebt aber die Länge der Sehne AG, und wenn diese mit s bezeichnet wird, so ist

$$\text{Moment von } ABC\ldots G = as.$$

Ist OD eine Linie, welche die Sehne AG senkrecht durchschneidet, so theilt diese den Umfang ABC...G in zwei congruente Hälften und ist daher eine Schwerlinie desselben. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man von zwei Polygonseiten, z. B. BC und EF, die zu beiden Seiten der Linie OD einerlei Lage haben, die Momente in Bezug auf OD als Achse bildet, wo sich dann ergiebt, daß diese Momente immer mit einander gleich sind. Es sei demnach P der auf OD befindliche Schwerpunkt des Umfanges ABC...G, und sein Abstand PO vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises werde mit z bezeichnet. Ferner sei die ganze Länge des Umfanges

$$AB + BC + CD + \cdots + FG = u;$$

so ergiebt sich, nach der bekannten Regel §. 65 (2)

$$z = \frac{as}{u},$$

woraus sich die folgende Proportion bilden läßt:

$$u : s = a : z.$$

D. h. der Umfang verhält sich zur zugehörigen Sehne, wie der vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises auf eine der Polygonseiten gefällte Perpendikel zum Abstande des gesuchten Schwerpunktes von dem genannten Kreis-Mittelpunkte.

§. 124.

Schwerpunkt eines gegebenen Kreisbogens. Die Art und Weise, wie im vorigen Paragraphen der Schwerpunkt von einem Stück des Umfangs eines regulären Polygones gefunden wurde, ist offenbar unabhängig von den Längen und der Anzahl der Polygonseiten, und bleibt daher ganz dieselbe, wie klein auch diese Seiten und wie groß auch ihre Anzahl, innerhalb eines begrenzten umschriebenen Kreisbogens, gedacht werden. Je kleiner man sich nun jene und je größer man sich diese denkt, desto näher wird das Stück des Polygon-Umfanges einem Kreisbogen kommen. Stellt man sich die Anzahl der Polygonseiten unendlich groß und ihre Längen unendlich klein vor, so fällt das Polygonstück mit dem darum beschriebenen Kreisbogen zusammen, und der Perpendikel vom Mittelpunkte auf eine der Polygonseiten wird dem Radius des Kreises gleich. Das im vorigen Paragraphen gefundene Gesetz ist dann auch zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisbogens gültig, wofern derselbe als ein Polygonstück von unendlich vielen Seiten betrachtet wird.

Bezeichnet demnach b die Länge des Bogens ADB (Fig. 78), s die Länge seiner Sehne AB und r den zugehörigen Halbmesser $CA = CB$, so liegt der gesuchte Schwerpunkt G auf der Geraden CD, welche den Mittelpunktswinkel ACB halbirt, und sein Abstand $CG = z$ vom Mittelpunkte C bestimmt sich durch die Gleichung

$$(1) \qquad z = \frac{rs}{b}.$$

Daraus läßt sich auch die folgende Proportion bilden:

$$(2) \qquad b : s = r : z;$$

d. h. der Bogen verhält sich zur Sehne, wie der Radius zum Abstande des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des zugehörigen Kreises.

Die Formel (1) läßt sich trigonometrisch darstellen, wenn man den halben Mittelpunktswinkel ACD = BCD, im Bogenmaaß für den Halbmesser 1, mit α bezeichnet. Alsdann ist: Bogen ADB = b = $2r\alpha$, Sehne AB = s = $2r\sin\alpha$; folglich entsteht, wenn dies substituirt wird,

$$(3) \qquad z = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Fällt man vom Schwerpunkte G auf einen der beiden Halbmesser BC den Perpendikel GE, setzt CE = x und GE = y, so kann man diese beiden Linien als Coordinaten des Punktes G betrachten, und man erhält leicht

$$(4) \qquad x = z\cos\alpha = r \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha};$$

$$(5) \qquad y = z\sin\alpha = r \cdot \frac{\sin\alpha^2}{\alpha}.$$

Beispiele. 1) Ist ADB der Bogen eines Sextanten, also $\alpha = \frac{1}{6}\pi$; $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so kommt

$$z = \frac{3r}{\pi}; \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.r; \quad y = \frac{3r}{2\pi}.$$

2) Für den Bogen des Quadranten ist $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin 2\alpha = 1$, und daher kommt

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.r; \quad x = \frac{2r}{\pi}; \quad y = \frac{2r}{\pi}.$$

3) Für den Bogen des Halbkreises ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\sin\alpha = 1$; $\sin 2\alpha = 0$; also

$$z = \frac{2r}{\pi}; \quad x = 0; \quad y = \frac{2r}{\pi}.$$

§. 125.

Andre Schwerpunkts-Bestimmung eines Kreisbogens. Es sei AB (Fig. 79) ein gegebener Kreisbogen, O sein Mittelpunkt und G sein Schwerpunkt, dessen Coordinaten x, y in Bezug auf zwei, beliebig durch den Mittelpunkt gezogene, Achsen OX und OY bestimmt werden sollen.

Zu dem Ende denke man den Bogen AB als eine Aneinanderreihung unendlich kleiner Theile, von denen vw ir-

gend einen vorstellen mag, und fälle aus den Mittelpunkten dieser Theilchen Perpendikel uu', uu'' auf die Achsen OX und OY. Das Moment des in Betracht gezogenen Theilchens vw in Bezug auf OX als Achse ist nun bekanntlich gleich vw·uu'; und wenn man auf gleiche Weise die Momente aller übrigen Bogentheilchen in Bezug auf dieselbe Achse bildet, so erhält man durch Summation dieser Momente den Ausdruck $\Sigma(vw \cdot uu')$. Eben so findet man in Bezug auf OY als Momentenachse die Summe der Momente aller Bogentheilchen gleich $\Sigma(vw \cdot uu'')$; während die Summe aller Bogenelemente, oder $\Sigma(vw)$, gleich AB ist. Nach früheren Lehren hat man nun zur Bestimmung von x und y die Gleichungen:

$$(1) \qquad x = \frac{\Sigma(vw \cdot uu'')}{\Sigma(vw)}; \quad y = \frac{\Sigma(vw \cdot uu')}{\Sigma(vw)}.$$

Man fälle aus den Punkten v und w die Perpendikel vv', ww' auf OX, vv'', ww'' auf OY, und ziehe die Verbindungslinie Ou, welche letztere den Halbmesser r des Kreisbogens vorstellt, so erhält man das als geradlinig zu betrachtende Dreieck vwt, welches mit den beiden Dreiecken Ouu' und Ouu'' ähnlich ist. Daraus ergeben sich die Vergleichungen:

$$vw : wt = Ou : uu';$$
$$vw : vt = Ou : uu'';$$

also

$$vw \cdot uu' = Ou \cdot wt = r \cdot v'w';$$
$$vw \cdot uu'' = Ou \cdot vt = r \cdot v''w''.$$

Das Moment des Theilchens vw in Bezug auf jede der beiden, durch den Mittelpunkt O gezogenen, Achsen ist also gleich dem Produkt aus dem Halbmesser in die Projection des fraglichen Theilchens auf die entsprechende Momentenachse. Folglich ist die Summe der Momente aller Bogentheilchen in Bezug auf jede der beiden in Rede befindlichen Achsen gleich dem Produkt aus dem Halbmesser in die Summe der Projectionen aller Theilchen auf dieselbe Achse; d. h.

$$\Sigma(vw\cdot uu') = \Sigma(r\cdot v'w') = r\cdot\Sigma(v'w');$$
$$\Sigma(vw\cdot uu'') = \Sigma(r\cdot v''w'') = r\cdot\Sigma(v''w'').$$

Offenbar ist aber die Summe der Projectionen aller Theilchen einer Linie jedesmal gleich der Projection der Linie selbst; also im vorliegenden Falle $\Sigma(v'w') = A'B'$ und $\Sigma(v''w'') = A''B''$. Mit Rücksicht hierauf ist $\Sigma(vw\cdot uu') = r\cdot A'B'$; $\Sigma(vw\cdot uu'') = r\cdot A''B''$, und wenn dies in (1) substituirt wird, so entsteht, da $\Sigma(vw) = AB$ ist,

$$(2) \qquad x = \frac{r\cdot A''B''}{AB}; \quad y = \frac{r\cdot A'B'}{AB}.$$

Aus diesen Formeln lassen sich folgende Proportionen bilden:

$$(3) \qquad \begin{cases} AB : A''B'' = r : x; \\ AB : A'B' = r : y; \end{cases}$$

d. h. der Kreisbogen verhält sich zu seiner Projection auf jede durch den Mittelpunkt gezogene Achse, wie der Radius zum Schwerpunktsabstand des Bogens von jener Achse.

Dieses Gesetz ist von der Lage des Kreisbogens gegen die Achsen ganz unabhängig, nur müssen letztere durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. — Die im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate lassen sich aus dem obigen Gesetze leicht als besondere Fälle ableiten, was hier aber keiner weitern Ausführung bedarf.

§. 126.

Schwerpunkt einer Korblinie. Es sei AFNKB (Fig. 80) eine sogenannte Korblinie, welche aus den drei, bei F und K stetig in einander übergehenden, Kreisbögen AF, FK und KB zusammengesetzt ist. Die Mittelpunkte dieser Kreisbögen befinden sich in E, D und H; ihre Halbmesser seien $AE = EF = r'$, $DF = DK = r$, $HK = HB = r'$, und die zugehörigen Mittelpunktswinkel $AEF = \beta$, FDK

$= 2\alpha$ und $BHK = \beta$, letztere im Bogenmaaß für den Halbmesser $= 1$.

Nimmt man die Sehne AB zur Momentenachse, so ist der Abstand des Schwerpunktes des Kreisbogens AF von dieser Achse, nach Nr. 5 des §. 124, gleich

$$r' \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\beta^2}{\frac{1}{2}\beta} = 2r' \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\beta^2}{\beta};$$

und weil die Länge dieses Bogens $= r'\beta$ ist, so ergiebt sich dessen Moment, hinsichtlich der Achse AB, gleich

$$r'\beta \cdot 2r' \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\beta^2}{\beta} = 2r'^2 \cdot \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\beta^2;$$

was zugleich das Moment des Bogenstücks KB ist.

Bei dem mittleren Bogen FK ist der Abstand des Schwerpunktes vom zugehörigen Mittelpunkte D, nach Formel (3) in §. 124, gleich $r \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\alpha}$; und wenn man hiervon die Länge $CD = (r - r')\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ subtrahirt, so findet man den Abstand des Schwerpunktes von der Achse AB gleich

$$r \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\alpha} - (r - r')\,\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Dies mit der Länge des Bogens $FNK = 2r\alpha$ multiplicirt, giebt das Moment gleich

$$2r^2 \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha - 2r(r - r')\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Demnach ist die Summe der Momente aller drei Kreisbögen, oder das Moment der ganzen Korblinie, gleich

$$2r^2 \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha - 2r(r - r')\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha + 4r'^2 \cdot \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Die Länge der Korblinie ANB ist aber $= 2r\alpha + 2r'\beta$, und wenn man hiermit den vorigen Ausdruck für das Moment dieser Linie dividirt, so findet man den Abstand $CG = z$ des gesuchten Schwerpunktes G von der Sehne AB; nämlich

$$(1) \quad z = \frac{r^2 \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha - r(r - r')\,\alpha \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha + 2r'^2 \cdot \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\beta^2}{r\alpha + r'\beta}.$$

Diese Formel läßt sich noch etwas umformen, wenn man an-

statt $\mathrm{Sin}\frac{1}{2}\beta^2$ seinen Werth $\frac{1}{2}(1-\mathrm{Cos}\beta)$ setzt und dabei berücksichtigt, daß β der Complementwinkel von α, also $\mathrm{Cos}\beta = \mathrm{Sin}\alpha$ ist. Nach Substitution dieser Werthe findet man folgenden Ausdruck:

$$(2)\quad z = \frac{(r^2 - r'^2)\cdot \mathrm{Sin}\alpha - \alpha r\,(r - r')\,\mathrm{Cos}\,\alpha + r'^2}{\alpha(r - r') + \frac{1}{2}r'\pi}.$$

Setzt man die halbe Sehne $AC = BC = a$, und die Höhe des Bogens $CN = b$, so ist

$DE\cdot\mathrm{Sin}\alpha = CE$; oder $(r-r')\cdot\mathrm{Sin}\alpha = a-r'$;

$DE\cdot\mathrm{Cos}\alpha = DC$; „ $(r-r')\cdot\mathrm{Cos}\alpha = r-b$;

und wenn man diese Werthe in den vorigen Ausdruck einsetzt, so kommt:

$$z = \frac{(r + r')\,(a - r') - \alpha r\,(r - b) + r'^2}{\alpha\,(r - r') + \frac{1}{2}r'\pi}$$

$$(3)\quad = \frac{a(r + r') - rr' - \alpha r\,(r - b)}{a(r - r') + \frac{1}{2}r'\pi}.$$

§. 127.

In dem rechtwinkligen Dreieck CDE (Fig. 80) ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$DE^2 = CD^2 + CE^2;$$

oder, weil $DE = r-r'$, $CD = r-b$ und $CE = a-r'$ ist,

$$(r - r')^2 = (r - b)^2 + (a - r')^2.$$

Sofern nun die Größen a und b gegeben sind, kann man aus dieser Gleichung jeden der beiden Halbmesser r oder r' finden, wenn der andere als bekannt angesehen wird. Man erhält nämlich

$$(1)\quad r = \frac{a^2 + b^2 - 2ar'}{2(b - r')};\quad r' = \frac{2rb - (a^2 + b^2)}{2(r - a)}.$$

Gewöhnlich ist die Sehne AB, also auch ihre Hälfte a, und die Höhe $CN = b$ der Curve ANB gegeben. Man kann dann mehrere Constructions-Methoden in Anwendung bringen, um hieraus die Lage der Mittelpunkte D, E und

H, erſterer auf der verlängerten Höhe NC, die beiden letzteren aber jedesmal auf der Sehne AB, ſo wie die Halbmeſſer r und r' der Bedingung gemäß zu finden, daß die Korblinie in einem ſtetigen Zuge durch die drei beſtimmten Punkte A, N und B gehe. Indeſſen braucht man nur einen der genannten Halbmeſſer aus der in Anwendung gebrachten Conſtruction herzuleiten, weil dann der andere, in Folge der vorigen Gleichungen (1), ebenfalls bekannt iſt. Wenn z. B. die Bedingung gemacht wird, daß die Mittelpunktswinkel 2α und β, in Bogenmaaß für den Halbmeſſer 1 genommen, jeder zu 60 Graden gehören ſollen, ſo beſchreibe man über der halben Sehne AC das gleichſeitige Dreieck ACM, mache auf der Seite CM deſſelben das Stück CL gleich der Höhe CN, und ziehe aus N durch L eine gerade Linie NF, welche, bis zu der zweiten Seite AM verlängert, dieſe in F ſchneidet. Zieht man nun aus F parallel mit MC eine Gerade FD, ſo beſtimmen deren Durchſchnittspunkte mit der Sehne AB und mit der verlängerten Höhe NC die Mittelpunkte E und D, und wenn man CH = CE macht, ſo erhält man den dritten Mittelpunkt H.

Daß dieſe Conſtruction der vorhin ausgeſprochenen Bedingung ein Genüge leiſtet, läßt ſich leicht darthun; denn das Dreieck AEF iſt gleichſeitig, folglich AE = FE und $\angle AEF = 60^0$. Ferner iſt ΔFDN ähnlich mit ΔLCN, und weil letzteres Dreieck nach der Conſtruction gleichſchenklig iſt, ſo iſt es auch das erſtere, mithin DF = DN; auch iſt $\angle FDN = 30^0$, alſo der ganze Mittelpunktswinkel FDK = 60 Grade.

Die Halbmeſſer findet man nun auf folgendem Wege: Im Dreieck FLM iſt $FM = a - r'$, $LM = a - b$, $\angle FML = 60^0$; auch iſt $\angle FLM = \angle NLC = 90^0 - \frac{1}{2}LCN$, d. h. $\angle FLM = 90^0 - 15^0 = 75^0$, und daher findet ſich der

dritte Winkel $LFM = 45°$. Demzufolge hat man nach einem sehr bekannten trigonometrischen Lehrsatze die Gleichung

$$FM \cdot \mathrm{Sin}\, MFL = LM \cdot \mathrm{Sin}\, MLF;$$

oder $$(a - r')\,\mathrm{Sin}\,45° = (a - b)\,\mathrm{Sin}\,75°,$$

und daraus $$r' = \frac{a\,\mathrm{Sin}\,45 - (a-b)\,\mathrm{Sin}\,75}{\mathrm{Sin}\,45}$$

$$= \frac{b\,\mathrm{Sin}\,75 + a\,(\mathrm{Sin}\,75 - \mathrm{Sin}\,45)}{\mathrm{Sin}\,45}.$$

Nach den Vega'schen Tafeln ist aber $\mathrm{Sin}\,75° = 0{,}966$, $\mathrm{Sin}\,45° = 0{,}707$; daher entsteht

(2) $$r' = 1{,}366 \cdot b - 0{,}366 \cdot a = a - 1{,}366 \cdot (a - b).$$

Zufolge der ersten Formel dieses Paragraphen findet man nun, wenn darin der gefundene Werth von r' substituirt wird,

$$r = \frac{a^2 + b^2 - 2a(1{,}366 \cdot b - 0{,}366 \cdot a)}{2(b - 1{,}366 \cdot b + 0{,}366 \cdot a)}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab + 0{,}732 \cdot a(a-b)}{0.732 \cdot (a-b)}.$$

Weil nun $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ ist, so läßt sich der Ausdruck im Zähler und Nenner mit $a - b$ dividiren, und nach gehöriger Reduction ergiebt sich zuletzt

(3) $$r = 2{,}366 \cdot a - 1{,}366 \cdot b = a + 1{,}366 \cdot (a - b).$$

Auf ähnliche Art können die Halbmesser r und r' aus den Größen a und b für jede andere Constructions-Methode gefunden werden. Substituirt man dann ihre Werthe in die Formel (3) des vorigen Paragraphen, so erhält man den Abstand des Schwerpunktes der Korblinie von ihrer Sehne.

Beispiel. Es sei $a = 20$, $b = 15$, so erhält man nach der vorigen Construction die Halbmesser

$$r = 26{,}83; \quad r' = 13{,}47;$$

und wenn diese Zahlenwerthe in die Formel (3) des vor. Paragraphen gesetzt werden und dabei berücksichtigt wird, daß $\alpha = \frac{1}{8}\pi = 0{,}5236$ ist,

so findet man für den Abstand z des Schwerpunktes von der Sehne sehr nahe $z = 10$;
so daß also, in diesem Falle, der Schwerpunkt der Korblinie ungefähr auf $\frac{1}{3}$ ihrer Höhe von der Sehne entfernt liegt.

II. Bestimmung der Schwerpunkte ebener Flächen.

§. 128.

Schwerpunkt einer ebenen Dreiecksfläche. Über die Ebene des Dreiecks **ABC** (Fig. 81) sei eine schwere Materie gleichförmig vertheilt, so daß gleiche Flächentheile gleiche Gewichte haben, dann erhält man eine Schwerlinie dieses Dreiecks, wenn man eine seiner Seiten, z. B. **BC**, im Punkte **D** halbirt, und aus **D** nach der gegenüberliegenden Winkelspitze **A** die gerade Verbindungslinie **DA** zieht. Denn eine solche Verbindungslinie halbirt alle innerhalb des Dreiecks mit der halbirten Seite parallel gezogenen Linien, und wenn man sich die letzteren in unendlich kleinen Abständen von einander denkt, so kann man die dazwischen liegenden Elementarstreifen, wie **pq**, als gleichförmig schwere gerade Linien betrachten, deren Schwerpunkte in ihren Mitten, folglich alle in der geraden Verbindungslinie **AD** liegen. Daraus folgt dann, daß letztere in Bezug auf die Dreiecksfläche ein Durchmesser der Schwere sein muß. — Construirt man in derselben Art eine zweite Schwerlinie **BE**, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt **G** der gesuchte Schwerpunkt des Dreiecks.

Man verbinde die beiden Halbirungspunkte **D** und **E** durch eine gerade Linie **DE**, so ist diese mit der dritten Seite **AB** parallel und gleich der Hälfte von ihr; auch sind die Dreiecke **ABG** und **DEG** einander ähnlich, und daher verhält sich:

$$BG : EG = AB : DE = 2 : 1;$$

$$BG + EG : EG = 2 + 1 : 1;$$

oder $$BE : EG = 3 : 1;$$

folglich ist $$EG = \tfrac{1}{3}BE.$$

Theilt man also eine Schwerlinie **BE** des Dreiecks in drei gleiche Theile, so ist der Theilpunkt **G**, welcher der halbirten Seite **AC** zunächst liegt, der gesuchte Schwerpunkt.

Ist **BB'** die auf **AC** normale Höhe des Dreiecks und **GG'** eine Parallele mit der Seite **AC**, so verhält sich

$$BB' : B'G' = BE : EG;$$

folglich ist auch $$B'G' = \tfrac{1}{3}BB',$$

d. h. die normale Entfernung des Schwerpunktes von einer der drei Seiten des Dreiecks ist gleich dem dritten Theil der auf dieser Seite senkrechten Höhe.

Auch kann man sagen: der Schwerpunkt des Dreiecks liegt auf zwei Drittheil der Höhe von der Spitze entfernt. (Vergl. §. 71. Zus. zu 3.)

§. 129.

Abstand des Schwerpunktes einer Dreiecksfläche von irgend einer im Raume gegebenen Ebene. Es stelle **ABC** (Fig. 82) das Dreieck vor, welches in Bezug auf die Ebene **XY** eine beliebige Lage haben mag. Die Perpendikel **AA'**, **BB'**, **CC'** von dessen Eckpunkten auf die genannte Ebene sollen nach der Reihe mit **a**, **b**, **c**, und der Perpendikel **GG'** vom Schwerpunkte **G** auf dieselbe Ebene mit **z** bezeichnet werden.

Um letzteren zu bestimmen, kann man in Bezug auf das Paralleltrapez **AA'D'D** die bekannte Gleichung anwenden:

$$GG' \cdot AD = AA' \cdot DG + DD' \cdot AG.$$

Darin ist $AA' = a$, $DG + \tfrac{1}{3}AD$, $AG = \tfrac{2}{3}AD$; also

$$GG' = z = \frac{a + 2 \cdot DD'}{3}.$$

In dem Paralleltrapeze $BB'C'C$ ist aber, weil D die Mitte von BC ist, $2 \cdot DD' = BB' + CC' = b + c$; folglich erhält man den gesuchten Abstand

$$z = \frac{a + b + c}{3};$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes eines jeden Dreieckes von irgend einer beliebigen Ebene im Raum ist gleich dem arithmetischen Mittel der Abstände seiner drei Winkelpunkte von derselben Ebene.

Zusatz. Ganz auf demselben Wege läßt sich auch zeigen, daß der Abstand des fraglichen Schwerpunktes von einer in der Ebene des Dreiecks beliebig angenommenen geraden Linie ebenfalls gleich dem dritten Theile von der Summe der Abstände seiner drei Winkelpunkte von derselben Linie ist. — Liegt ein Winkelpunkt des Dreiecks in dieser Linie selbst, so ist sein Abstand gleich Null, und man erhält für den Abstand des Schwerpunktes den dritten Theil von der Summe der Abstände der beiden andern Winkelpunkte.

§. 130.

Schwerpunkt eines Trapezes mit zwei parallelen Seiten. Ist $ABCD$ (Fig. 83) das gegebene Paralleltrapez, so ist die Linie EF, welche die Mitten E und F der beiden mit einander parallelen Seiten AD und BC verbindet, ein Durchmesser der Schwere, weil sie alle innerhalb des Trapezes mit jenen Seiten parallel gezogenen Linien halbirt. Um noch eine zweite Schwerlinie und durch deren Durchschnitt mit EF den Schwerpunkt zu finden, ziehe man eine Diagonale AC, und bestimme von den dadurch gebildeten Dreiecken ABC und ACD, nach §. 128, die

Schwerpunkte H und K. Die Verbindungslinie HK dieſer beiden Punkte wird dann eine zweite Schwerlinie, und ihr Durchſchnittspunkt G mit der erſten EF der geſuchte Schwerpunkt ſein.

Will man die Lage des Schwerpunktes durch Rechnung beſtimmen, ſo ſeien AD = a, BC = b die Längen der parallelen Seiten; AL = h ihr normaler Abſtand von einander, oder die Höhe des Trapezes, und GG′ = z ſei der fragliche Abſtand des Schwerpunktes G von der Seite AD. Aus den Schwerpunkten H und K der Dreiecke ABC und ACD fälle man auf AD die Perpendikel HH′ und KK′, ſo iſt die Summe der Momente dieſer beiden Dreiecke, in Bezug auf AD als Momentenachſe, gleich

$$\Delta ABC \cdot HH' + \Delta ACD \cdot KK',$$

und wenn dies durch die Summe ihrer Flächen dividirt wird, ſo erhält man den geſuchten Abſtand

$$GG' = \frac{\Delta ABC \cdot HH' + \Delta ACD \cdot KK'}{\Delta ABC + \Delta ACD}.$$

Nun iſt aber $\Delta ABC = \frac{1}{2}bh$; $HH' = \frac{2}{3}h$;

$\Delta ACD = \frac{1}{2}ah$; $KK' = \frac{1}{3}h$;

dieſe Werthe eingeſetzt und dann reducirt, giebt GG′ oder

$$(1) \qquad z = \tfrac{1}{3}h \cdot \frac{a + 2b}{a + b}.$$

In Bezug auf die Linie AL, welche im Punkte A auf der Seite AD ſenkrecht iſt, ſei GG″ = z′ der normale Abſtand des Schwerpunktes G. Setzt man BL = c, ſo iſt CL = b + c, und man findet, nach dem vorigen Paragraphen, den Abſtand des Schwerpunktes H des Dreiecks ABC von der Linie AL, nämlich

$$HH'' = \tfrac{1}{3}(BL + CL) = \tfrac{1}{3}(b + 2c).$$

Nach demſelben Geſetze iſt der Abſtand des Schwerpunktes K des Dreiecks ACD von der Linie AL

$$KK'' = \tfrac{1}{3}(CL + AD) = \tfrac{1}{3}(a + b + c).$$

Folglich ist die Summe der Momente beider Dreiecke, in Bezug auf AL als Momentenachse, gleich

$$\tfrac{1}{2}bh\cdot\frac{b+2c}{3}+\tfrac{1}{2}ah\cdot\frac{a+b+c}{3}=\tfrac{1}{6}h(a^2+b^2+ab+ac+2bc)$$

und dies durch die Summe der beiden Dreiecksflächen gleich

$$\tfrac{1}{2}ah+\tfrac{1}{2}bh=\tfrac{1}{2}h(a+b)$$

dividirt, giebt den gesuchten Abstand des Schwerpunktes G; nämlich

$$(2)\qquad z'=\frac{a^2+b^2+ab+ac+2bc}{3(a+b)}.$$

Zusatz. Wäre $c=0$, d. h. die Seite AB selbst auf AD perpendikulär, so würde sich ergeben:

$$z'=\frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)}.$$

§. 131.

Construction des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks. Wenn ABCD (Fig. 84) das gegebene Viereck vorstellt, von welchem der Schwerpunkt gefunden werden soll, so halbire man zwei seiner Seiten BC und AD in den Punkten F und E, ziehe von F nach A, so wie von E nach C gerade Linien, und nehme darauf $FM=\frac{1}{3}FA$; $EN=\frac{1}{3}EC$. so sind M und N die Schwerpunkte der beiden Dreiecke, worein das Viereck durch die Diagonale AC zerlegt wird, und wenn beide Punkte durch eine gerade Linie MN verbunden werden, so ist diese ein Durchmesser der Schwere des Vierecks. In derselben Art kann man noch einen zweiten Schwerdurchmesser HK construiren, wenn man die Verbindungslinien FD, EB zieht, darauf $FK=\frac{1}{3}FD$, $EH=\frac{1}{3}EB$ nimmt, und die Punkte K und H durch eine gerade Linie verbindet. Der Durchschnittspunkt G beider Schwerdurchmesser MN, HK ist alsdann der gesuchte Schwerpunkt des Trapezes.

Der Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks läßt sich auch durch folgende einfachere Construction finden. Man ziehe die beiden Diagonalen AC und BD (Fig. 85), welche sich beide in F schneiden; die erstere halbire man in E, auf der andern trage man das Stück BF von D nach L, und verbinde den so bestimmten Punkt L mit der Mitte E der Diagonale AC durch die Gerade EL. Indem man nun die zuletzt genannte Verbindungslinie in drei gleiche Theile theilt, so ist der Theilpunkt G, welcher zunächst an der halbirten Diagonallinie liegt, der gesuchte Schwerpunkt.

Um die Richtigkeit dieser Construction darzuthun, verbinde man den Punkt E mit den Winkelpunkten B und D durch die Geraden EB, ED und ziehe durch G parallel mit BD die Linie HK, welche sich mit den beiden vorigen in H und K schneidet. Alsdann ist, weil nach der Construction $EG = \frac{1}{3}EL$ ist, auch $EH = \frac{1}{3}EB$ und $EK = \frac{1}{3}ED$. Demnach sind H und K die Schwerpunkte der Dreiecke ABC, ADC, und HK ist eine Schwerlinie des gegebenen Vierecks. Es verhält sich nun, wie leicht einzusehen,

$$GH : GK = LB : LD = DF : BF.$$

Denkt man sich aus B und D auf AC die Perpendikel BB′ und DD′ gefällt, so verhält sich ferner

$$\Delta ACB : \Delta ACD = BB' : DD'$$

oder $$= BF : DF.$$

Diese Proportion mit der vorhergehenden verglichen, giebt die folgende:

$$GH : GK = \Delta ACD : \Delta ACB;$$

woraus nun (mit Hinsicht auf §. 57) hervorgeht, daß G der Schwerpunkt des Vierecks ABCD ist.

Zusatz. Wäre das gegebene Viereck ein Parallelogramm, so würden sich die Diagonalen desselben gegenseitig in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte F halbiren, d. h. die Punkte E und L würden mit F zusammenfallen;

folglich auch der Schwerpunkt G. Demnach liegt der Schwerpunkt eines jeden Parallelogrammes in dem Durchschnittspunkte seiner beiden Diagonalen.

§. 132.

Schwerpunkts-Bestimmung der Polygone. Die Construction des Schwerpunktes gegebener Polygone kommt immer darauf hinaus, daß man zwei verschiedene Schwerdurchmesser bestimmt, deren gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt der gesuchte Schwerpunkt ist. Ist das Polygon ein Fünfeck, so kann es durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein Trapez zerlegt werden, und wenn man die Schwerpunkte dieser beiden Figuren nach dem Vorhergehenden construirt, und durch eine gerade Linie mit einander verbindet, so erhält man eine Schwerlinie des Fünfecks. Durch eine abermalige Zerlegung mittelst einer andern Diagonale kann man in derselben Art eine zweite Schwerlinie construiren, und dann liegt der gesuchte Schwerpunkt in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte beider Schwerlinien. Eben so findet man den Schwerpunkt eines Polygones von sechs Seiten, wenn dasselbe durch Diagonalen zweimal in zwei Vierecke zerlegt wird u. s. w.

Man wird leicht einsehen, daß diese Methode bei vielseitigen Figuren sehr umständlich wird, und deshalb bedient man sich, um den Schwerpunkt einer solchen Figur zu bestimmen, lieber der Rechnung, wodurch man leichter zum Ziele gelangt. Zu dem Ende kann man dieselbe in lauter Dreiecke zerlegen, von jedem einzelnen Dreieck den Inhalt berechnen und die Abstände seines Schwerpunktes von zwei geraden, in der Ebene der Figur beliebig gezogenen Linien messen. Dividirt man dann die in Bezug auf jede dieser Linien gebildete Summe der Momente aller Dreiecke durch die Summe

ihrer Flächen, so findet man die Abstände des Schwerpunktes der gegebenen Figur von denselben Linien.

§. 133.

Schwerpunkt von dem Ausschnitte eines regulären Polygons. Es sei **OABC...G** (Fig. 86) der Ausschnitt eines regulären Polygons; **O** der Mittelpunkt und **OA = OD = OG** der Halbmesser des darum beschriebenen Kreises.

Man verbinde die Winkelpunkte **B, C, D, E,** ꝛc. mit dem Mittelpunkte **O** durch gerade Linien, so wird dadurch der Polygon-Ausschnitt in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt, von denen jedes eine der gleichen Polygonseiten zur Grundlinie hat, und deren Spitzen sich sämmtlich im Mittelpunkte **O** vereinigen. Ist **BOC** irgend eins von diesen Dreiecken, und **ON** der von der Spitze auf seine Grundlinie gefällte Perpendikel, so ist der Inhalt desselben gleich

$$\tfrac{1}{2}BC \cdot ON;$$

und wenn **Q** seinen Schwerpunkt, **QR** einen Perpendikel aus demselben auf eine durch den Mittelpunkt **O** mit der Sehne **AG** parallel gezogene Linie **XY** vorstellt, so drückt

$$\tfrac{1}{2}BC \cdot ON \cdot QR$$

das Moment dieses Dreiecks in Bezug auf **XY** als Momentenachse aus.

Man fälle aus den Winkelpunkten **B** und **C** die Perpendikel **BB'** und **CC'** auf die Sehne **AG**, und ziehe **BC''** parallel mit letzterer, so ist es sehr leicht, die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke **CBC''** und **OQR** nachzuweisen. Aus dieser Aehnlichkeit folgt dann:

$$BC : BC'' = OQ : QR,$$

oder

$$BC : B'C' = \tfrac{2}{3}ON : QR;$$

folglich

$$QR = \frac{2}{3} \cdot \frac{ON \cdot B'C'}{BC}.$$

Substituirt man dieſen Werth an der Stelle von QR in den vorhin gefundenen Ausdruck für das Moment des Dreiecks BOC, ſo nimmt derſelbe folgende Geſtalt an:

$$\tfrac{1}{3}ON^2 \cdot B'C'.$$

Da die Perpendikel vom Mittelpunkte O auf die Polygonſeiten alle einander gleich ſind, ſo kann man ihre gemeinſchaftliche Länge mit a bezeichnen, und wenn dies an die Stelle von ON geſetzt wird, ſo verwandelt ſich der vorige Ausdruck in folgenden

$$\tfrac{1}{3}a^2 \cdot B'C'.$$

Demnach erhält man das Moment des Dreiecks BOC, in Bezug auf die Achſe XY, wenn man ein Drittheil von dem Quadrate des Perpendikels, aus dem Mittelpunkte O auf die Polygonſeite BC, mit der Projection dieſer Polygonſeite auf die Sehne AG multiplicirt. Offenbar gilt dies Geſetz ganz ebenſo für die Momente aller übrigen Dreiecke, und daher erhält man für die Summe ſämmtlicher Momente

$$\tfrac{1}{3}a^2(AB' + B'C' + C'D' + \cdots + F'G) = \tfrac{1}{3}a^2 s;$$

wofern man die in der Klammer ſtehende Summe der Projectionen, d. h. die Länge der Sehne AG, mit s bezeichnet.

Der Flächeninhalt des Polygonausſchnittes OABC..GO iſt nun bekanntlich gleich dem Inhalte eines Dreiecks, welches den Umfang ABC...G = u zur Grundlinie und den Abſtand a der Polygonſeiten vom Mittelpunkte zur Höhe hat. Dieſer Inhalt kann daher durch $\frac{1}{2}au$ ausgedrückt werden.

Der geſuchte Schwerpunkt P des gegebenen Ausſchnittes muß nun, wie man leicht einſehen wird, auf der geraden Linie OD liegen, welche den Mittelpunktswinkel AOG halbirt. Setzt man ſeinen Abſtand OP von der Achſe XY gleich z, und dividirt das vorhin gefundene Moment $\frac{1}{3}a^2 s$ durch den Flächeninhalt $\frac{1}{2}au$, ſo findet man endlich:

$$z = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{as}{u}.$$

Eine Vergleichung dieses Resultates mit dem in §. 123 gefundenen giebt zu erkennen, daß der Abstand des Schwerpunktes der Polygonfläche **OABC...GO** vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises, zwei Drittheil von dem Abstande des Schwerpunktes seines begrenzenden Umfanges **ABC..G** beträgt.

§. 134.

Schwerpunkt eines Kreisausschnittes. Das im vorigen Paragraphen in Anwendung gebrachte Verfahren, um von dem Ausschnitte eines regulären Polygons den Schwerpunkt zu bestimmen, erleidet offenbar keine Änderung, wenn man die Anzahl der Polygonseiten im begrenzenden Umfange beliebig vergrößert und ihre resp. Längen demgemäß verkleinert. Das gefundene Gesetz für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte wird daher noch dasselbe bleiben, wenn die Vergrößerung der Anzahl und die gleichzeitige Verkleinerung der Längen der Polygonseiten ohne Grenzen fortgesetzt wird; folglich wird es auch für einen Kreisausschnitt gelten müssen, in so fern man sich dessen begrenzenden Bogen als aus unendlich vielen geradlinigen Elementen von unendlich kleinen Längen bestehend denkt.

Es sei demnach **ADBC** (Fig. 87) ein Kreisausschnitt, dessen Centriwinkel **ACB** durch die Linie **CD** halbirt wird, so ist diese ein Durchmesser der Schwere, und wenn man die Entfernung **CG** des Schwerpunktes **G** vom Mittelpunkte **C** mit **z**, den Bogen **ADB** mit **b**, die Sehne **AB** mit **s** und den Halbmesser **CA = CB** mit **r** bezeichnet, so erhält man

$$(1) \qquad z = \tfrac{2}{3}\frac{rs}{b}.$$

Daraus läßt sich die Proportion ansetzen:

$$(2) \qquad b : s = \tfrac{2}{3}r : z;$$

d. h. der Bogen verhält sich zur Sehne, wie zwei

Drittheile des Halbmessers zur Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte.

Bezeichnet man den halben Mittelpunktswinkel ACD = BCD mit α, in Bogenmaaß für den Halbmesser 1, so ist $ADB = b = 2r\alpha$; $AB = s = 2r\sin\alpha$; und wenn diese Werthe in den Ausdruck (1) an die Stelle von b und s gesetzt werden, so kommt

$$z = \tfrac{2}{3}r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{3}$$

Dieses Resultat hätte man auch noch auf folgendem Wege finden können: Man denke sich den begrenzenden Bogen ADB in unendlich kleine Theilchen getheilt, von denen vw eins vorstellen mag, und ziehe von den Theilpunkten nach dem Mittelpunkte C die Halbmesser, wie vC und wC, so wird dadurch der Kreisausschnitt in lauter unendlich kleine Dreiecke (vCw) zerlegt, deren Grundlinien die als geradlinig zu betrachtenden Bogenelemente (vw), und deren resp. Höhen dem Halbmesser r gleich sind. Von jedem dieser Dreiecke liegt der Schwerpunkt (z. B. m) auf zwei Drittheile seiner Höhe von der Spitze entfernt, und daher liegen die Schwerpunkte von allen diesen unendlich schmalen Dreiecken in dem Kreisbogen A′D′B′, welcher mit einem Halbmesser $= \frac{2}{3}r$ beschrieben ist. Denkt man sich also die gesammte Schwere des Ausschnittes über diesen Bogen gleichmäßig vertheilt, so muß sein Schwerpunkt mit dem des Ausschnittes derselbe sein, und wenn man dessen Abstand GC vom Mittelpunkte, wie vorhin, mit z bezeichnet, so erhält man nach §. 124 (3), wenn daselbst $\frac{2}{3}r$ anstatt r gesetzt wird,

$$z = \tfrac{2}{3}r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Ist GE ein Perpendikel vom Schwerpunkt auf den Halbmesser AC, und setzt man $CE = x$, $EG = y$, so findet man leicht

$$(4) \qquad x = z \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = \tfrac{2}{3} r \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,2\alpha}{2\alpha};$$

$$(5) \qquad y = z \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha = \tfrac{2}{3} r \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{\alpha}.$$

Beispiele. 1) Es sei der Ausschnitt ein Sextant, also $\alpha = \frac{1}{3}\pi$; $\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{1}{2}$; $\mathrm{Sin}\,2\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so kommt

$$z = \frac{2r}{\pi}; \quad x = \frac{r\sqrt{3}}{\pi}; \quad y = \frac{r}{\pi}.$$

2) Wenn der Ausschnitt ein Quadrant ist, so hat man: $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; $\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\mathrm{Sin}\,2\alpha = 1$, daher

$$z = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}; \quad x = \frac{4r}{3\pi}; \quad y = \frac{4r}{3\pi}.$$

3) Ist der Ausschnitt ein Halbkreis, so hat man: $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\mathrm{Sin}\,\alpha = 1$; $\mathrm{Sin}\,2\alpha = 0$; folglich

$$z = \frac{4r}{3\pi}; \quad x = 0; \quad y = \frac{4r}{3\pi}.$$

§. 135.

Schwerpunkt eines Kreisabschnittes. Es sei **ABD** (Fig. 88) ein beliebiger Kreisabschnitt; **C** der Mittelpunkt und r der Halbmesser des zugehörigen Kreises. In **G** befinde sich der gesuchte Schwerpunkt des Abschnittes, und sein Abstand **GC** vom Mittelpunkte **C** werde mit z bezeichnet.

Betrachtet man die Schwere des Ausschnittes **ADBC** als Mittelkraft der beiden Schwerkräfte, welche über die Fläche des Abschnittes **ABD** und über die des Dreieckes **ABC** gleichförmig vertheilt sind, so ist das Moment des Ausschnittes allemal gleich der Summe der Momente des Abschnittes und des ergänzenden Dreiecks; also auch das Moment des Abschnittes gleich der Differenz zwischen den Momenten des Abschnittes und des Dreiecks. Bezeichnet nun α den halben Mittelpunktswinkel **ACD** = **BCD**, in Bogenmaaß für den Halbmesser = 1, so ist das Moment

des Ausschnittes ADBC in Bezug auf C als Momentenpunkt, zufolge der Formel (3) des vorigen §.

$$r^2\alpha \cdot \tfrac{2}{3}r \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha} = \tfrac{2}{3}r^3 \operatorname{Sin}\alpha.$$

Der Inhalt des Dreiecks ABC ist gleich $r^2 \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha$, und der Abstand seines Schwerpunktes von der Spitze C (nach §. 127) gleich $\frac{2}{3}r\operatorname{Cos}\alpha$, daher das Moment desselben

$$r^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha \cdot \tfrac{2}{3}r\operatorname{Cos}\alpha = \tfrac{2}{3}r^3 \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha^2.$$

Beide Momente von einander subtrahirt, geben das Moment des Abschnittes ABD in Bezug auf den Mittelpunkt C als Momentenpunkt; nämlich

$$\tfrac{2}{3}r^3 \operatorname{Sin}\alpha - \tfrac{2}{3}r^3 \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha^2 = \tfrac{2}{3}r^3 \cdot \operatorname{Sin}\alpha^3.$$

Die Fläche des Abschnittes kann bekanntlich ausgedrückt werden durch:

$$r^2\alpha - r^2 \operatorname{Sin}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha = r^2(\alpha - \tfrac{1}{2} \cdot \operatorname{Sin} 2\alpha),$$

und wenn man mit dieser Fläche in den vorhin gefundenen Werth des Momentes dividirt, so erhält man

$$(1) \qquad z = \frac{\frac{2}{3}r^3 \operatorname{Sin}\alpha^3}{r^2(\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\alpha)} = \tfrac{4}{3}r \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha^3}{2\alpha - \operatorname{Sin} 2\alpha}.$$

Setzt man die Sehne AB = s und den Flächeninhalt des Abschnittes ABD = A, so ist

$$s = 2r \cdot \operatorname{Sin}\alpha; \qquad A = r^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\alpha);$$

und wenn dies in die vorige Gleichung substituirt wird, so verwandelt sie sich in folgende:

$$(2) \qquad z = \frac{s^3}{12A}.$$

d. h. Man findet den Schwerpunktsabstand eines beliebigen Kreisabschnittes vom zugehörigen Mittelpunkte, wenn man den Kubus der Sehne durch den zwölffachen Inhalt des Abschnittes dividirt.

§. 136.

Schwerpunkt einer Fläche, die in einem Kreise zwischen zwei parallelen Sehnen enthalten ist. Es sei AA'B'B (Fig. 89) die genannte Fläche, deren Inhalt = A sein mag; AA' = s und BB' = s' seien die begrenzenden parallelen Sehnen. In G befinde sich der gesuchte Schwerpunkt und sein Abstand OG vom Mittelpunkte O des zugehörigen Kreises soll, wie früher, mit z bezeichnet werden. Denkt man sich die gegebene Fläche zum Kreisabschnitt AEA' ergänzt, so ist das Moment derselben gleich der Differenz der Momente der Kreisabschnitte AEA' = F und BEB' = F'; also nach Formel (2) des vorhergehenden Paragraphen

$$z \cdot ABDC = \frac{s^3}{12F} \cdot F - \frac{s'^3}{12F'} \cdot F';$$

oder

$$z \cdot A = \tfrac{1}{12}(s^3 - s'^3),$$

und hieraus

$$z = \frac{s^3 - s'^3}{12A}.$$

d. h. Man findet den Abstand des Schwerpunktes der, zwischen zwei parallelen Sehnen enthaltenen, Fläche vom Mittelpunkte des zugehörigen Kreises, **wenn man die Differenz der Kubi der begrenzenden Sehnen durch den zwölffachen Inhalt der Fläche dividirt.**

§. 137.

Schwerpunkt eines concentrischen Kreis-Ringstückes. Von dem Ringstück ABDC (Fig. 90) sei AM = BM = r der äußere, CM = DM = r' der innere Halbmesser und AMB = 2α (in Bogenmaaß für den Halbmesser = 1) der zugehörige Mittelpunktswinkel.

Da sich das Ringstück ABDC als die Differenz der beiden Kreisausschnitte ABM und CDM betrachten läßt, so wird das Moment der ersteren Fläche gleich der Differenz

der Momente der beiden zuletzt genannten Flächen sein. Nach §. 134 Formel (3) erhält man daher für das Moment des Ausschnittes ABM:

$$r^2\alpha \cdot \tfrac{2}{3}r\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha} = \tfrac{2}{3}r^2 \cdot \operatorname{Sin}\alpha;$$

ebenso für das Moment des innern Ausschnittes CDM:

$$r'^2\alpha \cdot \tfrac{2}{3}r'\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha} = \tfrac{2}{3}r'^3 \cdot \operatorname{Sin}\alpha.$$

Beide Momente von einander subtrahirt, geben das Moment des Ringstückes, in Bezug auf den Mittelpunkt C als Momentenpunkt, gleich:

$$\tfrac{2}{3}(r^3 - r'^3) \cdot \operatorname{Sin}\alpha.$$

Die Fläche des Ringstückes ist $= (r^2 - r'^2)\alpha$, und wenn man hiermit in das vorstehende Moment dividirt, so erhält man den Abstand GM des Schwerpunktes G vom Mittelpunkte M, oder

$$(1) \qquad z = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $r - r'$, so gestaltet sich die vorige Formel wie folgt:

$$(2) \qquad z = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{r^2 + r'^2 + rr'}{r + r'} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha}.$$

Es sei GE ein Perpendikel vom Schwerpunkte G auf den Halbmesser MA, und es werde ME = x, EG = y gesetzt, so hat man $x = z \cdot \operatorname{Cos}\alpha$, $y = z \cdot \operatorname{Sin}\alpha$; d. h.

$$(3) \quad x = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2} \cdot \frac{\operatorname{Sin}2\alpha}{2\alpha} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{r^2 + r'^2 + rr'}{r + r'} \cdot \frac{\operatorname{Sin}2\alpha}{2\alpha};$$

$$(4) \quad y = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha^2}{\alpha} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{r^2 + r'^2 + rr'}{r + r'} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha^2}{\alpha}.$$

Man setze die Breite AC = BD des Ringstückes = d, denke sich in der Mitte dieser Breite den Bogen HIK beschrieben, und bezeichne dessen Halbmesser HM = KM mit R, so ist

$$r = R + \tfrac{1}{2}d; \quad r' = R - \tfrac{1}{2}d.$$

Substituirt man diese Werthe in den vorigen Formeln, so verwandeln sie sich in folgende:

$$(5) \qquad z = \frac{12R^2 + d^2}{12R} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha};$$

$$(6) \qquad x = \frac{12R^2 + d^2}{12R} \cdot \frac{\operatorname{Sin}2\alpha}{2\alpha};$$

$$(7) \qquad y = \frac{12R^2 + d^2}{12R} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha^2}{\alpha}.$$

§. 138.

Schwerpunkt einer Fläche, die zwischen einer Korblinie und der zugehörigen Sehne enthalten ist. Es sei ADB (Fig. 91) die Korblinie, welche aus den drei Mittelpunkten N, M und O mit den Halbmessern AN = NP = r', MP = MQ = r und OQ = OB = r' beschrieben ist. Der Centriwinkel PMQ des mittleren Bogenstückes PDQ werde mit 2α bezeichnet, so ist jeder der Winkel ANP = BOQ = β, die zu den äußern Bogenstücken AP, BQ gehören, gleich $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, insofern man alle Winkel in Bogenmaaß für den Halbmesser 1 versteht.

Die Fläche ABD besteht aus den beiden Kreisausschnitten ANP, BOQ und aus dem dazwischen liegenden Theile PNOQ des Kreisausschnittes PMQ. Der Abstand des Schwerpunktes der Fläche PNOQ vom Mittelpunkte M ist bekanntlich gleich

$$\frac{PMQ \cdot \frac{2}{3}r\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha} - \Delta NOM \cdot \frac{2}{3}MC}{PMQ - \Delta NOM};$$

und daher der Abstand des nämlichen Schwerpunktes von der Sehne AB gleich

$$\frac{PMQ\cdot\frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\Delta NOM\cdot\frac{2}{3}MC}{PMQ-\Delta NOM}-MC.$$

Multiplicirt man diesen Abstand mit der Fläche $PNOQ = PMQ-\Delta NOM$, so erhält man ihr Moment in Bezug auf die Sehne AB als Momentenachse, und zwar:

$$PMQ\cdot\tfrac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\Delta NOM\cdot\tfrac{2}{3}MC-PNOQ\cdot MC.$$

Es ist aber $PMQ = r^2\alpha$;

$\Delta NOM = (r-r')^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

folglich Fläche $PNOQ = r^2\alpha-(r-r')^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Ferner ist $MC = (r-r')\cos\alpha$,

und wenn man diese Werthe in dem vorigen Ausdruck substituirt, so erhält man das Moment der Fläche $PNOQ$ wie folgt:

$$\tfrac{2}{3}r^3\sin\alpha-\tfrac{2}{3}(r-r')^3\sin\alpha\cdot\cos\alpha^2$$
$$-[r^2\alpha-(r-r')^2\sin\alpha\cos\alpha](r-r')\cos\alpha$$
$$=\tfrac{2}{3}r^3\sin\alpha+\tfrac{1}{3}(r-r')^3\sin\alpha\cos\alpha^2-r^2(r-r')\alpha\cos\alpha.$$

Das auf die Sehne AB bezogene Moment eines jeden der beiden Kreisausschnitte ANP, BOQ wird ausgedrückt durch:

$$r'^2\frac{\beta}{2}\cdot\tfrac{2}{3}r'\frac{\sin\frac{1}{2}\beta^2}{\frac{1}{2}\beta}=\tfrac{2}{3}r'^3\sin\tfrac{1}{2}\beta^2;$$

also ist die Summe der Momente von beiden Ausschnitten gleich $\tfrac{2}{3}r'^3\cdot2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2=\tfrac{2}{3}r'^3(1-\cos\beta)$.

Addirt man dies zu dem vorigen Moment, und berücksichtigt dabei, daß $\cos\beta=\sin\alpha$ ist, so erhält man für das Moment der ganzen Fläche ABD, in Bezug auf die Sehne AB, den folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{2}{3}r'^3+\tfrac{2}{3}(r^3-r'^3)\sin\alpha+\tfrac{1}{3}(r-r')^3\sin\alpha\cos\alpha^2-r^2(r-r')\alpha\cos\alpha$$
$$=\tfrac{2}{3}r'^3+\tfrac{1}{3}(r-r')\sin\alpha[2r^2+2r'^2+2rr'+(r-r')^2\cos\alpha^2]$$
$$-r^2(r-r')\alpha\cos\alpha.$$

Setzt man anstatt $\mathrm{Cos}\,\alpha^2$ seinen Werth $1-\mathrm{Sin}\,\alpha^2$ und reducirt dann gehörig, so kommt:

(I) $\frac{2}{3}r'^3+(r-r')\mathrm{Sin}\,\alpha[r^2+r'^2-\frac{1}{3}(r-r')^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2]-r^2(r-r')\alpha\mathrm{Cos}\,\alpha.$

Die Linie **MD** ist ein Durchmesser der Schwere, und wenn **G** den gesuchten Schwerpunkt vorstellt, so sei dessen Abstand **GC** von der Sehne gleich z. Um letzteren zu finden, muß man das vorhin dargestellte Moment der Fläche **ABD** durch den Inhalt derselben dividiren. Dieser Inhalt ergiebt sich aber in folgender Gestalt:

$$r^2\alpha-(r-r')^2\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha+2\cdot\tfrac{1}{2}r'^2\beta;$$

oder, weil $\beta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ ist, so kommt

$$\tfrac{1}{2}r'^2\pi+(r^2-r'^2)\alpha-(r-r')^2\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Wird nun jenes Moment hierdurch dividirt, so findet man endlich:

$$\text{(II)}\quad z=\frac{\frac{2}{3}r'^3+(r-r')\mathrm{Sin}\,\alpha[r^2+r'^2-\frac{1}{3}(r-r')^2\mathrm{Sin}\,\alpha^2]-r^2(r-r')\alpha\mathrm{Cos}\,\alpha}{\frac{1}{2}r'^2\pi+(r^2-r'^2)\alpha-(r-r')^2\cdot\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Cos}\,\alpha}$$

Ist die halbe Sehne $AC=BC=a$ und die Bogenhöhe $CD=b$ gegeben, so ist

$(r-r')\mathrm{Sin}\,\alpha=CN=a-r'$; $(r-r')\mathrm{Cos}\,\alpha=MC=r-b$;

und wenn diese Werthe substituirt werden, so kommt

$$\text{(III)}\quad z=\frac{\frac{2}{3}r'^3+(a-r')[r^2+r'^2-\frac{1}{3}(a-r')^2]-\alpha r^2(r-b)}{\frac{1}{2}r'^2\pi+(r^2-r'^2)\alpha-(a-r')(r-b)}.$$

Anm. und Beisp. Wegen der Bestimmung der Halbmesser r und r' aus den gegebenen Größen a, b, wenn eine bestimmte Construction der Korblinie in Ausführung gebracht wird, gilt das, was in §. 126 in dieser Beziehung gesagt ist. Für die besondere, dort angegebene Construction, und für die als Beispiel angenommenen Zahlenwerthe $a=20$, $b=15$, ergaben sich die Halbmesser $r=26{,}83$, $r'=13{,}17$ und der Bogen $\alpha=0{,}5236$. Berechnet man hiernach den obigen Ausdruck von z, so findet man sehr nahe $z=6{,}6$.

§. 139.

Schwerpunkt einer ringförmigen Fläche, die zwischen zwei concentrischen Korblinien enthalten

ist. Es stelle **ADBFHE** (Fig. 91) die Fläche vor, welche von den beiden, aus den drei Mittelpunkten **N**, **M** und **O** concentrisch beschriebenen, Korblinien **ADB** und **EHF** begrenzt wird. Die Breite **PR = QS** der genannten Fläche werde mit **d** bezeichnet. Denkt man sich durch die Mitte dieser Breite eine dritte Korblinie beschrieben, die mit den beiden begrenzenden concentrisch ist, so sollen **R** und **R'** die Halbmesser der letzteren bezeichnen; und zwar sei **R** der Radius des aus **M**, und **R'** der für die aus **N** und **O** beschriebenen Kreisbögen, welche zusammen die mittlere Korblinie bilden. Die übrige Bezeichnung bleibe eben so, wie im vorigen Paragraphen. Der äußere Halbmesser des mittleren Ringstückes **RPQS** ist hiernach $\mathbf{MR = MS = R + \frac{1}{2}d}$; der innere Halbmesser aber $\mathbf{MP = MQ = R - \frac{1}{2}d}$; folglich der Flächeninhalt dieses Ringstückes:

$$\mathbf{RPQS} = (\mathbf{R} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d})^2 \cdot \alpha - (\mathbf{R} - \tfrac{1}{2}\mathbf{d})^2 \cdot \alpha = 2\mathbf{R}\mathbf{d}\alpha.$$

Nach §. 137 (5) ergiebt sich die Entfernung des Schwerpunktes der genannten Ringfläche vom zugehörigen Mittelpunkte **M** gleich

$$\frac{12\mathbf{R}^2 + \mathbf{d}^2}{12\mathbf{R}} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha};$$

folglich ist der Abstand dieses Schwerpunktes von der Sehne **AB** gleich

$$\frac{12\mathbf{R}^2 + \mathbf{d}^2}{12\mathbf{R}} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha} - \mathbf{MC},$$

und weil $\mathbf{MC} = \mathbf{MN} \cdot \operatorname{Cos}\alpha = (\mathbf{R} - \mathbf{R}')\operatorname{Cos}\alpha$ ist, so hat man für den Abstand des Schwerpunktes von der Sehne den Ausdruck:

$$\frac{12\mathbf{R}^2 + \mathbf{d}^2}{12\mathbf{R}} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha} - (\mathbf{R} - \mathbf{R}')\operatorname{Cos}\alpha.$$

Multiplicirt man dies mit dem Inhalte der Ringfläche $\mathbf{RPQS} = 2\mathbf{R}\mathbf{d}\alpha$, so ergiebt sich für das Moment dieser

Fläche, in Bezug auf die Sehne als Momentenachse, der Ausdruck:

(1) $\frac{1}{6}d(12R^2 + d^2)\operatorname{Sin}\alpha - 2dR(R - R')\alpha\operatorname{Cos}\alpha.$

Von den beiden Ringstücken **EAPR** und **FBQS** ist der Flächeninhalt eines jeden gleich

$$\tfrac{1}{2}(R' + \tfrac{1}{2}d)^2\beta - \tfrac{1}{2}(R' - \tfrac{1}{2}d)^2\beta = R'd\beta.$$

Den Abstand des Schwerpunktes einer solchen Fläche von der Sehne findet man, nach §. 137 (7) durch die Formel

$$\frac{12R'^2 + d^2}{12R'} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta^2}{\frac{1}{2}\beta};$$

daher ist das Moment von einer der genannten Ringflächen, in Bezug auf die Sehne als Achse,

$$R'd\beta \cdot \frac{12R'^2 + d^2}{12R'} \cdot \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta^2}{\beta} = \tfrac{1}{12}d(12R'^2 + d^2) \cdot 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\beta^2$$

und also die Summe der Momente beider Ringflächen gleich

$$\tfrac{1}{6}d(12R'^2 + d^2) \cdot 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Nun ist aber bekanntlich $2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta^2 = 1 - \operatorname{Cos}\beta$, und wenn man berücksichtigt, daß $\operatorname{Cos}\beta = \operatorname{Sin}\alpha$ ist, so entsteht durch Substitution dieser Werthe:

(2) $\frac{1}{6}d(12R'^2 + d^2)(1 - \operatorname{Sin}\alpha).$

Dies Moment zu dem vorhin für die Ringfläche **RPQS** gefundenen (1) addirt, giebt das Moment der gesammten ringförmigen Fläche **ADBFHE**, in Bezug auf die Sehne **AB** als Momentenachse, wie nachstehend:

$$\tfrac{1}{6}d(12R^2 + d^2)\operatorname{Sin}\alpha - 2dR(R - R')\alpha\operatorname{Cos}\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{6}d(12R'^2 + d^2)(1 - \operatorname{Sin}\alpha);$$

welcher Ausdruck sich, durch gehörige Reduction, in folgenden umformen läßt:

$$2d \cdot [\tfrac{1}{12}(12R'^2 + d^2) + (R^2 - R'^2)\operatorname{Sin}\alpha - R(R - R')\alpha\operatorname{Cos}\alpha].$$

Der Inhalt der zwischen den beiden Korblinien enthaltenen Fläche ist, dem Vorhergehenden gemäß, gleich

$$2dR\alpha + 2dR'\beta = 2d[\tfrac{1}{2}R'\pi + (R - R')\alpha];$$

wo für β der entsprechende Werth $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ gesetzt ist. Dividirt man nun das vorige Moment durch diesen Flächeninhalt, so findet man den Abstand GC des, auf der Geraden CH liegenden, Schwerpunktes G von der Sehne AB folgendergestalt:

$$\text{(I)}\quad z = \frac{\frac{1}{12}(12R'^2+d^2)+(R^2-R'^2)\operatorname{Sin}\alpha-R(R-R')\alpha\operatorname{Cos}\alpha}{\frac{1}{2}R'\pi+(R-R')\alpha}.$$

Will man anstatt der mittleren Halbmesser R, R' die innern Halbmesser r und r' in Rechnung bringen, so ist

$R = r + \frac{1}{2}d$; und also $R + R' = r + r' + d$;

$R' = r' + \frac{1}{2}d$; „ „ $R - R' = r - r'$.

Substituirt man diese Werthe in die vorige Formel, so entsteht

$$\text{(II)}\quad z = \frac{(r'+\frac{1}{2}d)^2+\frac{1}{12}d^2+(r+r'+d)(r-r')\operatorname{Sin}\alpha-(r+\frac{1}{2}d)(r-r')\alpha\operatorname{Cos}\alpha}{\frac{1}{2}\pi(r'+\frac{1}{2}d)+\alpha(r-r')}.$$

Nun ist ferner, wenn a die halbe Sehne AC = BC und b die Höhe CD bezeichnet,

$(r-r')\operatorname{Sin}\alpha = a - r'$; $(r-r')\operatorname{Cos}\alpha = r - b$;

folglich erhält man durch Substitution dieser Werthe

$$\text{(III)}\quad z = \frac{(r'+\frac{1}{2}d)^2+\frac{1}{12}d^2+(r+r'+d)(a-r')-\alpha(r+\frac{1}{2}d)(r-b)}{\frac{1}{2}\pi(r'+\frac{1}{2}d)+\alpha(r-r')}.$$

Beispiel. Nach der in §. 127 angegebenen Construction der Korblinien ist $\alpha = \frac{1}{6}\pi = 0{,}5236$; ferner wurde als Beispiel a = 20, b = 15 angenommen, wofür sich dann r = 26,83 und r' = 13,17 ergab. Substituirt man diese Zahlenwerthe in die obige Formel, und setzt noch d = 2, so erhält man z = 10,73.

§. 140.

Schwerpunkt einer Parabelfläche. Es stelle VAW (Fig. 92) eine gewöhnliche Parabel vor, für welche die durch den Scheitel A gehenden Linien AX und YY' als Coordinatenachsen dienen sollen. Fällt man von einem beliebigen Curvenpunkte C die Perpendikel CB = q, CD = p

auf diese Achsen, so entstehen die beiden Parabelflächen ACB und ACD, von welchen G und G' die Schwerpunkte vorstellen mögen. Die Coordinaten der letzteren, nämlich GH = x, GI = y und G'H' = x', G'I' = y', sollen bestimmt werden.

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen zuerst die Momente jener Flächen, in Bezug auf AY und AX als Momentenachsen, gefunden werden, für welche folgende einfache Gesetze gelten: Vergleicht man zunächst die Inhalte der in Rede befindlichen Parabelflächen, welche bezüglich mit F und F' bezeichnet werden sollen, mit dem Inhalte des Rectangels ABCD = pq, so hat man bekanntlich $F = \frac{2}{3}pq$, $F' = \frac{1}{3}pq$. Dagegen läßt sich leicht zeigen, daß die Momente von F und F' gegen die Achse AY bezüglich gleich $\frac{4}{5}$ und $\frac{1}{5}$, gegen die Achse AX aber gleich der Hälfte von dem Momente des Rectangels ABCD sind. — Um dies darzuthun, braucht nur gezeigt zu werden, daß beide Momente hinsichtlich der einen Achse in dem Verhältnisse = 4 : 1, hinsichtlich der andern Achse aber einander gleich sind, was auf folgende Art leicht geschehen kann.

Es sei vw ein unendlich kleines Bogenelement, aus dessen Endpunkten die Perpendikel vv' ww' auf AX und vv'', ww'' auf AY gefällt sind. Dadurch entstehen die beiden Trapeze vv'w'w und vv''w''w, deren Inhalte f und f' nach Nr. 41 des Anhanges sich wie 2 : 1 verhalten, so daß also $f' = \frac{1}{2}f$ ist. Man denke sich in diesen Trapezen noch die Mittellinien uu', uu'' gezogen, deren Längen bezüglich mit r und r' bezeichnet werden sollen, so kann man die Mittelpunkte derselben, sofern man die fraglichen Trapeze als unendlich schmale Streifen betrachtet, als die Schwerpunkte der letzteren annehmen, wonach sich die zugehörigen Momente folgendergestalt ergeben.

In Bezug auf die Achse AY ist nämlich das Moment

von $vv'w'w = r'f$, das von $vv''w''w = \frac{1}{2}r'\cdot f'$; und da man nach dem vorhin Angeführten $f' = \frac{1}{2}f$, also das Moment von $vv''w''w = \frac{1}{4}r'f$ hat, so ergiebt sich sofort das Moment des einen Trapezes gleich dem Vierfachen von dem des andern. Dagegen ist in Bezug auf die Achse **AX** das Moment von $vv'w'w = \frac{1}{2}rf$, das von $vv''w''w = rf' = \frac{1}{2}rf$ (wegen $f' = \frac{1}{2}f$); also sind im gegenwärtigen Falle beide Momente gleich groß. — Offenbar lassen sich nun dieselben Vergleichungen für die Momente aller zusammen gehörigen Trapeze anstellen, in welche die Parabelflächen **ACB** und **ACD** zerlegt werden können, und daher gelten sie in ganz gleicher Weise auch für die Momente dieser Flächen selbst.

Dies vorausgesetzt, ergeben sich nun folgende Gleichungen zur Bestimmung der fraglichen Schwerpunkts-Coordinaten.

1) Für die Fläche $ACB = \frac{2}{3}pq$ hat man nach einander die Momentengleichungen

$$\frac{2}{3}pq\cdot x = \frac{4}{5}\cdot pq\cdot\frac{1}{2}p; \quad \text{also } x = \frac{3}{5}p;$$
$$\frac{2}{3}pq\cdot y = \frac{1}{2}\cdot pq\cdot\frac{1}{2}q; \quad \text{„ } y = \frac{3}{8}q.$$

2) Für die Fläche **ACD**, deren Inhalt $= \frac{1}{3}pq$ ist, ergiebt sich auf gleiche Weise:

$$\frac{1}{3}pq\cdot x' = \frac{1}{5}\cdot pq\cdot\frac{1}{2}p; \quad \text{also } x' = \frac{3}{10}p;$$
$$\frac{1}{3}pq\cdot y' = \frac{1}{2}\cdot pq\cdot\frac{1}{2}q; \quad \text{„ } y' = \frac{3}{4}q.$$

Eine Vergleichung der gleichnamigen Coordinaten beider Schwerpunkte giebt $x = 2x'$ und $y = \frac{1}{2}y'$, woraus hervorgeht, daß sich die beiden Linien **GH** und **G'I'** gegenseitig halbiren. Ist also der Schwerpunkt der einen Parabelfläche gefunden, so läßt sich der der andern Fläche darnach leicht bestimmen.

§. 141.

Schwerpunkt eines paraboliſchen Trapezes. Denkt man sich aus den beliebigen Punkten **E** und **K** des Parabelzweiges **AW** (Fig. 92) die Perpendikel **EB**, **EF**

und KM, KL auf die Coordinatenachsen gefällt, so sollen die dadurch gebildeten Flächen BEKM, FEKL hier unter der Benennung der paraboliſchen Trapeze begriffen werden. Auf dieſe Flächen finden die im vor. §. bewieſenen Geſetze eine unmittelbare Anwendung; d. h. ihre Momente in Bezug auf AY' als Achſe verhalten ſich wie 4 : 1, während die auf AX bezogenen Momente einander gleich ſind. Da nun in Bezug auf jede Achſe die Summe der Momente beider Trapeze gleich dem Moment der hakenförmigen Fläche BEFKLM, alſo gleich der Differenz der Momente der beiden Rectangel ABEF und AMKL iſt, ſo hat es keine Schwierigkeit, hiernach die Schwerpunkts-Coordinaten jener paraboliſchen Trapeze zu beſtimmen.

Das eben Geſagte weiter auszuführen, möge dem eigenen Fleiße des Leſers überlaſſen bleiben. Dagegen wollen wir uns hier damit beſchäftigen, den Schwerpunkts-Abſtand des paraboliſchen Trapezes FEKL von einer der parallelen Seiten deſſelben, namentlich von der Seite EF, zu beſtimmen, was uns für die Folge nützlich ſein wird. Zu dem Ende ſei EF = p, KL = p' und LF = h gegeben, und der normale Abſtand des Schwerpunktes von der Seite EF werde mit z bezeichnet.

Der fragliche Abſtand wird erhalten, indem man das Moment des paraboliſchen Trapezes in Bezug auf EF bildet, und dies durch den Inhalt des Trapezes dividirt. Zieht man zum Bogen KOE die Sehne KE, ſo iſt das Moment des paraboliſchen Trapezes FEOKL gleich der Differenz der Momente des geradlinigen Trapezes FEKL und des paraboliſchen Segmentes EOKP.

Bekanntlich iſt der Inhalt des geradlinigen Trapezes $= \frac{1}{2}h(p+p')$, der Abſtand ſeines Schwerpunktes von EF nach §. 130 gleich $\frac{1}{3}h\frac{p+2p'}{p+p'}$; daher deſſen Moment

$$\tfrac{1}{2}h(p+p')\cdot\tfrac{1}{3}h\frac{p+2p'}{p+p'} = \tfrac{1}{6}h^2(p+2p').$$

Halbirt man ferner die Sehne KE in P, und zieht PN parallel mit AX, so ist nach Anh. 42 (3) der Inhalt des Segmentes EOKP, wenn man OP = k setzt, gleich $\frac{2}{3}hk$. Außerdem ist OP eine Schwerlinie des genannten Segmentes, weil sie alle innerhalb desselben mit der Sehne HE parallel gezogenen Geraden halbirt. Der Schwerpunkts-Abstand des Segmentes von der Linie FE ist daher = $\frac{1}{2}h$, und folglich das Moment desselben gleich

$$\tfrac{2}{3}hk\cdot\tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{6}h^2\cdot 2k.$$

Dies Moment von dem vorigen abgezogen, giebt für das Moment des paraboliſchen Trapezes den Ausdruck

$$\tfrac{1}{6}h^2(p+2p'-2k).$$

Dieſer Ausdruck iſt noch einer Vereinfachung fähig, wenn man die Mittellinie ON des paraboliſchen Trapezes, welche π heißen mag, in Rechnung bringt. Dann ſtellt nämlich PN = $\pi+k$ die Mittellinie des geradlinigen Trapezes vor, und als ſolche iſt $\pi+k = \frac{1}{2}(p+p')$, woraus $2k = p+p'-2\pi$ folgt. Subſtituirt man dies, ſo ergiebt ſich das vorige Moment

$$= \tfrac{1}{6}h^2(2\pi+p') \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Nach Anhang 42 (2) iſt aber der Inhalt des paraboliſchen Trapezes

$$= \tfrac{1}{6}h(p+4\pi+p'); \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

und wenn damit der vorhergehende Ausdruck dividirt wird, findet man den geſuchten Schwerpunktsabſtand

$$(1) \qquad z = h\cdot\frac{2\pi+p'}{p+4\pi+p'}.$$

Will man aus dieſer Formel die Größe π fortſchaffen, ſo kann dies mit Hülfe der Gleichung (2) in Nr. 38 des Anh. geſchehen. Nach derſelben iſt nämlich

$$2\sqrt{\pi} = \sqrt{p}+\sqrt{p'}; \quad \text{alſo } \pi = \tfrac{1}{4}(p+2\sqrt{pp'}+p').$$

Dieser Ausdruck in obiger Formel eingesetzt liefert

$$(2) \qquad z = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{p + 2\sqrt{pp'} + 3p'}{p + \sqrt{pp'} + p'}.$$

Für unseren Zweck hat aber die Formel (1) deshalb einen entschiedenen Vorzug, weil sie allgemeiner ist, als die zuletzt gefundene. Denn sie gilt nicht bloß für das bis zur Ordinatenachse reichende Trapez **FEOKL**, sondern auch für solche Trapeze, welche, wie **F'EOKL'** und **F''EOKL''**, durch die mit der Ordinatenachse parallelen Linien **L'F'**, **L''F''** ꝛc. begrenzt sind. Daß dies bei der Formel (2) nicht der Fall ist, hat darin seinen Grund, weil die Gleichung $2\sqrt{\pi} = \sqrt{p} + \sqrt{p'}$ nur so lange gültig bleibt, als π, p und p' die Werthe der Linien **ON**, **EF** und **KL** bezeichnen, während diese Gültigkeit aufhört, sobald jene Größen z. B. die Werthe von **ON'**, **EF'**, **KL'** ꝛc. bezeichnen sollen.

§. 142.

Bestimmung des Schwerpunktes einer jeden, von einer beliebigen krummen Linie begrenzten Fläche. Es sei **AA'D'G'G** (Fig. 93) eine ebene Fläche von gleichförmiger Schwere, welche einerseits von der beliebigen Curve **A'D'G'**, andererseits von der Abscissenachse **AG** und von den darauf normalen Ordinaten **AA'**, **GG'** begrenzt ist.

Man theile die Abscissenachse **AG** in eine gerade Anzahl gleicher Theile **AB = BC = CD = ··· = FG**, deren gemeinschaftliche Länge mit **b** bezeichnet werden mag, errichte in den Theilpunkten die auf **AG** normalen Ordinaten **BB'**, **CC'**, **DD'**, u. s. w., und bezeichne die Längen derselben nach der Reihe mit a_1, a_2, a_3... u. s. w.

Soll der Abstand des Schwerpunktes der gegebenen

Fläche von der ersten Ordinate AA' bestimmt werden, so wähle man diese Linie zur Momentenachse und in Bezug auf dieselbe bestimme man die Momente aller trapezförmigen Flächentheile, welche zwischen je zwei ungeraden Ordinaten enthalten sind. Die Summe dieser Momente giebt demnächst das Moment der ganzen, von der beliebigen Curve begrenzten Fläche.

Um zuerst das Moment der trapezförmigen Fläche $AA'B'C'C$ zu berechnen, denke man dieselbe durch die Sehne $A'C'$ in ein gewöhnliches Paralleltrapez und in einen krummlinigen Abschnitt zerlegt, deren Momente sich folgendergestalt ergeben.

Nach Anh. IV. Nr. 43 ist der Inhalt der Fläche

$$AA'B'C'C = \tfrac{1}{3}b(a_1 + 4a_2 + a_3);$$

während Trapez $AA'C'C = b(a_1 + a_3)$ ist.

Die eine Fläche von der andern subtrahirt, giebt

$$\text{Abschn. } A'C'B' = \tfrac{2}{3}b(2a_2 - a_1 - a_3).$$

Das Moment des Trapezes bestimmt sich nach §. 130 durch die Formel

$$b(a_1 + a_3) \cdot \frac{2b}{3} \frac{a_1 + 2a_3}{a_1 + a_3} = \tfrac{2}{3}b^2(a_1 + 2a_3);$$

während das Moment des krummlinigen Segmentes, dessen Schwerpunkt näherungsweise in der die Sehne $A'C'$ halbirenden Linie BB' angenommen werden kann, sich gleich

$$b \cdot \tfrac{2}{3}b(2a_2 - a_1 - a_3) = \tfrac{2}{3}b^2(2a_2 - a_1 - a_3)$$

findet. Addirt man diesen Ausdruck zu dem vorigen, so erhält man für das Moment der trapezförmigen Fläche $AA'B'C'C$ in Bezug auf AA' als Achse, den Ausdruck:

(1) $\qquad \tfrac{2}{3}b^2(2a_2 + a_3).$

Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich das Moment der Fläche $CC'D'E'E$, in Bezug auf CC' als Achse, gleich

(2) $\qquad \tfrac{2}{3}b^2(2a_4 + a_5);$

ebenso das Moment der Fläche EE'F'G'G in Bezug auf EE' als Achse gleich

(3) $\frac{2}{3}b^2(2a_6 + a_7)$; u. s. w.

Sollen aber mehrere statische Momente in eine Summe vereinigt werden, so kann dies nur dann geschehen, wenn sie sich alle auf eine und dieselbe Achse beziehen, was mit den obigen Momenten noch nicht der Fall ist. Letztere müssen daher, bevor man sie addiren kann, sämmtlich auf die ursprünglich als Achse angenommene Linie AA' reducirt werden, was sich aber durch folgendes Verfahren leicht bewerkstelligen läßt.

Ist F der Inhalt irgend einer ebenen Figur, z der Abstand ihres Schwerpunktes von einer beliebigen, in der Ebene der Figur angenommenen Achse, so drückt $M = Fz$ das Moment jener Figur gegen diese Achse aus. In Bezug auf eine zweite Achse, welche mit der ersten in dem Abstande d parallel läuft, ist $z \pm d$ der Schwerpunkts-Abstand, also $M = F(z \pm d)$ das Moment der Fläche F. Durch Auflösung der Klammer verwandelt sich der letzte Ausdruck in folgenden:

$$M' = Fz \pm Fd = M \pm Fd;$$

und daraus folgt die Regel, daß man das Moment gegen die zweite Achse findet, wenn man zu dem auf die erste Achse bezogenen Moment das Produkt aus dem Inhalt der gegebenen Fläche in den normalen Abstand zwischen beiden Achsen positiv oder negativ hinzufügt, je nachdem die zweite Achse weiter vom Schwerpunkt entfernt oder demselben näher ist. *)

Bei der vorliegenden Aufgabe ist nun ersteres der Fall, und zwar ist der Abstand der Linien CC', EE' ꝛc, auf welche sich die Momente (2), (3) ꝛc. beziehen, von der Achse

*) Diese Regel gilt eben so für Körper, wenn deren Momente, die in Bezug auf irgend eine Ebene gegeben sind, auf andere parallele Ebenen reducirt werden sollen.

AA' bezüglich gleich $2b$, $4b$ ꝛc. Demnach ergeben sich die auf letztere Achse reducirten Momente der Flächen $CC'D'E'E$, $EE'F'G'G$ ꝛc., deren Inhalte bezüglich durch $\frac{1}{3}b(a_3+4a_4+a_5)$, $\frac{1}{3}b(a_5+4a_6+a_7)$ ꝛc. ausgedrückt werden, folgendergestalt:

für $CC'D'E'E = \frac{2}{3}b^2(2a_4+a_5)+\frac{1}{3}b^2(a_3+4a_4+a_5)$
$= \frac{2}{3}b^2(a_3+6a_4+2a_5)$;

für $EE'F'G'G = \frac{2}{3}b^2(2a_6+a_7)+\frac{1}{3}b^2(a_5+4a_6+a_7)$
$= \frac{2}{3}b^2(2a_5+10a_6+3a_7)$; u. s. w.

Addirt man alle diese Momente zu dem Moment der Fläche $AA'B'C'C$, welches vorhin gleich

$$\tfrac{2}{3}b^2(2a_2+a_3)$$

gefunden wurde, so ergiebt sich für das Moment der ganzen Fläche $AA'D'G'G$ in Bezug auf die begrenzende Ordinate AA' als Achse der Ausdruck:

$$\tfrac{2}{3}b^2(2a_2+2a_3+6a_4+4a_5+10a_6+3a_7),$$

welcher sich auch in nachstehender Form darstellen läßt:

$$\tfrac{1}{3}b^2(0\cdot a_1+1\cdot 4a_2+2\cdot 2a_3+3\cdot 4a_4+4\cdot 2a_5+5\cdot 4a_6+6\cdot a_7).$$

Der Flächeninhalt der gegebenen Figur ist nun nach Nr. 43 des Anhangs gleich

$$\tfrac{1}{3}b(a_1+4a_2+2a_3+4a_4+2a_5+4a_6+a_7),$$

und wenn das vorige Moment durch diesen Inhalt dividirt wird, so findet man für den Abstand z des Schwerpunktes der gegebenen Fläche von der sie begrenzenden Linie AA' nachstehenden Ausdruck:

$$(I)\quad z = b\cdot\frac{0\cdot a_1+1\cdot 4a_2+2\cdot 2a_3+3\cdot 4a_4+4\cdot 2a_5+5\cdot 4a_6+6\cdot a_7}{a_1+4a_2+2a_3+4a_4+2a_5+4a_6+a_7}$$

Das Gesetz, wonach dieser Ausdruck aus den einzelnen Ordinaten zusammengesetzt ist, kann leicht erkannt werden. Es besteht in Folgendem:

„Der Nenner enthält die erste und letzte Ordinate „einfach, die übrigen ungeraden doppelt und alle

„geraden Ordinaten vierfach genommen. Der Zähler wird aus dem Nenner abgeleitet, indem man die „einzelnen Glieder des letzteren nach der Reihe mit „den Zahlenwerthen 0, 1, 2, 3...ꝛc. multiplicirt und „die entstehenden Produkte addirt. Endlich wird der „Bruch mit dem Abstande zweier auf einander folgender Ordinaten multiplicirt."

Schließt sich die begrenzende Curve A'D'G' mit ihrem Anfangspunkte A' an die Abscissenachse AG an, so ist die erste Ordinate $a_1 = 0$, und man erhält dann für den Schwerpunkts-Abstand

$$(II)\quad z = b \cdot \frac{1\cdot 4a_2 + 2\cdot 2a_3 + 3\cdot 4a_4 + 4\cdot 2a_5 + 5\cdot 4a_6 + 6\cdot a_7}{4a_2 + 2a_3 + 4a_4 + 2a_5 + 4a_6 + a_7}.$$

Eben so hat man $a_7 = 0$ zu setzen, wenn auch der Endpunkt G' der Curve in die Abscissenachse fällt.

Anmerk. Die obigen Formeln lassen sich auch dadurch finden, daß man die zwischen je zwei ungeraden Ordinaten enthaltenen Flächenstücke als parabolische Trapeze betrachtet, und darauf die Formeln des vor. §. anwendet. Auf diese Weise hergeleitet, findet man die Formel (I) zuerst aufgestellt in dem Werke des schwedischen Vice-Admirals von Chapmann über die Construction der Schiffe, und daraus entlehnt in mehreren neuern Werken.

III. Bestimmung der Schwerpunkte von Oberflächen.

§. 143.

Schwerpunkt der Oberfläche eines Prismas. Bei jedem Prisma mit parallelen Endflächen sind die Seitenflächen Parallelogramme, von welchen der Schwerpunkt im Durchschnitt ihrer beiden Diagonalen oder in der Mitte ihrer Länge liegt. Wenn man daher das Prisma in der Mitte seiner Länge und parallel mit dessen Endflächen durch eine Ebene schneidet, so bildet sich auf seiner Oberfläche ein Poly-

gon, in deſſen Umfang die geſammte Schwere der Seitenflächen gleichförmig vertheilt angenommen werden kann. Der Schwerpunkt dieſes Umfanges iſt dann zugleich der Schwerpunkt der Oberfläche, und dieſer liegt daher in der Mitte von der Länge des Prismas.

Werden auch die congruenten Endflächen als ſchwer gedacht, ſo ſind die zugehörigen Schwerkräfte einander gleich, und der gemeinſame Schwerpunkt liegt daher ebenfalls in der durch die Mitte der Länge gelegten Durchſchnittsebene.

Von dem Mantel eines jeden Cylinders liegt der Schwerpunkt, wie leicht einzuſehen iſt, in der Mitte ſeiner Achſe; daſſelbe gilt von den beiden mit einander parallelen Kreisflächen.

§. 144.

Schwerpunkt eines cylinderförmigen Hohlmaaßes. Das in (Fig. 94) dargeſtellte Hohlmaaß beſteht aus einem Cylindermantel $= 2r\pi h$, der oben offen, unten aber durch die Kreisfläche $= r^2\pi$ geſchloſſen iſt; wo r den Halbmeſſers des Cylinders und h deſſen Höhe bezeichnet. Denkt man ſich beide Flächen als gleichförmig ſchwer, und ſetzt den Abſtand ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunktes von der Grundfläche $= z$; bezieht man ferner die Momente auf den Mittelpunkt der unteren Kreisebene, ſo iſt das Moment des Mantels gleich $2r\pi h \cdot \frac{1}{2}h = r\pi h^2$. Das Moment der Kreisebene $r^2\pi$, deren Mittelpunkt im Momentenpunkte ſelbſt liegt, iſt $r^2\pi \cdot 0 = 0$; folglich hat man:

$$\text{Summe der Momente} = r\pi h^2,$$

$$\text{Summe der Flächen} = r^2\pi + 2r\pi h;$$

und wenn man beides mit einander dividirt, ſo ergiebt ſich der geſuchte Schwerpunkts-Abſtand

$$z = \frac{h^2}{r + 2h}.$$

In derselben Art findet man den Abstand des Schwerpunktes vom oberen Endpunkte der Achse, oder

$$z' = \frac{h^2 + rh}{r + 2h}.$$

§. 145.

Schwerpunkt der gesammten Seitenfläche einer Pyramide. Die einzelnen Seitenflächen sind Dreiecke, bei welchen die Schwerpunkte um ein Drittheil der zugehörigen Höhen von den Grundlinien entfernt sind. Wenn man daher die Höhe der Pyramide in drei gleiche Theile theilt und parallel mit der Grundfläche durch den ihr zunächst liegenden Theilpunkt eine Ebene legt, so wird dieselbe, wie man sich leicht überzeugen kann, durch die Schwerpunkte sämmtlicher Seitenflächen gehen und daher eine Schwerebene der gesammten Seitenfläche sein. Demnach liegt der gesuchte Schwerpunkt auf $\frac{1}{3}$ der Höhe der Pyramide von ihrer Grundfläche entfernt. Sucht man von dem Umfange der Grundfläche den Schwerpunkt und verbindet denselben mit der gegenüber liegenden Spitze durch eine gerade Linie, so ist dies ein Durchmesser der Schwere, und der Punkt, in welchem sie jene Schwerebene schneidet, ist der gesuchte Schwerpunkt.

Bei einem beliebigen Kegel gelten dieselben Schlüsse; folglich liegt der Schwerpunkt seines Mantels auf $\frac{1}{3}$ der Achse, oder um $\frac{1}{3}$ der normalen Höhe von der Grundfläche entfernt.

§. 146.

Schwerpunkt von dem Mantel eines abgekürzten Kegels. Es sei ABDC (Fig. 95) ein abgekürzter normaler Kegel, von welchem die Höhe = h und die Radien r und r' der begrenzenden Kreisebenen gegeben sind. Die

Seitenlinie $AC = BD$ werde mit b, und der Schwerpunkts-Abstand EG des Mantels von der unteren Grundfläche mit z bezeichnet. Denkt man sich den abgekürzten Kegel zum vollständigen ergänzt, so sei x die Höhe des Ergänzungskegels und y die Seitenlinie desselben.

In Bezug auf E als Momentenpunkt ist das Moment des vollständigen Kegelmantels $ABF = r\pi(b+y)\cdot\frac{1}{2}(h+x)$, und das Moment des ergänzenden Kegelmantels $CDF = r'\pi y\cdot(h+\frac{1}{3}x)$; folglich die Differenz beider Momente, oder das Moment des abgekürzten Kegelmantels, gleich

$$\tfrac{1}{3}\pi[r(b+y)(h+x) - r'y(3h+x)].$$

Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke hat man die Proportionen

$x+h : x = r : r'$; oder $h : x = r-r' : r'$;

$y+b : y = r : r'$; „ $b : y = r-r' : r'$.

Hieraus findet man ferner

$$x = \frac{hr'}{r-r'}; \quad \text{also } x+h = \frac{hr}{r-r'};$$

$$y = \frac{br'}{r-r'}; \quad \text{„ } b+y = \frac{br}{r-r'}.$$

Substituirt man diese Werthe in den vorigen Ausdruck, so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$\tfrac{1}{3}\pi\left[\frac{b\,h\,r^2}{(r-r')^2} - \frac{b\,r'^2}{r-r'}\cdot\left(3h+\frac{hr'}{r-r'}\right)\right] = \tfrac{1}{3}b\,h\,\pi\cdot\frac{r^3-3rr'^2+2r'^3}{(r-r')^2}$$

und wenn dies ferner reducirt wird, so ergiebt sich für den abgekürzten Kegelmantel

$$\text{das Moment} = \tfrac{1}{2}bh\pi(r+2r').$$

Dividirt man dies Moment durch den Inhalt des Mantels, welcher $= b\pi(r+r')$ ist, so findet man den gesuchten Abstand EG, oder

$$(1) \qquad z = \frac{h}{3}\cdot\frac{r+2r'}{r+r'}.$$

Bezeichnet d den Durchmesser AB der unteren und d' den CD der oberen Kreisebene, so ist auch

(2) $$z = \frac{h}{3} \cdot \frac{d + 2d'}{d + d'}.$$

Zusatz. Der Mantel des abgekürzten Kegels und das Paralleltrapez **ABDC**, welches von jenem ein Achsendurchschnitt ist, haben einerlei Schwerpunkt. (Vergl. §. 130.)

§. 147.

Bestimmung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von dem Mantel und den Grundflächen eines abgekürzten Kegels. Wird von dem abgekürzten Kegel **ABDC** (Fig. 95) der Mantel und die untere Grundfläche als gleichförmig schwer, die obere Grundfläche aber als nicht vorhanden gedacht, so ist, mit Beibehaltung der im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnung, die Summe der Momente beider Flächen, in Bezug auf **E** als Momentenpunkt, gleich

$$r^2\pi \cdot 0 + b\pi(r + r') \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{r + 2r'}{r + r'} = \tfrac{1}{3} b\pi h(r + 2r').$$

Die Summe der beiden Flächen ist $= r^2\pi + b\pi(r + r')$, und wenn man diese beiden Ausdrücke in einander dividirt, findet man den Abstand des Schwerpunktes **G** vom Mittelpunkte **E** der unteren Grundfläche, oder

(1) $$EG = \frac{h}{3} \cdot \frac{b(r + 2r')}{r^2 + b(r + r')}.$$

Werden beide Grundebenen als schwer gedacht, d. h. soll die Lage des Schwerpunktes **G** von der gesammten Oberfläche des abgekürzten Kegels bestimmt werden, so ist in Bezug auf die untere Grundfläche

die Summe der Momente $= \tfrac{1}{3} bh\pi(r + 2r') + r'^2\pi h$,

die Summe der Flächen $= b\pi(r + r') + r^2\pi + r'^2\pi$;

und indem jene Summe durch diese dividirt wird, ergiebt sich

(2) $$EG = \frac{h}{3} \cdot \frac{b(r + 2r') + 3r'^2}{b(r + r') + r^2 + r'^2}.$$

§. 148.

Bestimmung des Schwerpunktes von Theilen der Oberfläche einer Kugel. Es stelle ABDC (Fig. 96) die Fläche einer Kugelzone in der Seitenansicht vor, AB und CD seien die Peripherien der zugehörigen Kreisebenen und EF die Achse oder Höhe der Zone. Denkt man sich die Achse in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und durch die Theilpunkte Durchschnittsebenen gelegt, die mit den begrenzenden Kreisebenen AB und CD parallel sind, so wird dadurch die gewölbte Fläche der Zone in Streifen getheilt, die bekanntlich alle gleiche Flächeninhalte haben.

Es sei AabB der zunächst an AB und CcdD der zunächst an CD liegende Streifen, welche beide von gleichen Schwerkräften angeregt werden, da sie gleiche Flächeninhalte haben; alsdann muß die Mittelkraft dieser beiden Schwerkräfte durch die Mitte G der Zonenachse EF gehen. Dasselbe gilt von allen anderen Streifen der Zone; d. h. je zwei von ihnen, die gleiche Abstände vom Mittelpunkte G haben, liefern eine Mittelkraft, deren Angriffspunkt in G liegt; woraus folgt, daß auch der Schwerpunkt der Zonenfläche in der Mitte G ihrer Achse befindlich ist.

Von der Calotte, so wie von der Oberfläche der Halbkugel, läßt sich ganz dasselbe beweisen; d. h. der Schwerpunkt liegt jedesmal in der Mitte der Achse. — Wie man den Schwerpunkt von andern sphärischen Flächen finden kann, wird in den nächstfolgenden §§. gezeigt.

§. 149.

Schwerpunkt eines beliebigen Stückes der Kugelfläche. Man denke sich auf der Oberfläche einer, mit dem Halbmesser r beschriebenen, Kugel ein beliebiges Stück F abgegrenzt, und bezeichne den Abstand seines Schwerpunktes von der Ebene eines größten Kreises der Kugel, die zur

Momentenebene genommen wird, mit z. Die Fläche F, welche ganz auf einer Seite der Momentenebene liegen mag, denke man sich in unendlich kleine Elemente f, f_1, f_2 u. s. w. getheilt, deren Entfernungen von der Momentenebene bezüglich e, e_1, e_2 ... ꝛc. heißen mögen, so hat man gemäß früheren Lehren die Gleichung:

$$Fz = fe + f_1e_1 + f_2e_2 + \ldots \text{ ꝛc.} = \Sigma fe.$$

Es seien η, η_1, η_2, ... ꝛc. die Neigungswinkel der, durch die Elemente f, f_1, f_2 ... ꝛc. gelegten, Berührungsebenen der Kugel gegen die Momentenebene, so ergiebt sich leicht, daß $e = r\,\mathrm{Cos}\,\eta$, $e_1 = r\,\mathrm{Cos}\,\eta_1$, $e_2 = r\,\mathrm{Cos}\,\eta_2$ ... ꝛc. ist, und mit Rücksicht hierauf gestaltet sich die obige Momentengleichung also:

$$Fz = \Sigma fr\,\mathrm{Cos}\,\eta = r \cdot \Sigma f\,\mathrm{Cos}\,\eta.$$

Bekanntlich sind aber $f\,\mathrm{Cos}\,\eta$, $f_1\,\mathrm{Cos}\,\eta_1$, $f_2\,\mathrm{Cos}\,\eta_2$ ... ꝛc. die Projectionen der Elemente f, f_1, f_2 ... ꝛc. auf die Momentenebene; wenn also diese Projectionen nach der Reihe mit φ, φ_1, φ_2 ... ꝛc. bezeichnet werden, so hat man

$$Fz = r \cdot \Sigma\varphi = rF';$$

wobei $F' = \Sigma\varphi$ die Summe der Projectionen aller Flächenelemente, also die Projection der ganzen Fläche F auf die Momentenebene vorstellt.

Die Gleichung $Fz = F'r$ liefert die Proportion

$$F : F' = r : z;$$

d. h. die sphärische Fläche verhält sich zu ihrer Projection auf die Ebene eines jeden größten Kugelkreises, wie der Halbmesser der Kugel zu dem Abstande des Schwerpunktes jener Fläche von dieser Kreisebene.

Von diesem Gesetze, welches einem früher (§. 125) für den Kreisbogen gefundenen ganz analog ist, läßt sich leicht die Anwendung auf die im vor. §. betrachteten Kugelflächen

EA zieht und darauf EF = ¼EA nimmt. Verbindet man nun den Schwerpunkt F mit der gegenüberliegenden Ecke D durch eine gerade Linie DF, so ist dies ein Durchmesser der Schwere für die Pyramide.

Um sich hiervon zu überzeugen, denke man sich den Körper durch eine Ebene abc parallel mit der Grundebene ABC geschnitten, verbinde die Mitte E der Kante BC mit dem Eckpunkte D durch die Gerade DE, welche sich mit bc in e schneidet, und ziehe endlich in der Durchschnittsebene abc die Verbindungslinie ea, so befindet sich diese mit DF in einerlei Ebene AED, und beide Linien ae und DF schneiden sich daher in einem Punkte f, welcher der Schwerpunkt des Dreiecks abc sein wird. Denn da bc parallel mit BC, und BE = CE ist, so ist auch be = ce, und daher ae eine Schwerlinie des Dreiecks abc. Ferner ist ae parallel mit AE, und deshalb verhält sich

$$ef : ea = EF : EA = 1 : 3;$$

daher ist f der Schwerpunkt der Durchschnittsebene abc. Auf dieselbe Art kann man von jeder andern, mit ABC parallelen Durchschnittsebene beweisen, daß ihr Schwerpunkt jedesmal in der geraden Linie DF liege; woraus dann hervorgeht, daß letztere ein Schwerdurchmesser der gegebenen Pyramide ABCD sein muß.

Ganz in derselben Art läßt sich noch eine zweite Schwerlinie AH construiren, indem man auf der Geraden DE das Stück EH = ⅓ED nimmt, und den Punkt H mit der gegenüberliegenden Ecke A durch eine gerade Linie verbindet. Alsdann ist der Durschnittspunkt G von beiden Schwerlinien DF und AH der gesuchte Schwerpunkt der Pyramide ABCD.

Verbindet man in der Ebene AED die beiden Punkte F und H durch eine gerade Linie FH, so ist diese mit der Kante AD parallel, weil sich

$$EF : EA = EH : ED = 1 : 3$$

verhält. Auch folgt nun leicht die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke **ADG** und **HFG**, woraus sich die nachstehende Proportion entnehmen läßt:

$$FG : DG = FH : AD = 1 : 3;$$

also auch $FG : FG + DG = 1 : 1 + 3,$

oder $FG : FD = 1 : 4.$

Daraus folgt $FG = \frac{1}{4}FD;$

und ebenso ist $HG = \frac{1}{4}HA.$

D. h. Der Schwerpunkt einer jeden dreikantigen Pyramide befindet sich auf derjenigen Linie, welche eine Ecke des genannten Körpers mit dem Schwerpunkte der gegenüberliegenden Seitenfläche verbindet, und zwar um ein Viertheil dieser Verbindungslinie von der Seitenfläche, oder um drei Viertheil derselben von der Ecke entfernt.

Denkt man sich durch den Schwerpunkt **G** eine Ebene parallel mit einer der Seitenflächen gelegt, so schneidet diese die auf jener Fläche normale Höhe der Pyramide der zugehörigen Schwerlinie proportional, also in dem Verhältniß wie **1 : 4**. Demnach ist der normale Abstand des Schwerpunktes einer dreikantigen Pyramide von jeder Seitenfläche gleich dem vierten Theil der darauf senkrechten Höhe.

§. 152.

Andere Construction des Schwerpunktes einer dreikantigen Pyramide. Wenn man in der Schwerebene **DEA** (Fig. 98) durch die beiden Punkte **E** und **G** eine gerade Linie legt, welche verlängert die Kante **AD** in **K** schneidet, so kann bewiesen werden, daß

$$AK = DK,$$

oder, daß **K** die Mitte von **AD** ist. Denn nach einem bekannten Lehrsatze der Geometrie hat man die Gleichung

$$AF \cdot EH \cdot DK = FE \cdot HD \cdot AK$$

oder $$DK = \frac{FE}{AF} \cdot \frac{HD}{EH} \cdot AK.$$

Aber zufolge der im vorigen Paragraphen angewendeten Construction, ist $$\frac{FE}{AE} = \frac{1}{2}, \quad \frac{HD}{EH} = 2;$$

und wenn dies substituirt wird, so entsteht:

$$DK = AK.$$

Ferner läßt sich beweisen, daß die Verbindungslinie EK im Punkte G halbirt wird, oder daß

$$EG = GK$$

ist. Denn da nach der Construction $AF = 2 \cdot FE$ ist, so hat man auch

$$\Delta ADF = 2 \cdot \Delta FDE,$$

und $$\Delta AGF = 2 \cdot \Delta FGE;$$

folglich auch $$\Delta ADG = 2 \cdot \Delta GDE.$$

Aber wegen des vorhin Bewiesenen ist auch

$$\Delta ADG = 2 \cdot \Delta KDG,$$

und daher $$\Delta KDG = \Delta GDE;$$

mithin $$KG = GE.$$

Demnach liegt der Schwerpunkt einer dreikantigen Pyramide in der Mitte derjenigen geraden Linie, welche die Halbirungspunkte zweier gegenüber liegender Kanten des genannten Körpers mit einander verbindet.

Zusatz. Nimmt man an, daß die Eckpunkte A, B, C und D der dreikantigen Pyramide die Angriffspunkte von vier gleichen Kräften seien, so fällt der Angriffspunkt ihrer Mittelkraft mit dem Schwerpunkte G der Pyramide zusammen. Vergl. §. 78 (2).

§. 153.

Abstand des Schwerpunktes einer dreikantigen Pyramide von einer beliebig im Raume gegebenen

Ebene. Es stelle ABCD (Fig. 99) die gegebene Pyramide in willkührlicher Lage über der Ebene XY vor. Die normalen Abstände der Eckpunkte A, B, C und D von dieser Ebene seien $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $DD' = d$, und der normale Abstand des Schwerpunktes G sei $GG' = z$, welcher letztere zu bestimmen ist.

Der Schwerpunkt G liegt in der Mitte der Linie EF, welche die Mitten der Kanten AC, BD mit einander verbindet, und wenn man aus den Punkten F und E die Perpendikel FF' und EE' auf die Ebene XY fällt, so hat man bekanntlich

$$GG' = z = \tfrac{1}{2}(FF' + EE').$$

Der Perpendikel FF' trifft die Projection A'C' der Kante AC auf die genannte Ebene, und halbirt dieselbe in F'; daher hat man

$$FF' = \tfrac{1}{2}(AA' + CC') = \tfrac{1}{2}(a + c).$$

Eben so ist $EE' = \tfrac{1}{2}(BB' + DD') = \tfrac{1}{2}(b + d)$;

und wenn diese Werthe in dem Ausdrucke von z substituirt werden, so erhält man zuletzt:

$$z = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d).$$

d. h. Der normale Abstand des Schwerpunktes einer dreikantigen Pyramide von irgend einer beliebigen Ebene im Raume, ist gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den Abständen ihrer vier Eckpunkte von derselben Ebene.

§. 154.

Bestimmung des Schwerpunktes eines jeden beliebigen pyramidalischen Körpers. Hat man bei irgend einer beliebigen Pyramide den Schwerpunkt ihrer Grundebene bestimmt, so repräsentirt die Linie, welche diesen Punkt mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet, einen Durchmesser der Schwere des Körpers.

So wie man nun die Grundfläche vom Schwerpunkte

aus in lauter Dreiecke zerlegen kann, so läßt sich auch der gegebene Körper in eben so viele dreikantige Pyramiden zerlegen, deren Grundflächen alle in jener Grundebene liegen, und deren Spitzen sich in einem und demselben Punkte vereinigen. Alle diese dreikantigen Pyramiden haben folglich mit dem gegebenen Körper einerlei Höhe, und weil der Schwerpunkt einer jeden von ihnen um den vierten Theil dieser Höhe von der Grundebene entfernt ist, so befinden sich sämmtliche Schwerpunkte in einer mit der Grundfläche parallelen Ebene, deren Abstand von jener den vierten Theil der genannten Höhe beträgt. Diese Ebene ist folglich eine Schwerebene des gegebenen Körpers, und der Punkt, in welchem sie von jenem Schwerdurchmesser geschnitten wird, ist der gesuchte Schwerpunkt. — Demnach ist der Schwerpunkt einer jeden vielkantigen Pyramide, so wie auch eines jeden Kegels, um ein Viertheil der Höhe von der Grundebene, oder um drei Viertheil derselben von der Spitze eines solchen Körpers entfernt.

§. 155.

Bestimmung des Schwerpunktes einer abgekürzten beliebigen Pyramide. Es stelle **ABE** (Fig. 100) einen beliebigen pyramidalischen oder conischen Körper vor, welcher durch die mit der Grundebene **AB** parallelen Durchschnittsebene **CD** abgekürzt ist.

Um von dem Körper **ABCD** den Schwerpunkt zu bestimmen, bezeichne **a** die untere, **b** die obere Grundfläche und **h** deren normalen Abstand, oder die Höhe des Körpers. Es sei **x** die Höhe der Ergänzungspyramide **CDE**, dann ist der Inhalt der ganzen Pyramide **ABE** $= \frac{1}{3}a(h+x)$; der Abstand ihres Schwerpunktes von der Grundebene $= \frac{1}{4}(h+x)$, also ihr Moment gleich

$$\tfrac{1}{3}a(h+x)\cdot\tfrac{1}{4}(h+x) = \tfrac{1}{12}a(h+x)^2.$$

Die Ergänzungspyramide CDE hat den Inhalt $= \frac{1}{3}bx$; der Abstand ihres Schwerpunktes von der Ebene AB ist $= h + \frac{1}{4}x$; folglich ihr Moment gleich

$$\frac{1}{3}bx(h + \frac{1}{4}x) = \frac{1}{12}b(4hx + x^2).$$

Indem man nun diese beiden Momente von einander subtrahirt, ergiebt sich das Moment des Körpers ABCD in Bezug auf seine untere Grundebene AB wie folgt:

$$\frac{1}{12}a(h+x)^2 - \frac{1}{12}b(4hx + x^2)$$
$$= \frac{1}{12}ah^2 + \frac{1}{12}x[h(2a-4b) + (a-b)x].$$

Zur Elimination von x hat man die folgende Proportion:

$a : b = (h+x)^2 : x^2$; oder $\sqrt{a} : \sqrt{b} = h + x : x$;

woraus sich $x = \dfrac{h\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{h(b+\sqrt{ab})}{a-b}$

ergiebt. Substituirt man diesen Werth, so gestaltet sich das Moment wie folgt:

$$\frac{1}{12}ah^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}[h(2a-4b) + h(b+\sqrt{ab})]$$

$$= \frac{1}{12}ah^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{h^2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}[2a-3b+\sqrt{ab}]$$

$$= \frac{1}{12}ah^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{h^2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}[2(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})]$$

oder, wenn $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ gehoben wird,

$$= \frac{1}{12}h^2(a+3b+2\sqrt{ab}).$$

Wird dies Moment durch den Inhalt des Körpers

$$ABCD = \frac{1}{3}h(a+b+\sqrt{ab})$$

dividirt, so findet man den Abstand seines Schwerpunktes von der unteren Grundebene AB, nämlich

$$(1) \qquad z = \frac{1}{4}h\cdot\frac{a+3b+2\sqrt{ab}}{a+b+\sqrt{ab}}.$$

Wäre der gegebene Körper ABCD ein abgekürzter Kegel (Fig. 95), so würden die vorigen Schlüsse noch dieselben bleiben. Wenn also r den Halbmesser der unteren, r' den

der oberen Grundebene eines abgekürzten Kegels bezeichnet, so ist $a = r^2\pi$, $b = r'^2\pi$; daher

$$(2) \qquad z = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{r^2 + 3r'^2 + 2rr'}{r^2 + r'^2 + rr'}.$$

Will man den Abstand z' des Schwerpunktes von der oberen Grundfläche CD haben, so braucht man nur die Halbmesser r und r' in der vorigen Formel mit einander zu verwechseln; man erhält dadurch:

$$(3) \qquad z' = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{r'^2 + 3r^2 + 2rr'}{r'^2 + r^2 + rr'}.$$

Zusatz. Ist der Körper ABCD in der 100sten Figur prismatisch, oder der in Fig. 95 ein Cylinder, also $a = b$ oder $r = r'$, so erhält man aus den so eben gefundenen drei Formeln jedesmal $z = \frac{1}{2}h$.

§. 156.

Schwerpunkt eines schief abgeschnittenen dreikantigen Prismas. Es sei ABCDEF (Fig. 101) das gegebene Prisma, von welchem der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ABC = f bestimmt werden soll. Die Längen der Kanten AD, BE, CF sollen nach der Reihe mit a, b und c, und deren Neigung gegen die Grundfläche f mit α bezeichnet werden.

Vermittelst der Durchschnittsebenen ABF und BDF läßt sich das Prisma in drei dreikantige Pyramiden ABCF, ABDF und BDEF zerlegen, von welchen die Kubikinhalte und die Momente in Bezug auf die Fläche ABC folgendermaßen bestimmt werden können:

1) Der Inhalt der Pyramide ABCF ist $= \frac{1}{3}fc\,\mathrm{Sin}\alpha$; der Abstand ihres Schwerpunktes von der Grundfläche $= \frac{1}{4}c\,\mathrm{Sin}\alpha$; also das Moment gleich

$$\tfrac{1}{3}fc\,\mathrm{Sin}\alpha \cdot \tfrac{1}{4}c\,\mathrm{Sin}\alpha = \tfrac{1}{12}fc^2 \cdot \mathrm{Sin}\alpha^2.$$

2) Denkt man sich durch die drei Punkte B, C und D

eine Ebene gelegt, so sind die Pyramiden **ABDF** und **ABDC** einander gleich, weil sie einerlei Grundfläche **ABD** und gleiche Höhe haben. Der Inhalt der Pyramide **ABCD** ist aber $= \frac{1}{3}f \cdot a\,\mathrm{Sin}\alpha$; folglich hat man auch Pyramide **ABDF** $= \frac{1}{3}fa\,\mathrm{Sin}\alpha$. Nach §. 153 ist der Abstand des Schwerpunktes der Pyramide **ABDF** von der Ebene **ABC** $= \frac{1}{4}(a+c)\,\mathrm{Sin}\alpha$; mithin ergiebt sich das Moment derselben gleich

$$\frac{1}{3}fa\,\mathrm{Sin}\alpha \cdot \frac{1}{4}(a+c)\,\mathrm{Sin}\alpha = \frac{1}{12}f(a^2+ac)\,\mathrm{Sin}\alpha^2,$$

3) Legt man durch die drei Punkte **A**, **E** und **F** eine Ebene, so entstehen die Pyramiden **BDEF** und **BAEF**, welche gleiche Grundflächen **BDE** = **BAE** und gleiche Höhe haben, und daher einander gleich sind. Wird eben so durch die drei Punkte **C**, **A** und **E** eine Ebene gelegt, so ist aus demselben Grunde auch Pyram. **BAEF** = Pyram. **BAEC**. Nun ist aber Pyramide **BACE** $= \frac{1}{3}fb\,\mathrm{Sin}\alpha$; folglich hat man auch Pyram. **BDEF** $= \frac{1}{3}fb\,\mathrm{Sin}\alpha$. Der Abstand des Schwerpunktes der zuletzt genannten Pyramide von der Ebene **ABC** ergiebt sich, zufolge §. 153, $= \frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\alpha$; daher ist das Moment derselben gleich

$$\frac{1}{3}fb\,\mathrm{Sin}\alpha \cdot \frac{1}{4}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\alpha = \frac{1}{12}f(ab+b^2+bc)\,\mathrm{Sin}\alpha^2.$$

Durch Addition der drei Momente findet man das Moment des ganzen Körpers gleich

$$\frac{1}{12}f\,\mathrm{Sin}\alpha^2 \cdot (a^2+ab+b^2+bc+c^2).$$

Eben so erhält man den Kubikinhalt des ganzen Prismas, wenn man die vorhin gefundenen Inhalte der Pyramiden, woraus dasselbe besteht, zusammen addirt; es entsteht dann als Ausdruck des fraglichen Inhaltes:

$$\frac{1}{3}f(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\alpha.$$

Indem man nun mit diesem Inhalte in das vorhergehende Moment dividirt, so findet man den Abstand z des Schwerpunktes von der Grundfläche des schief abgeschnittenen dreikantigen Prismas, nämlich

$$z = \tfrac{1}{4}\mathrm{Sin}\alpha \cdot \frac{a^2 + ab + ac + b^2 + bc + c^2}{a + b + c}.$$

§. 157.

Bestimmung des Schwerpunktes von einem Kugelausschnitte. Der genannte Körper sei durch **AOBD** (Fig. 102) in der Seitenansicht dargestellt; **G** sei sein Schwerpunkt und dessen Abstand **GO** vom Mittelpunkte soll bestimmt werden.

Bekanntlich läßt sich jeder Kugelausschnitt als den Inbegriff einer unendlichen Anzahl von Pyramiden betrachten, deren Grundflächen unendlich kleine Theile der zugehörigen Calotte sind, und deren Spitzen im Mittelpunkte der Kugel zusammenfallen. Alle diese Pyramiden haben den Kugelhalbmesser zur Höhe und ihre Schwerpunkte sind um $\frac{3}{4}$ des genannten Halbmessers von jenem Mittelpunkte entfernt. Sie liegen folglich in einer Calotte, die mit einem Halbmesser gleich drei Viertel des zum Ausschnitt gehörigen Halbmessers beschrieben werden kann, und der Schwerpunkt dieser Calotte ist daher mit dem Schwerpunkte des Kugelausschnittes identisch.

Hiernach ist es sehr leicht, den fraglichen Schwerpunkt des in Rede befindlichen Körpers **AOBD** durch Construction zu bestimmen. Man beschreibe nämlich innerhalb desselben mit $OA' = \frac{3}{4}OA$ als Halbmesser die Calotte **A'D'B'** und halbire deren Höhe **C'D'** in **G**, so ist dies nach §. 148 der verlangte Schwerpunkt.

Will man den Schwerpunkts-Abstand $GO = z$ vom Mittelpunkte berechnen, so hat man nach der Construction

$$z = \tfrac{1}{2}(OC' + OD').$$

Man setze den gegebenen Kugelhalbmesser $OA = OD = r$, die Höhe der zum Ausschnitt gehörigen Calotte $CD = h$, so ist $OC' = \frac{3}{4}OC = \frac{3}{4}(r - h)$ und $OD' = \frac{3}{4}r$; daher

$$(1) \qquad z = \tfrac{3}{8}(2r - h).$$

Bezeichnet a den zur Kreisebene AB gehörigen Halbmesser, so ist nach der Gleichung des Kreises $a^2 = 2rh - h^2$. Hieraus $2r - h$ entwickelt und in (1) substituirt, giebt

$$(2) \qquad z = \frac{3a^2}{8h}.$$

§. 158.

Schwerpunkt einer körperlichen Kugelzone. Von der in der Seitenansicht ABED (Fig. 103) dargestellten Kugelzone seien die Halbmesser der unteren und oberen Grundebene, nämlich $CA = CB = a$, $FD = FE = b$, und die Höhe $CF = h$ gegeben. Der zu bestimmende Abstand des Schwerpunktes von der unteren Grundebene AB werde mit z bezeichnet.

Man denke sich die Zone zur Halbkugel VSW ergänzt, und um diese einen Cylinder TVWU beschrieben, der mit ihr einerlei Grundfläche und Höhe hat. Verbreitet man dann die Kreisebenen AB und DE bis HK und OP, so ist der körperliche Inhalt der Zone ABDE gleich dem Unterschiede zwischen dem Cylinder HKPO und dem abgekürzten Kegel QLNR. Mithin ist auch das Moment jenes gegebenen Körpers gleich der Differenz der Momente dieser beiden.

Bezeichnet nun r den Halbmesser der zur Zone gehörigen Kugel, so ist der Inhalt des Cylinders $HKPO = \pi r^2 h$, der Abstand seines Schwerpunktes von der Grundfläche AB ist $= \frac{1}{2}h$; folglich sein Moment

$$\tfrac{1}{2}h \cdot \pi r^2 h = \tfrac{1}{12}h^2 \pi \cdot 6r^2.$$

Der Inhalt des abgekürzten Kegels QLNR ist gleich $\frac{1}{3}\pi h\,(CL^2 + FQ^2 + CL \cdot FQ)$, der Abstand seines Schwerpunktes von der Grundfläche AB nach §. 155 (3) gleich $\frac{h}{4} \cdot \frac{CL^2 + 3 \cdot FQ^2 + 2 \cdot CL \cdot FQ}{CL^2 + FQ^2 + CL \cdot FQ}$; daher ergiebt sich das Moment in Bezug auf die Ebene AB gleich

$$\tfrac{1}{12}h^2\pi(CL^2+3\cdot FQ^2+2\cdot CL\cdot FQ).$$

Nun ist aber $CL = CM$, $FQ = FM$, und wenn man $CM = x$ setzt, so hat man auch $CL = x$ und $FQ = h+x$. Diese Werthe in den letzten Ausdruck gesetzt, liefern nach gehöriger Reduction

$$\tfrac{1}{12}h^2\pi(6x^2+8hx+3h^2).$$

Subtrahirt man nun dies Moment von dem des Cylinders, so erhält man folgenden Ausdruck für das Moment der Zone in Bezug auf ihre untere Grundfläche:

$$\tfrac{1}{12}h^2\pi[6(r^2-x^2)-8hx-3h^2].$$

Um hieraus x zu eliminiren, ziehe man die Kugelhalbmesser MA und MD, so lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$r^2 = a^2+x^2;\quad r^2 = b^2+(h+x)^2.$$

Die erste von diesen Gleichungen liefert $r^2-x^2 = a^2$, und durch die Verbindung beider mit einander ergiebt sich $2hx = a^2-b^2-h^2$. Werden diese beiden Werthe in dem so eben gefundenen Ausdrucke für das Moment der Zone substituirt, so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$\tfrac{1}{12}h^2\pi(2a^2+3b^2+h^2).$$

Der körperliche Inhalt der Zone ist aber gleich

$$\tfrac{1}{6}h\pi(3a^2+4b^2+h^2),$$

und wenn man damit das vorhergehende Moment dividirt, so findet man den gesuchten Abstand z des Schwerpunktes von der Grundfläche der Zone, nämlich

$$z = \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{2a^2+4b^2+h^2}{3a^2+3b^2+h^2}.$$

§. 159.

Schwerpunkt des Kugelabschnittes und der Halbkugel. 1) Läßt man den Parallelkreis DE (Fig. 103) allmälig nach S zu fortrücken, bis er zuletzt in diesem Punkte verschwindet, so verwandelt sich die im vorigen Paragraphen

betrachtete Kugelzone ABED in einen Kugelabschnitt ABS. Der Schwerpunkts-Abstand dieses Körpers von dessen Grundfläche AB wird daher gefunden, indem man in der letzten Formel des vorigen Paragraphen den Halbmesser b des Kreises DE gleich Null setzt, und h als die Höhe CS des Abschnittes annimmt. Dadurch entsteht

$$z = \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{2a^2 + h^2}{3a^2 + h^2}.$$

Diese Formel hätte man auch unabhängig von der vorigen finden können, nämlich dadurch, daß man das Moment des Kugelabschnittes ABS, dessen Inhalt gleich der Differenz der Inhalte des Cylinders THKU und des Kegels TLNU ist, als die Differenz der Momente der beiden letztgenannten Körper berechnet, und dann dasselbe durch den Inhalt des Abschnittes dividirt.

2) Der Kugelabschnitt ABS wird zur Halbkugel VWS, wenn der Parallelkreis AB nach M zu so lange fortrückt, bis er zuletzt mit dem größten Kugelkreise VW zusammenfällt. Alsdann ist a = r und h = r geworden, und mit Rücksicht hierauf giebt also die obige Formel

$$z = \tfrac{3}{8}r.$$

so daß also die Entfernung des Schwerpunktes der Halbkugel von der sie begrenzenden Kreisebene drei Achtel ihres Halbmessers beträgt.

§. 160.

Allgemeine Schwerpunkts-Bestimmung für die am häufigsten vorkommenden Körper. In dem V. Abschnitt des Anhanges ist gezeigt worden, wie man die Inhaltsbestimmung beliebiger Körper durch das Austragen ihrer Scala auf eine Quadratur ebener Flächen zurückführen kann. Dasselbe Verfahren läßt sich auch auf die Bestimmung

des Schwerpunktes der Körper anwenden, wobei von folgendem Grundgesetze ausgegangen werden muß:

Es stelle **BCED** (Fig. 104) einen beliebigen Körper vor, der an beiden Enden durch die parallelen Ebenen **BC**, **DE** begrenzt ist, und **AX** sei der normale Abstand zwischen diesen beiden Endflächen. Man denke sich diesen Körper durch beliebig viele mit den Endflächen parallele Ebenen, von welchen **FG** eine vorstellen mag, geschnitten, und trage die Flächeninhalte der dadurch erhaltenen Querschnitte auf der mit **AX** parallelen und gleichen Linie **MP** als Ordinaten auf, so bestimmen dieselben eine Curve **NSQ**, welche bekanntlich die Scala des Körpers genannt wird. In Nr. 67 des Anh. ist nämlich gezeigt worden, daß der Kubikinhalt des Körpers **BCED** durch dieselbe Zahl wie der Flächeninhalt der von der Scala begrenzten Figur **MNQP** ausgedrückt wird.

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich darthun, daß auch das Moment des Körpers in Bezug auf eine seiner Endflächen, etwa **BC**, denselben Zahlenwerth hat, wie das Moment jener Figur in Bezug auf die der Fläche **BC** entsprechende Ordinate **MN**. Dies zu beweisen, ist so einfach, daß die weitere Ausführung hier überflüssig erscheinen dürfte. — Daraus folgt aber sofort, daß der Schwerpunkts-Abstand des Körpers von der Endfläche **BC** dieselbe Größe hat, wie der Schwerpunkts-Abstand der von der zugehörigen Scala begrenzten Figur von deren ersten Ordinate **MN**.

§. 161.

Mit Hülfe der vorstehenden Grundgesetze ist es nun in den meisten Fällen sehr leicht, den Schwerpunkt eines gegebenen Körpers zu bestimmen, entweder genau, wenn sich dies für die von seiner Scala begrenzten Fläche thun läßt, oder näherungsweise, wenn dies nicht angeht. Im letztern Falle

kann man dann die in §. 142 entwickelte Näherungsformel anwenden, indem man den Abstand **AX** zwischen den parallelen Endflächen **BC** und **DE** (Fig 104) in eine gerade Anzahl (= 2n) gleicher Theile b theilt, durch die Theilpunkte parallele Durchschnitte legt, und deren Inhalte, einschließlich der beiden Endflächen, nach der Reihe mit f_1, f_2, f_3, $\cdots f_{2n}$, f_{2n+1} bezeichnet. Alsdann wird der Schwerpunkts-Abstand des Körpers von der Endfläche f_1 näherungsweise durch die Formel ausgedrückt:

$$(I)\quad z = b\cdot\frac{0\cdot f_1 + 1\cdot 4f_2 + 2\cdot 2f_3 + 3\cdot 4f_4 + \cdots + (2n-1)\cdot 4f_{2n} + 2n\cdot f_{2n+1}}{f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + \cdots\cdots + 4f_{2n} + f_{2n+1}}.$$

Eine genaue Bestimmung des Schwerpunktes, und zwar durch eine und dieselbe Formel, findet aber fast bei allen denjenigen Körpern statt, die dem Praktiker am häufigsten vorkommen, da dieselben zur Scala eine gewöhnliche Parabel haben, und der Schwerpunkt der von dieser Curve begrenzten Fläche nach §. 141 bestimmt werden kann. Dahin gehören, wie man im Anhange ausführlich nachgewiesen findet, alle pyramidalischen und kegelförmigen, so wie alle zur Gattung der Obelisken gehörigen Körper, ferner die Rotationskörper, deren erzeugende Flächen von Linien des zweiten Grades begrenzt sind, und wobei auch die Kugel als besonderer Fall mit einbegriffen ist.

Denkt man sich nun aus einem Körper der oben genannten Art mittelst zweier paralleler Ebenen eine Zone geschnitten, welche in Figur 104 durch **BCED** dargestellt sein mag, so ist die zugehörige Scale **NSQ** ein Bogen einer gewöhnlichen Parabel, deren Achse auf der Verlängerung von **MP** senkrecht steht, und der Schwerpunkt des paraboliſchen Trapezes **MNQP** kann daher durch die in §. 141 gefundene Formel (1) bestimmt werden.

Bezeichnen nämlich f und f′ die Inhalte der parallelen Endflächen **BC** und **DE**, also auch die Werthe der entspre-

chenden Ordinaten MN, PQ, deren Abstand von einander = h sein mag, und ist φ der Inhalt der mittleren Durchschnittsfläche FG, also auch die Länge der Mittellinie RS des parabol. Trapezes, so hat man für den Abstand seines Schwerpunktes von der Ordinate MN, also auch für den Schwerpunkts-Abstand des Körpers von dessen Endfläche BC, die Formel

$$\text{(II)} \qquad z = h \cdot \frac{2\varphi + f'}{f + 4\varphi + f'}.$$

Ist ins Besondere von Umdrehungskörpern die Rede, für welche also die Flächen f, f' und φ Kreise von den Halbmessern r, r' und ϱ sind, dann ist $f = \pi r^2$, $f' = \pi r'^2$ und $\varphi = \pi \varrho^2$; folglich entsteht

$$\text{(III)} \qquad z = h \cdot \frac{2\varrho^2 + r'^2}{r^2 + 4\varrho^2 + r'^2}.$$

Anmerk. Die beiden letzten Formeln findet man schon in der ersten Auflage dieses Werkes vom Jahre 1831 als allgemein gültig hingestellt, jedoch ohne Beweis. Das hier, und namentlich im V. Abschnitt des Anhanges, über den fraglichen Gegenstand Vorgetragene ist dem Verfasser eigenthümlich und von demselben zuerst in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band XXV., veröffentlicht worden.

§. 162.

Anwendung obiger Schwerpunkts-Formeln auf verschiedene Körper.

1) Abgekürzte Pyramiden. Es seien wie §. 155 a und b die beiden Grundflächen, h die Höhe des Körpers und z der Abstand seines Schwerpunktes von der Fläche a. Für den mittleren Durchschnitt φ des in Rede befindlichen Körpers hat man bekanntlich (conf. Nr. 73 des Anh.) die Gleichung $2\sqrt{\varphi} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, also $\varphi = \frac{1}{4}(a + b + 2\sqrt{ab})$. Dies in Formel (II) des vor. §. substituirt, liefert:

$$z = \frac{h}{4} \cdot \frac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}.$$

2) Obelisken. Von einem vierkantigen Obelisken seien die parallelen Endflächen f, f' Parallelogramme mit den Seiten a, b und a', b', und mit dem zwischen liegenden Winkel α; dann hat man $f = ab \cdot \sin\alpha$, $f' = a'b' \cdot \sin\alpha$ und $\varphi = \frac{1}{4}(a+a')(b+b') \cdot \sin\alpha$. Ist nun h die Höhe des Körpers, z der Abstand seines Schwerpunktes von der Endfläche f, so ergiebt sich nach (I) des vor. §.

$$x = \frac{h}{2} \cdot \frac{ab + ab' + a'b + 3a'b'}{2ab + ab' + a'b + 2a'b'}.$$

3) Kugelzonen. Behält man die in §. 158 angenommene Bezeichnung bei, so ergiebt sich der Halbmesser des mittleren Durchschnitts der Zone (nach Anh. 74. 3) durch $4\varrho^2 = 2a^2 + 2b^2 + h^2$. Zur Schwerpunkts-Bestimmung kommt nun die Formel (III) des vor. §. in Anwendung, indem man $r = a$, $r' = b$ setzt. Danach entsteht:

$$z = \frac{h}{2} \cdot \frac{2a^2 + 4b^2 + h^2}{3a^2 + 3b^2 + h^2}.$$

4) Zone eines Paraboloids. Dreht sich das parabolische Trapez EBMK (Fig. 92) um die Abscissenachse AX, so beschreibt es die körperliche Zone, deren parallele Grundflächen, nach der in der Figur angedeuteten Bezeichnung, die Ordinaten q und q' zu Halbmessern haben. Der Halbmesser ϱ der mittleren Durchschnittsfläche ist die Ordinate zur Abscisse $\frac{1}{2}(p+p')$; also $\varrho^2 = \frac{1}{2}a(p+p') = \frac{1}{2}(q^2+q'^2)$, während die Höhe BM der Zone $h = p - p'$ ist. Mit Rücksicht hierauf giebt nun die Formel (III) des vor. §. für den Schwerpunkts-Abstand der Zone von der Endfläche πq^2 den Ausdruck

$$z = \frac{h}{3} \cdot \frac{q^2 + 2q'^2}{q^2 + q'^2} = \frac{p - p'}{3} \cdot \frac{p + 2p'}{p + p'}.$$

Der Schwerpunkts-Abstand des Conoides, welches durch

Drehung der Parabelfläche ABC um die Abſciſſenachſe AX entſteht, von der durch BC beſchriebenen Kreisfläche wird erhalten, wenn man in obiger Formel p', und alſo auch q', gleich Null ſetzt. Dadurch ergiebt ſich derſelbe $= \frac{1}{3}p$; d. h. der fragliche Schwerpunkt liegt auf zwei Drittheil der Höhe AB vom Gipfel entfernt.

Anm. Von dem Körper, der durch Drehung der Fläche ACD um die Achſe AY entſteht, läßt ſich der Schwerpunkt nicht nach der im vor. § dargeſtellten Methode beſtimmen, weil ſeine Scala keine Parabel, ſondern eine Linie der vierten Ordnung iſt. Auf S. 145 des Anh. iſt der kubiſche Inhalt des fraglichen Körpers, mit Rückſicht auf die hier angenommene Bezeichnung, $k = \frac{1}{3}\pi p^2 \cdot q$ gefunden worden. Beſtimmt man nach derſelben Methode das Moment der körperlichen Schicht, die von dem Streifen knwh (Fig. 15. auf Taf. II. des Anh.) bei der Drehung um AY beſchrieben wird, ſo findet man dafür

$$M_m = \frac{\pi t}{a^2} \cdot AR^5 = \frac{\pi t^6}{32 \cdot a^2} \cdot (2m-1)^5.$$

Dieſen Ausdruck von $m = 1$ bis $m = n$ ſummirt [nach Anh. 9. (2)], liefert das Moment des ganzen Körpers in Bezug auf den Gipfel A als Momentenpunkt gleich

$$M = \frac{\pi t^6}{32 \cdot a^2} \cdot \Sigma_1^n (2m-1)^5 = \frac{\pi t^6}{32 \cdot a^2} \cdot \frac{2^5 \cdot n^6}{6}.$$

Im vorliegenden Falle iſt nun $nt = AD = q$, und nach der Gleichung der Parabel hat man $y^4 = a^2x^2$; daher entſteht

$$M = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{q^6}{a^2} = \frac{1}{3}\pi p^2 q^2,$$

Dividirt man dies Moment durch den Inhalt $k = \frac{1}{3}\pi p^2 q$, ſo findet man den geſuchten Abſtand des Schwerpunktes

$$z = \frac{1}{2}q,$$

ſo daß derſelbe alſo auf fünf Sechstheil der Achſe AD liegt.

5) Zone eines Ellipſoids. Dreht ſich der elliptiſche Quadrant ACB (Fig. 105) um die Halbachſe AC, ſo beſchreibt die trapezförmige Fläche DEGF eine körperliche Zone, deren begrenzende Kreisflächen die Ordinaten $DE = q$ und $FG = q'$ zu Halbmeſſern haben. Die Höhe dieſer Zone ſei $DF = h$, und der Abſtand z ihres Schwerpunktes von der durch DE beſchriebenen Kreisfläche ſoll beſtimmt werden.

Man setze $CD = p$, so ist $CF = p + h$, und für $DP = FP$ ist $CP = p + \frac{1}{2}h$; daher:

$$q^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - p^2);\quad q'^2 = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (p+h)^2];\quad \varrho^2 = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (p+\tfrac{1}{2}h)^2].$$

Subtrahirt man die zweite und dritte Gleichung von der ersten, so kömmt:

$$q^2 - q'^2 = \frac{b^2 h}{a^2}(2p + h);\quad q^2 - \varrho^2 = \frac{b^2 h}{4a^2}(4p + h);$$

und indem man zwischen diesen beiden Gleichungen p eliminirt, demnächst aber ϱ^2 entwickelt, findet man:

$$\varrho^2 = \frac{2a^2(q^2 + q'^2) + b^2h^2}{4a^2}.$$

Nach Formel (III) des vorigen §. hat man nun für den fraglichen Abstand

$$z = h\,\frac{2\varrho^2 + q'^2}{q^2 + 4\varrho^2 + q'^2},$$

welcher Ausdruck sich nach Einsetzung des Werthes von ϱ^2 in folgenden verwandelt:

$$\text{(I)}\qquad z = \frac{h}{2}\cdot\frac{2a^2(q^2 + 2q'^2) + b^2h^2}{3a^2(q^2 + q'^2) + b^2h^2}.$$

Den Schwerpunkts-Abstand des, durch die elliptische Fläche AED erzeugten, Conoides findet man aus vorstehender Formel, indem man darin $q' = 0$ und $AD = h$ setzt. So entsteht

$$z = \frac{h}{2}\cdot\frac{2a^2q^2 + b^2h^2}{3a^2q^2 + b^2h^2}.$$

Setzt man aber $q = b$ und $h = a$, so ergiebt sich $z = \frac{3}{8}a$ als Schwerpunkts-Abstand des, durch Drehung des Quadranten ACB um die Halbachse AC entstandenen, Ellipsoides von dem Mittelpunkte des letztern.

Dreht sich der elliptische Quadrant um die Halbachse BC, so beschreibt die Trapezfläche HEGI ebenfalls eine kör-

perliche Zone, für welche sich der Schwerpunkts-Abstand von der durch HE beschriebenen Kreisfläche durch die Formel findet

$$\text{(II)} \qquad z' = \frac{h'}{2} \cdot \frac{2b^2(p^2 + 2p'^2) + a^2h'^2}{3b^2(p^2 + p'^2) + a^2h'^2}.$$

Dieselbe giebt für $p = 0$ den Schwerpunkts-Abstand des Conoides, welches durch Drehung der elliptischen Fläche BGI um BC als Achse entsteht, von dem Gipfel B desselben. Es entsteht nämlich

$$z' = \frac{h'}{2} \cdot \frac{4b^2p'^2 + a^2h'^2}{3b^2p'^2 + a^2h'^2}.$$

Setzt man darin $p' = a$ und $h' = b$, so ergiebt sich für das, durch Drehung des Quadranten um die Halbachse BC entstandene, Conoid der Schwerpunkts-Abstand vom Gipfel B dieses Körpers, oder $z' = \frac{5}{8}b$.

6) Zone des Hyperboloides. Es stelle CAD (Fig. 106) den einen Zweig einer Hyperbel, O deren Mittelpunkt vor; OX und YY' sollen die Achsen der beiden entgegengesetzten Hyperbeln sein.

Dreht sich die Curve um die erste Achse, so entsteht bekanntlich das sogenannte zweiastige Hyperboloid, und die trapezförmige Fläche FEBC beschreibt eine Zone desselben, deren parallele Endflächen CD, FG, Kreise von den Halbmessern q und q' sind. Bezeichnet ϱ den Halbmesser der mittleren Durchschnittsfläche, h die Höhe EB der Zone, so ist nach Formel III des vor. §.

$$z = h \cdot \frac{2\varrho^2 + q^2}{q'^2 + 4\varrho^2 + q^2}$$

der Schwerpunkts-Abstand der Zone von der Endfläche FG.

Zu den Ordinaten q, q' und ϱ gehören die Abscissen p, $p - h$ und $p - \frac{1}{2}h$; daher hat man

$$q^2 = \frac{b^2}{a^2}(p^2 - a^2); \quad q'^2 = \frac{b^2}{a^2}[(p-h)^2 - a^2]; \quad \varrho^2 = \frac{b^2}{a^2}[(p - \tfrac{1}{2}h)^2 - a^2].$$

Behandelt man diese Gleichungen auf dieselbe Weise wie bei der vorigen Aufgabe, so findet man

$$\varrho^2 = \frac{2a^2(q^2+q'^2)-b^2h^2}{4a^2};$$

und wenn dies in der obigen Formel eingesetzt wird, so entsteht:

$$\text{(I)} \qquad z = \frac{h}{2}\cdot\frac{2a^2(2q^2+q'^2)-b^2h^2}{3a^2(q^2+q'^2)-b^2h^2}.$$

Für das hyperbolische Conoid CAD, welches durch Drehung der Fläche ABC entsteht, ist $q' = 0$ und $h = AB$; der Abstand seines Schwerpunktes vom Gipfel A also

$$z = \frac{h}{2}\cdot\frac{4a^2q^2-b^2h^2}{3a^2q^2-b^2h^2}.$$

Läßt man eine Drehung der Hyperpel um die Achse YY' geschehen, so beschreibt die zwischen dieser Achse und der Curve enthaltene Fläche IFADH eine Zone des einaſtigen Hyperboloides, dessen parallele Endflächen Kreise von den Halbmessern HD = p und JF = p' sind, und dessen Schwerpunkt in der Achse HJ liegt. Zur Bestimmung seines Abstandes von dem Punkte H dient die Formel

$$z = h\cdot\frac{2\varrho^2+p'^2}{p^2+4\varrho^2+p'^2},$$

worin h die Höhe HJ der Zone und ϱ den Halbmesser MN ihrer mittleren Durchschnittsfläche bedeutet. Letzterer ist, wie leicht aus der Figur erhellet, die Abscisse zur Ordinate $= q - \frac{1}{2}h$, während zur Abscisse p' die Ordinate $q' = h - q$ gehört. Daher hat man nach einander:

$$p^2=\frac{a^2}{b^2}(q^2+b^2);\ p'^2=\frac{a^2}{b^2}[(h-q)^2+b^2];\ \varrho^2=\frac{a^2}{b^2}[(q-\tfrac{1}{2}h)^2+b^2],$$

woraus sich ferner leicht findet:

$$p^2-p'^2 = \frac{a^2h}{b^2}(2q-h);\quad p^2-\varrho^2 = \frac{a^2h}{4b^2}(4q-h).$$

Elliminirt man zwischen diesen Gleichungen q und entwickelt ϱ^2, so kommt

$$\varrho^2 = \frac{2b^2(p^2 + p'^2) - a^2h^2}{4b^2}.$$

Dieser Ausdruck in obiger Formel eingesetzt, giebt demnächst

$$\text{(II)} \qquad z = \frac{h}{2} \cdot \frac{2b^2(p^2 + 2p'^2) - a^2h^2}{3b^2(p^2 + p'^2) - a^2h^2}.$$

Von dem durch die Fläche OADH erzeugten Körper findet man den Schwerpunkts-Abstand vom Mittelpunkt H seiner Grundfläche, indem man in obiger Formel $p' = a$ und $h = OH$ setzt; nämlich

$$z = \frac{h}{2} \cdot \frac{2b^2(p^2 + 2a^2) - a^2h^2}{3b^2(p^2 + a^2) - a^2h^2}.$$

§. 163.

Praktisches Verfahren zur Bestimmung des Schwerpunktes von ganz unregelmäßigen Körpern. Es kommt im Maschinenwesen häufig vor, daß man von Körpern, die zu gewissen Zwecken (z. B. als Hebel) benutzt werden sollen, den Schwerpunkt möglichst genau kennen muß, um danach die beabsichtigte Wirkung gehörig beurtheilen zu können. Zu diesem Ende könnte man die Lage des Schwerpunktes dadurch ausmitteln, daß man den Körper auf ein festes Unterlager, welches oben scharfkantig ausläuft, so lange balancirt, bis er darauf im Gleichgewichte bleibt. Aber dieses Verfahren ist nicht so zweckmäßig und gewährt auch nicht die Genauigkeit wie folgendes:

Es stelle AB (Fig. 107) den gegebenen Körper in der Seitenansicht vor, von welchem der Abstand $BG = x$ des Schwerpunktes G von dem Ende B bestimmt werden soll. Man unterstütze das eine Ende A des Körpers durch ein scharfkantiges Unterlager, so daß er sich um die obere Kante desselben, wie um eine feste Achse, frei auf und ab drehen

kann; alsdann bringe man seine Achse **AB** in horizontale Lage, befestige in ihrem Endpunkte **B** das eine Ende einer vollkommen biegsamen Schnur **BCD**, welche lothrecht aufwärts über die Leitrolle **C** geleitet, und an deren herabhängendem Ende **CD** eine Wagschaale **D** angebracht wird. In diese Schaale lege man so lange Gewichte, bis dadurch der Körper in horizontaler Lage seiner Achse **AB** ins Gleichgewicht kommt.

Bezeichnet nun l die Länge und Q das eigene Gewicht des gegebenen Körpers, welches letztere als eine vertikale Kraft in seinem Schwerpunkte vereinigt gedacht werden kann, und repräsentirt P das Gewicht der Wagschaale mit Einschluß der hineingelegten Gewichte, so hat man, in Bezug auf die Drehachse bei A, die Momenten-Gleichung:

$$Q \cdot AG = P \cdot AB; \quad \text{oder } Q(l-x) = Pl.$$

Hieraus ergiebt sich $x = \frac{l(Q-P)}{Q}$.

Beispiel. Ist $Q = 50$ ℔.; $P = 30$ ℔ und $l = 6$ Fuß gegeben, so findet man den Schwerpunkts-Abstand $x = 2{,}4$ Fuß.

V. Anwendungen der Lehre vom Schwerpunkte.

§. 164.

Guldin'sche Regel. Die von Pappus entdeckte und von dem Jesuiten, Pater Guldin, zuerst in Anwendung gebrachte Methode, jetzt unter dem Namen „Guldin'sche Regel" bekannt, besteht in einem Verfahren, den Inhalt von Oberflächen oder Körpern, die durch Umdrehung von beliebigen Curven oder Flächen um feste Achsen erzeugt sind, vermittelst der Schwerpunkte der erzeugenden Figuren zu bestimmen. Die Regel lautet:

„Dreht sich irgend eine krumme oder gerade Linie um „eine unbewegliche Achse, die mit ihr in derselben Ebene

„liegt, so beschreibt sie eine Oberfläche, deren Inhalt gleich „ist der Länge der erzeugenden Linie multiplicirt mit dem „Wege, den ihr Schwerpunkt beschreibt."

Eben so ist: „der Inhalt des Körpers, welcher durch „Drehung einer beliebigen ebenen Fläche um eine feste, in „ihrer Ebene liegenden Achse entsteht, gleich dem Produkte „aus dem Flächeninhalt der erzeugenden Figur in den Weg „ihres Schwerpunktes."

In beiden Fällen ist der Weg des Schwerpunktes der Erzeugenden entweder eine vollständige Kreisperipherie, oder ein Kreisbogen, und der zugehörige Halbmesser ist dem Abstande des bewegten Schwerpunktes von der Drehachse gleich. Diese Regel kann in manchen Fällen mit Nutzen in Anwendung gebracht werden, daher soll zuerst der Beweis davon gegeben werden.

§. 165.

Beweis der Guldin'schen Regel für Oberflächen. Es sei **AB** (Fig. 108) eine beliebige krumme Linie, welche sich um die unbewegliche Achse **XY** dreht, wobei die Entfernungen ihrer Punkte von dieser Achse stets dieselben bleiben. Man denke sich die genannte Linie in eine beliebige Anzahl Stücke getheilt, die man so klein annehmen kann, daß sie als geradlinig betrachtet werden können; alsdann beschreibt jedes einzelne Stück entweder einen Cylindermantel, wenn es der Achse parallel ist, oder den Mantel eines abgekürzten Kegels, wenn es derselben nicht parallel ist. Die Summe der, von den Stücken beschriebenen, Zonen giebt aber jedesmal die ganze, von der krummen Linie erzeugte Oberfläche.

Für ein beliebiges Stück $vw = s$ seien vv', ww' die Abstände seiner Endpunkte, und σ sei der Abstand seines Schwerpunktes von der Achse. Der abgekürzte Kegelmantel, welcher von vw beschrieben wird, drückt sich aus durch

$$\pi \cdot vw(vv' + ww') = \pi s \cdot 2\sigma,$$

weil der Schwerpunkt von vw in der Mitte seiner Länge liegt, und daher $vv' + ww' = 2\sigma$ ist. Was nun hier von einem beliebigen der Curvenelemente erwiesen ist, gilt eben so von allen übrigen. Sind daher a, b, c... ꝛc. die Längen der geradlinigen Elemente, α, β, γ... ꝛc. die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Drehachse, so geben die Ausdrücke $a \cdot 2\pi\alpha$, $b \cdot 2\pi\beta$, $c \cdot 2\pi\gamma$... ꝛc. die Inhalte der von jenen Elementen beschriebenen Mantelflächen, und wenn man dieselben addirt, so erhält man den Inhalt F der Oberfläche, welche von der ganzen Curve AB erzeugt wird, nämlich

$$F = 2\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots \text{ꝛc.}) = 2\pi \cdot \Sigma a\alpha,$$

Bekannten Lehren der Statik gemäß ist nun in Bezug auf jede Achse das statische Moment einer Linie gleich der Summe der Momente aller ihrer Theile. Wenn also im vorliegenden Falle l die rectificirte Länge der Curve AB, und z den Abstand ihres Schwerpunktes G von der Achse XY bezeichnet, so ist $lz = \Sigma a\alpha$. — Substituirt man dies in der vorigen Gleichung, so ergiebt sich, der Guldin'schen Regel entsprechend, die Gleichung:

$$F = l \cdot 2\pi z.$$

Beispiel. Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser als Achse, so beschreibt der zugehörige Bogen die Oberfläche einer Kugel, deren Inhalt sich, zufolge der Guldin'schen Regel und mit Rücksicht auf §. 124 Beisp. 3. folgendergestalt ergiebt:

$$F = \pi r \cdot 2\frac{2r}{\pi} \cdot \pi = 4\pi r^2.$$

§. 166.

Beweis der Guldin'schen Regel für Rotationskörper. Dieses Gesetz soll zuerst für einen Körper, dessen Erzeugungsfläche ein ebenes Dreieck ist, und demnächst für eine beliebige ebene Figur als Erzeugungsfläche bewiesen werden.

1) Dreht sich das Dreieck ABC (Fig. 109) um die in dessen Ebene befindliche Achse XY, so beschreibt es einen Körper, dessen Inhalt auf folgende Art gefunden werden kann.

Man denke sich aus den Eckpunkten des Dreiecks die Perpendikel AA', BB', CC' auf die Achse gefällt, bezeichne die Längen derselben bezüglich mit a, b, c, und setze die Abstände A'B' = x, A'C' = y. Offenbar erhält man nun den Inhalt K des vom Dreieck ABC beschriebenen Körpers, indem man die abgekürzten Kegel, welche von den Trapezen AA'B'B und AA'C'C beschrieben werden, addirt und von der Summe den durch das Trapez BB'C'C beschriebenen Körper subtrahirt. Demgemäß ergiebt sich der fragliche Inhalt gleich

$$\tfrac{1}{3}\pi x(a^2+b^2+ab)+\tfrac{1}{3}\pi y(a^2+c^2+ac)-\tfrac{1}{3}\pi(x+y)(b^2+c^2+bc);$$

oder, wenn dies gehörig reducirt wird,

$$K = \tfrac{1}{3}\pi(a+b+c)\,[(a-c)x+(a-b)y].$$

Nach §. 129 ist nun $z = \frac{1}{3}(a+b+c)$ der Ausdruck für den Schwerpunkts-Abstand GG' des gegebenen Dreiecks von der Achse XY, während $F = \frac{1}{2}[(a-c)x+(a-b)y]$ den Inhalt dieses Dreiecks ausdrückt. Letzteres ergiebt sich sehr leicht, indem man von der Summe der beiden Trapeze AA'B'B und AA'C'C das Trapez BB'C'C abzieht. Substituirt man diese Größen im obigen Ausdrucke von K, so erhält man, der Guldinschen Regel entsprechend,

$$K = 2\pi z \cdot F.$$

2) Es stelle nun PQ (Fig. 110) eine ganz beliebige Fläche vor, welche sich um die in ihrer Ebene liegende feste Achse XY dreht, indem sie fortwährend dieselbe Lage gegen diese Achse beibehält, und G sei ihr Schwerpunkt.

Man denke sich den Umfang der Figur in eine beliebige Anzahl solcher Theile getheilt, die man so klein annehmen kann, daß sie ohne merklichen Fehler als geradlinig betrach-

tet werden können. Zieht man aus den Theilpunkten nach dem innerhalb gelegenen Punkte G gerade Linien, so wird dadurch die ganze Fläche PQ in lauter Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte nach der Reihe mit A, B, C, D...ꝛc. bezeichnet werden sollen. Eben so seien a, b, c, d...ꝛc. die Schwerpunkts-Abstände dieser Dreiecke von der Achse XY.

Die körperlichen Räume, welche von den genannten Dreiecken beschrieben werden, lassen sich nun nach dem so eben Bewiesenen durch $A \cdot 2a\pi$, $B \cdot 2b\pi$, $C \cdot 2c\pi$, $D \cdot 2d\pi$... u. s. w. ausdrücken, und die Summe dieser Räume giebt dann den Inhalt K des von der ganzen Fläche PQ beschriebenen Körpers, nämlich

$$K = 2\pi(Aa + Bb + Cc + Dd + \cdots \text{ꝛc.}).$$

Bezeichnet nun F den Inhalt der erzeugenden Fläche PQ, und z den Abstand GG' ihres Schwerpunktes von der Drehachse, so findet nach früheren Lehren die folgende Momentengleichung statt:

$$Fz = Aa + Bb + Cc + Dd + \cdots \text{ꝛc.}$$

Dies in der vorigen Gleichung eingesetzt, giebt

$$K = 2\pi z \cdot F,$$

eine Gleichung, welche die Guldin'sche Regel auch für Rotationskörper von beliebiger Gestalt darstellt.

Beispiel. Für einen Halbkreis, der sich um seinen Durchmesser als Achse dreht und dessen Fläche eine Kugel beschreibt, ist $F = \frac{1}{2}\pi r^2$, $z = \frac{4r}{3\pi}$ (§. 134); daher ergiebt sich der Inhalt der Kugel

$$K = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\frac{4r}{3\pi}\pi = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

§. 167.

Anwendung der Guldin'schen Regel zu Inhaltsbestimmungen. Außer den vorhergehenden Beispielen soll die Nützlichkeit des bewiesenen Gesetzes noch an folgenden Aufgaben erläutert werden:

1) In Fig. 111 sei ein Ring im Grundriß und Durchschnitt dargestellt, der aus einem gewöhnlichen vollen Cylinder gebogen ist. Um den kubischen Inhalt dieses Ringes zu berechnen, betrachte man denselben als einen Körper, der durch Drehung der Kreisfläche AE um die feste Achse C entstanden ist. Man setze den äußeren Durchmesser AB = D, den Durchmesser AE des erzeugenden Kreises = d, so ist der Flächeninhalt dieses Kreises = $\frac{1}{4}\pi d^2$, und der Abstand CG seines Schwerpunktes von der Achse ist = $\frac{1}{2}(D-d)$. Nach der Guldin'schen Regel erhält man also den kubischen Inhalt des Ringes,

$$K = \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\pi(D-d) = \frac{1}{4}\pi^2 d^2(D-d).$$

Zur Berechnung der gesammten Oberfläche F des Ringes kann dieselbe als durch Drehung des Kreisumfanges AE um die Achse C entstanden betrachtet werden. Die Länge der erzeugenden Curve ist dann = πd, und der Weg ihres Schwerpunktes = $2 \cdot \frac{1}{2}\pi(D-d)$; folglich erhält man, nach §. 165,

$$F = \pi^2 d(D-d).$$

2) Wenn sich eine ringförmige Fläche AB (Fig. 112), die zwischen zwei concentrischen Kreisen von den Durchmessern d und d' enthalten ist, um eine in ihrer Ebene liegende feste Achse C halb herum dreht, so beschreibt sie eine gebogene Röhre (Knieſtück), wie es zuweilen bei Pumpwerken, Röhrenleitungen u. dgl. vorkommt. Um hiervon den körperlichen Inhalt K zu bestimmen, setze man den äußeren Durchmesser des Knieſtückes AF = D; so ist die erzeugende Fläche = $\frac{1}{4}\pi(d^2-d'^2)$, der Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse = $\frac{1}{2}(D-d)$, und der Weg des Schwerpunktes (eine halbe Kreisperipherie) ist = $\frac{1}{2}\pi(D-d)$. Demnach findet man den körperlichen Inhalt des Knieſtückes

$$K = \frac{1}{8}\pi^2(d^2-d'^2)(D-d).$$

3) Will man von einem jonischen Säulenfuße (Fig. 113)

den Kubikinhalt ausmitteln, so lasse man zuerst die Wulste und die Einziehung unberücksichtigt, und berechne die Inhalte der beiden Cylinder, von denen der eine den Halbmesser a und die Höhe h, der andere aber den Halbmesser b und die Höhe k hat (siehe die Figur). Die Summe dieser Inhalte ist:

$$A = \pi a^2 h + \pi b^2 k = \pi(a^2 h + b^2 k).$$

Die beiden Wulste, welche um diese Cylinder herum liegen, können als Körper betrachtet werden, die durch Drehung von Halbkreisflächen um die mit ihren Durchmessern parallele Säulenachse entstanden sind. Dasselbe gilt von der Einziehung, die sich rings um den Säulenfuß zwischen den beiden Wulsten herumzieht. Für den oberen Wulst ist nun die erzeugende Fläche $= \frac{1}{2}\pi r^2$, der Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse $= a + \frac{4r}{3\pi}$; folglich der körperliche Inhalt, der Guldin'schen Regel gemäß,

$$B = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\left(a + \frac{4r}{3\pi}\right)\pi = \pi r^2(\pi a + \tfrac{4}{3}r).$$

Für die Einziehung ist die erzeugende Fläche $= \frac{1}{2}\pi\varrho^2$, der Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse $= a - \frac{4\varrho}{3\pi}$; folglich der körperliche Inhalt:

$$C = \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2 \cdot 2\left(a - \frac{4\varrho}{3\pi}\right)\pi = \pi\varrho^2(\pi a - \tfrac{4}{3}\varrho).$$

Für den unteren Wulst findet man auf demselben Wege den körperlichen Inhalt

$$D = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\left(b + \frac{4R}{3\pi}\right)\pi = \pi R^2(\pi b + \tfrac{4}{3}R).$$

Hat man auf diese Weise die Größen A, B, C und D berechnet, so ist der Kubikinhalt des ganzen Säulenfußes

$$K = A + B - C + D.$$

Auf ähnliche Weise läßt sich der Quadratinhalt der zugehörigen Oberfläche bestimmen.

4) Dreht sich die parabolische Fläche ACD (Fig. 92), um die zugehörige Achse AY, so beschreibt sie ein Conoid, dessen Inhalt S. 145 des Anh. stereometrisch bestimmt worden ist. Mit Hülfe der Guldin'schen Regel läßt sich diese Bestimmung weit einfacher leisten, und zwar folgendergestalt:

Nach §. 140 (2) ist der Inhalt der genannten Fläche $= \frac{1}{3}pq$; der Abstand ihres Schwerpunktes G' von der Achse $AY = \frac{3}{10}p$; daher ergiebt sich der kubische Inhalt des fraglichen Conoides

$$K = \frac{1}{3}pq \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{10}p = \frac{1}{5}\pi p^2 q.$$

5) Zusatz. In §. 164 ist bereits erwähnt worden, daß die Guldin'sche Regel nicht bloß für eine vollständige, sondern auch für eine theilweise Umdrehung der Erzeugenden gilt, so daß deren Schwerpunkt einen beliebigen Theil des Kreisumfanges beschreibt; nur muß die Drehachse mit der Erzeugenden jedesmal in einer und derselben Ebene liegen.

Wenn also eine ebene Figur vom Inhalt F sich um eine feste Achse so dreht, daß ihr Schwerpunkt einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunktswinkel in Bogenmaaß für den Halbmesser 1 gleich α ist, so drückt αz die Länge dieses Bogens aus, wofern z den Schwerpunkts-Abstand der Erzeugenden von der Drehachse bezeichnet. Der Inhalt des entstandenen Rotationskörpers ergiebt sich demgemäß durch die Formel

$$K = \alpha z \cdot F.$$

Da nun zF das statische Moment der Fläche F in Bezug auf die Drehachse darstellt, so kann man die Guldin'sche Regel auch folgendermaßen aussprechen:

Der kubische Inhalt eines, durch Drehung einer ebenen Fläche entstandenen, Körpers ist gleich

dem Produkt aus dem Bogenmaaße des Drehungswinkels in das stat. Moment der Erzeugenden.

In dieser Fassung gewährt die Guldin'sche Regel bei der praktischen Anwendung häufig eine wesentliche Erleichterung.

§. 168.

Anwendung der Guldin'schen Regel zu Schwerpunkts-Bestimmungen. Das in §. 166 bewiesene Gesetz stellt im Allgemeinen eine Gleichung dar, zwischen dem Inhalt einer ebenen Fläche, dem Abstande ihres Schwerpunktes von einer geraden Linie und dem Inhalte des Körpers, welcher durch Drehung jener Fläche um diese Linie entstanden ist. Jede von den genannten drei Größen kann aus der erwähnten Gleichung entwickelt werden, und somit läßt sich dieselbe auch zu Schwerpunkts-Bestimmungen ebener Flächen benutzen, was durch die folgenden Aufgaben näher erläutert werden soll.

1) Es stelle ABC (Fig. 114) den Quadranten einer Ellipse vor, von welchem $AC = a$ die halbe große, und $BC = b$ die halbe kleine Achse sein mag. G sei der Schwerpunkt dieses Quadranten, dessen normale Abstände GD und GE von den beiden Achsen bestimmt werden sollen.

Zu dem Ende denke man sich die Fläche ABC zuerst um AC und dann um BC ganz herumgedreht, so werden dadurch Körper beschrieben, deren Inhalte nach Nr. 74. 2 des Anh. bezüglich $= \frac{2}{3}\pi ab^2$ und $= \frac{2}{3}\pi a^2 b$ sind. Nach Anh. Nr. 50 ist aber der Quadratinhalt der erzeugenden Fläche $= \frac{1}{4}\pi ab$; folglich hat man, der Guldin'schen Regel gemäß,

$$\frac{1}{4}\pi ab \cdot 2\pi \cdot DG = \frac{2}{3}\pi ab^2;$$
$$\frac{1}{4}\pi ab \cdot 2\pi \cdot EG = \frac{2}{3}\pi a^2 b.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die gesuchten Abstände des Schwerpunktes folgendergestalt:

$$DG = \frac{4b}{3\pi}, \quad EG = \frac{4a}{3\pi}.$$

Durch Vergleichung dieſer Reſultate mit den in §. 134 Beiſpiel 2. gefundenen ergiebt ſich, daß der Schwerpunkts-Abſtand des elliptiſchen Quadranten von der großen Achſe dieſelbe Größe hat, wie der Abſtand des Schwerpunktes eines, mit der kleinen Halbachſe BC beſchriebenen, Kreisquadranten von derſelben Linie. Daſſelbe gilt von den Abſtänden der Schwerpunkte des elliptiſchen und eines, mit der großen Halbachſe AC beſchriebenen, Kreisquadranten von der kleinen Achſe.

2) Sei AD (Fig. 106) der Bogen einer Hyperbel, O der zugehörige Mittelpunkt, OX die Haupt-, OY' die Nebenachſe und OA = a. Denkt man ſich aus dem beliebigen Punkte D die Perpendikel DB = q und DH = p auf die genannten Achſen gefällt, ſo entſtehen die beiden hyperboliſchen Flächen ADB und OADH, deren Schwerpunkte hier beſtimmt werden ſollen.

Für die zuerſt genannte Hyperbelfläche mag P den Schwerpunkt vorſtellen, OQ = PR = x und PQ = y ſeien die Coordinaten deſſelben. Um letztere mit Hülfe der Guldin'ſchen Regel zu beſtimmen, muß man den Inhalt der Fläche ADB, ſo wie die Inhalte der von ihr bei der Drehung um OY' und OX beſchriebenen Körper kennen; beide können wir aber als bekannt vorausſetzen. Bezeichnet nämlich F jenen Flächeninhalt, ſo hat man nach Anh. Nr. 56 (5)

$$F = \tfrac{1}{2}\left(pq - ab \cdot \lg n \cdot \frac{aq + bp}{ab}\right).$$

Ferner iſt nach Anh. 74. 4, wenn K den Inhalt des, bei der Drehung um OX beſchriebenen Hyperboloids bezeichnet,

$$K = \frac{\pi b^2}{3a^2}(p + 2a)(p - a)^2,$$

während nach demſelben Citate der Inhalt des, von der Fläche OADH um die Achſe OY' beſchriebenen Körpers durch

$$\frac{\pi b^2}{3a^2} q(q^2+3b^2) = \tfrac{1}{3}\pi q(p^2+2a^2)$$

ausgedrückt wird. Subtrahirt man diesen Körper von dem, durch das Rechteck **OBDH** bei der erwähnten Drehung erzeugten Cylinder, so ergiebt sich der gesuchte Inhalt K' des ringförmigen Körpers, welcher **OY'** zur Achse und **ABD** zur Erzeugungsfläche hat, folgendergestalt:

$$K' = \pi p^2 q - \tfrac{1}{3}\pi q(p^2+2a^2) = \tfrac{2}{3}\pi q(p^2-a^2).$$

Gemäß der Guldin'schen Regel hat man nun die Gleichungen

$$2\pi x \cdot F = K' \text{ und } 2\pi y \cdot F = K;$$

also $$x = \frac{K'}{2\pi F} \quad \text{“} \quad y = \frac{K}{2\pi F}.$$

Substituirt man für F, K und K' die entsprechenden Werthe, so kommt

$$x = \frac{\frac{2}{3}q(p^2-a^2)}{pq-ab\cdot lgn\frac{aq+bp}{ab}}$$

$$y = \frac{b^2}{3a^2}\cdot\frac{(p+2a)(p-a)^2}{pq-ab\cdot lgn\frac{aq+bp}{ab}}$$

3) Auf ganz gleiche Weise ergeben sich die Schwerpunkts-Coordinaten x', y' für die hyperbolische Fläche **OADH**, deren Inhalt man durch Subtraction der Fläche **ADB** von dem Rectangel **OBDH** gleich $\frac{1}{2}\left(pq+ab\cdot lgn\frac{aq+bp}{ab}\right)$ findet. Die Inhalte der von dieser Fläche bei der Drehung um **OY'** und **OX** erzeugten Körper sind bezüglich $=\frac{1}{3}\pi q(p^2+2a^2)$ und $=\frac{2}{3}\pi(p-a)(q^2+2b^2)$, und mit Rücksicht darauf findet man nach der Guldin'schen Regel

$$x' = \frac{\frac{1}{3}q(p^2+2a^2)}{pq+ab\cdot lgn\frac{aq+bp}{ab}};$$

$$y' = \frac{\frac{2}{3}(p-a)(q^2+2b^2)}{pq+ab\,\mathrm{lgn}\,\frac{aq+bp}{ab}}.$$

4) Wir haben in §. 142 von einer beliebigen krummlinigen Fläche AA'D'G'G (Fig. 93) den Abstand z des Schwerpunktes von der begrenzenden Ordinate AA' bestimmt, und dafür folgenden Werth gefunden:

$$z = b\cdot\frac{0\cdot a_1+1\cdot 4a_2+2\cdot 2a_3+3\cdot 4a_4+4\cdot 2a_5+5\cdot 4a_6+6a_7}{a_1+4a_2+2a_3+4a_4+2a_5+4a_6+a_7},$$

wo die Bedeutung der Buchstaben, die in dieser Formel vorkommen, in dem genannten Paragraphen und in der zugehörigen Figur angegeben sind. Zur vollständigen Bestimmung der Lage des Schwerpunktes gehört noch, daß man auch seinen Abstand z' von der Abscissen-Achse AG kennt.

Um nun diesen Abstand zu bestimmen, kann man die Guldin'sche Regel mit Vortheil in Anwendung bringen, indem man die Fläche AA'D'G'G, deren Inhalt F bekannt ist, eine vollständige Umdrehung um AG als Achse machen läßt. Sie beschreibt dann einen Körper, dessen Kubikinhalt K ebenfalls bekannt ist, und es findet, zufolge der in Rede befindlichen Regel, nachstehende Gleichung statt:

$$K = F\cdot 2\pi z';\quad \text{woraus sich ergiebt } z' = \frac{K}{2\pi F}.$$

Substituirt man in dieser Formel für F und K die zugehörigen Werthe nach S. 85 und 148 des Anh., so entsteht:

$$z' = \frac{1}{2}\cdot\frac{a_1^2+4a_2^2+2a_3^2+4a_4^2+2a_5^2+\cdots+4a_{2n}^2+a_{2n+1}^2}{a_1+4a_2+2a_3+4a_4+2a_5+\cdots+4a_{2n}+a_{2n+1}}$$

§. 169.

Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte zur Bestimmung des Inhalts prismatischer Körper. Um diese Anwendung auf ein bestimmtes Gesetz zu begründen, ist ein Rückblick auf §. 129 mit Hinsicht auf Fig. 82

nöthig, indem wir uns erinnern, daß in dieser Figur A'B'C' die Projection des Dreiecks ABC, und G' die Projection seines Schwerpunktes auf die beliebig gegebene Ebene XY vorstellt. Eine geringe Ueberlegung ergiebt sofort, daß G' der Schwerpunkt des Dreieckes A'B'C' ist, so daß also bei jedem ebenen Dreieck die Projection seines Schwerpunktes auf eine beliebige Ebene allemal in den Schwerpunkt der Projection dieses Dreieckes auf dieselbe Ebene fällt.

Ferner wurde in jenem Paragraphen der Schwerpunkts-Abstand $GG' = \frac{1}{3}(a+b+c)$ gefunden, während aus der Stereometrie bekannt ist, daß der Inhalt des schief abgeschnittenen dreikantigen Prismas ABCA'B'C', welches die projicirenden Linien AA', BB', CC' zu Kanten, und das Dreieck A'B'C' zum normalen Querschnitte hat, durch die Formel $\frac{1}{3}(a+b+c)\cdot A'B'C'$ ausgedrückt wird. Dieser Ausdruck ist demnach identisch mit dem Produkte $GG'\cdot A'B'C'$, und es folgt daher, daß der Inhalt des fraglichen Prismas gleich dem Produkte aus seinem normalen Querschnitte in den Abstand der Schwerpunkte seiner Endflächen ist.

Daß diese Gesetze in ganz gleicher Weise für jedes vielkantige, an beiden Enden schief abgeschnittene Prisma gültig sind, wird in folgenden §. nachgewiesen.

§. 170.

Man denke sich nun irgend eine ebene Fläche vom Inhalte F, deren Lage im Raum gegen drei Coordinatenebenen, welche sich paarweise in den Achsen OX, OY, OZ (Fig. 115) schneiden, gegeben sei. Die mit diesen Achsen parallelen Coordinaten ihres Schwerpunktes G sollen x, y, z heißen, von welchen nur die erste in der Figur angegeben ist. Theilt man die gegebene Fläche, etwa durch gerade Linien, die von ihrem Schwerpunkte nach den Eckpunkten gezogen werden, in lauter Dreiecke, deren Inhalte A, B, C ... ꝛc. sein

mögen, und bezeichnet die zugehörigen Schwerpunkts-Coordinaten bezüglich mit a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' ... ꝛc., so hat man nach früheren Lehren die Momentengleichungen:

$$(I)\quad \begin{cases} Fx = Aa + Bb + Cc + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma Aa; \\ Fy = Aa' + Bb' + Cc' + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma Aa'; \\ Fz = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma Aa''. \end{cases}$$

Man denke sich die Fläche F auf eine der Coordinatenebenen projicirt, etwa auf die Ebene YZ, gegen welche sie unter dem Winkel φ geneigt sein mag, dann drücken $F' = F\,\mathrm{Cos}\varphi$, $A' = A\,\mathrm{Cos}\varphi$, $B' = B\,\mathrm{Cos}\varphi$, $C' = C\,\mathrm{Cos}\varphi$, ... ꝛc. die Projectionen der ganzen Fläche und der einzelnen Dreiecke aus, worin erstere zerlegt gedacht wurde. Multiplicirt man also die obigen drei Gleichungen nach der Reihe mit $\mathrm{Cos}\varphi$, so verwandeln sie sich in folgende:

$$(II)\quad \begin{cases} F'x = A'a + B'b + C'c + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma A'a; \\ F'y = A'a' + B'b' + C'c' + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma A'a'; \\ F'z = A'a'' + B'b'' + C'c'' + \cdots \text{ꝛc.} = \Sigma A'a''; \end{cases}$$

Diese Gleichungen schließen, gehörig interpretirt, folgende bemerkenswerthe Gesetze ein:

1) Da nach dem vor. §. die Projectionen der zu den Dreiecken A, B, C ... ꝛc. gehörigen Schwerpunkte mit den Schwerpunkten der Dreiecke A', B', C' ... ꝛc. zusammenfallen, so ist zuvörderst klar, daß die in der ersten Gleichung vorkommenden Produkte A'a, B'b, C'c ... ꝛc. die Kubikinhalte der dreikantigen Prismen ausdrücken, welche die Dreiecke A, A'; B, B'; C, C' ... ꝛc. zu Endflächen haben. Die Gleichung $F'x = \Sigma A'a$ giebt daher den kubischen Inhalt des vielkantigen Prismas, welches zwischen den Ebenen F und F' als Endflächen und den projicirenden Linien als Kanten enthalten ist.

2) Nächstdem geben die beiden andern Gleichungen der Gruppe (II) zu erkennen, daß der Punkt G', welcher die Projection des Schwerpunktes G vorstellt, nichts Anderes

als der Schwerpunkt der Fläche F' ist. Denn mit Rücksicht auf das vorhin Angeführte sind a', a''; b', b''; c', c''... ꝛc. die Schwerpunkts-Abstände der in der Ebene YZ liegenden Dreiecke A', B', C',...ꝛc. von den Achsen OZ und OY; die Größen $\Sigma A'a'$ und $\Sigma A'a''$ drücken daher die Momentensummen dieser Dreiecke in Bezug auf die genannten Achsen aus. Darin liegt also der Satz:

Wird irgend eine ebene Figur auf eine beliebige Ebene projicirt, so fällt die Projection ihres Schwerpunktes allemal mit dem Schwerpunkte ihrer Projection zusammen.

Dieser Satz gilt in ganz gleicher Weise auch für krummlinige Figuren, vorausgesetzt, daß sie eben sind.

3) Denkt man sich bei einem beliebigen Prisma, welches an beiden Enden schief abgeschnitten ist, die Schwerpunkte der beiden Endflächen durch eine gerade Linie verbunden, so ist dieselbe mit den Kanten des Prismas parallel, und enthält die Schwerpunkte aller schrägen oder normalen Durchschnitte des Körpers. Denn man kann irgend einen normalen Durchschnitt als die Projection eines jeden schrägen, mithin auch als die Projectionen der beiden Endflächen auf die schneidende Ebene betrachten, und die projicirenden Linien der zugehörigen Schwerpunkte treffen daher sämmtlich den Schwerpunkt des normalen Durchschnittes.

Eine gerade Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Endflächen eines beliebigen Prismas verbindet, soll die Schwerpunkts-Achse dieses Körpers heißen.

4) Man denke sich ein beliebiges Prisma, dessen Schwerpunktsachse die Länge l hat, an irgend einer Stelle durch eine auf seinen Kanten normale Ebene geschnitten, so wird dadurch jene Länge in die Stücke l', l'', das ganze Prisma aber in die Körperstücke K' und K'' getheilt. Bezeichnet

nun f den Flächeninhalt des normalen Querschnittes, so hat man nach (1) dieses Paragraphen

$$K' = f \cdot l' \text{ und } K'' = f \cdot l''.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, wobei $K' + K'' = K$ den Inhalt des ganzen Prismas giebt, so entsteht:

$$K = f(l' + l'') = fl.$$

D. h. Man findet den Inhalt eines jeden schief abgeschnittenen Prismas, indem man den auf dessen Kanten normalen Querschnitt mit der Länge seiner Schwerpunktsachse multiplicirt.

Derselbe Satz gilt auch für solche prismatische Körper, deren ebene Endflächen oder Querschnitte krummlinige Figuren von beliebiger Gestalt sind; also auch für alle zur Gattung der Cylinder gehörigen Körper.

Anmerk. Ein ähnliches Gesetz, wie das zuletzt erwähnte, findet auch in Bezug auf die Mantelflächen prismatischer und cylindrischer Körper statt, wobei nur eine geringe Modifikation einzutreten hat.

Wird nämlich die Figur F (Fig. 115) auf die Ebene YZ projicirt, und man betrachtet G' als den Schwerpunkt von dem Umfange der Projection F', so ist der zugehörige Punkt G nicht immer der Schwerpunkt von dem Umfange der Figur F. Man erhält aber jedesmal, wie sich leicht darthun läßt, den Inhalt der Mantelfläche des zwischen F und F' enthaltenen Prismas, indem man den Umfang der Figur F' mit der Länge der darauf normalen Linie GG' multiplicirt.

Um also die Mantelfläche eines, an beiden Enden beliebig abgeschrägten, Prismas oder Cylinders zu bestimmen, denke man sich diesen Körper normal auf seinen Kanten durch eine Ebene geschnitten und durch den, zum Umfange dieses Querschnittes gehörigen, Schwerpunkt parallel mit den Kanten eine gerade Linie gelegt, welche bis an beide Endflächen des Körpers verlängert wird. Das Produkt aus dieser Linie in den Umfang des normalen Querschnittes giebt dann den Inhalt jener Mantelfläche.

§. 171.

Aufgaben zur Anwendung obiger Gesetze. Man denke sich einen an beiden Enden beliebig abgeschrägten Cylinder, welcher den Kreis KMLN (Fig. 116) zum Querschnitt und

die darauf im Mittelpunkte O normale Linie XX′ zur Achse hat. Wird dieser Cylinder durch die mit seiner Achse parallele Ebene BB′C′C geschnitten, so entsteht der Körper ABCA′B′C′, auf welchen die im vorigen §. bewiesenen Gesetze Anwendung finden. — Zur nähern Bestimmung des fraglichen Körpers, der den Kreisabschnitt LMN zum normalen Querschnitt hat, denke man sich durch die Achse XX′ eine Ebene EE′A′A senkrecht auf die Ebene BB′C′C gelegt, welche die letztere in der Geraden DD′, den Cylindermantel aber in dessen Seitenlinie AA′ schneidet. Die Längen der einander parallelen Linien AA′, BB′, CC′ sollen bezüglich mit a, b, c, die Halbmesser OL = OM = ON aber mit r bezeichnet werden, während α das Bogenmaaß der Centriwinkel MOL = NOL sein mag.

1) Stellt P den Schwerpunkt des Kreisabschnittes LMN und GG′ eine durch diesen Punkt mit der Achse XX′ parallele Linie vor, so sind die Punkte G und G′, in welchen sie die elliptischen Endflächen ABC und A′B′C′ trifft, die Schwerpunkte der letztern. Die Länge l der Linie GG′ multiplicirt mit dem Inhalt f des Abschnittes LMN giebt dann nach (4) des vor. §. den Inhalt K des Körpers ABCA′B′C′.

Zur Bestimmung von l hat man in dem Paralleltrapeze AA′D′D, wenn einstweilen DD′ = d gesetzt wird, die bekannte Gleichung:

$$l \cdot JL = a \cdot JP + d \cdot PL.$$

Nach der Figur ist aber $JL = OL - OJ = r(1 - \mathrm{Cos}\alpha)$; $JP = OP - OJ = OP - r\mathrm{Cos}\alpha$; und $PL = OL - OP = r - OP$; also entsteht

$$lr(1 - \mathrm{Cos}\alpha) = a(OP - r\mathrm{Cos}\alpha) + d(r - OP);$$

mithin $$l = \frac{(a-d) \cdot OP + r(d - a\mathrm{Cos}\alpha)}{r(1 - \mathrm{Cos}\alpha)}.$$

Für die Größe OP hat man zufolge der Gleichung (2) in §. 135 die Formel:

$$OP = \frac{MN^3}{12f} = \frac{2}{3}r^3 \cdot \frac{\text{Sin}\alpha^3}{f},$$

nach deren Substitution sich der obige Ausdruck also gestaltet:

$$= \frac{2r^3(a-d)\text{Sin}\alpha^3 + 3f(d - a\text{Cos}\alpha)}{3f(1-\text{Cos}\alpha)}$$

Demgemäß ergiebt sich nunmehr der gesuchte Kubikinhalt

$$K = \frac{2r^3(a-d)\text{Sin}\alpha^3 + 3f(d-a\text{Cos}\alpha)}{3(1-\text{Cos}\alpha)}.$$

In dieser Formel bezeichnet f den Inhalt des Kreisabschnittes LMN, welcher durch $f = \frac{1}{2}r^2(2\alpha - \text{Sin}2\alpha)$ ausgedrückt wird, und d ist die Mittellinie DD' des Trapezes BB'C'C, daher $d = \frac{1}{2}(b+c)$. Mit Rücksicht auf diese Werthe verwandelt sich obiger Ausdruck in folgenden:

$$\text{(I)}\ K = \frac{r^3}{12} \cdot \frac{4(2a-b-c)\text{Sin}\alpha^3 + 3(b+c-2a\text{Cos}\alpha)(2\alpha - \text{Sin}2\alpha)}{1-\text{Cos}\alpha}.$$

2) Will man den Inhalt F der runden Seitenfläche des in Rede befindlichen Körpers berechnen, so sei Q (Fig. 116) der Schwerpunkt des Kreisbogens MLN und RR' stelle die durch diesen Punkt mit der Achse XX' parallel laufende Linie vor, welche die Endflächen in R und R' trifft. Zur Bestimmung ihrer Länge hat man dann die Gleichung

$$RR' \cdot JL = a.JQ + d.QL.$$

Es ist aber $JL = r(1-\text{Cos}\alpha)$; $JQ = OQ - OJ = OQ - r\text{Cos}\alpha$; $QL = OL - OQ = r - OQ$; folglich entsteht, da nach §. 124 (3) $OQ = r\frac{\text{Sin}\alpha}{\alpha}$ ist,

$$JQ = r.\frac{\text{Sin}\alpha - \alpha\text{Cos}\alpha}{\alpha}; \quad QL = r.\frac{\alpha - \text{Sin}\alpha}{\alpha}.$$

Mit Rücksicht auf diese Werthe liefert die obige Gleichung

$$RR' = \frac{(a-d)\text{Sin}\alpha + \alpha(d - a\text{Cos}\alpha)}{\alpha(1-\text{Cos}\alpha)};$$

und indem man diesen Ausdruck mit der Länge des Kreisbogens $MLN = 2r\alpha$ multiplicirt, ergiebt sich

$$F = 2r.\frac{(a-d)\operatorname{Sin}\alpha + \alpha(d - a\operatorname{Cos}\alpha)}{1-\operatorname{Cos}\alpha}$$

Darin ist $d = \frac{1}{2}(b+c)$; also entsteht nach erfolgter Substitution:

$$\text{(II)}\qquad F = r\frac{(2a-b-c)\operatorname{Sin}\alpha + \alpha(b+c-2a\operatorname{Cos}\alpha)}{1-\operatorname{Cos}\alpha}.$$

3) Für den besondern Fall, daß die beiden Seiten BC und $B'C'$ des Trapezes $BB'C'C$ mit MN zusammenfallen, entsteht der in Fig. 117 dargestellte Körper, welcher wegen seiner Aehnlichkeit mit einem Pferdehufe ein hufförmiger Cylinderabschnitt genannt wird. Um die gefundenen Formeln auf diesen Körper anzuwenden, braucht man in denselben nur b und c gleich Null zu setzen, wodurch man erhält:

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} K = \dfrac{ar}{6}\cdot\dfrac{4\operatorname{Sin}\alpha^3 - 3\operatorname{Cos}\alpha(2\alpha - \operatorname{Sin}2\alpha)}{1-\operatorname{Cos}\alpha}; \\ F = 2ar\cdot\dfrac{\operatorname{Sin}\alpha - \alpha\operatorname{Cos}\alpha}{1-\operatorname{Cos}\alpha}. \end{cases}$$

4) Geht in dem letzten Falle die Schnittlinie MN durch den Mittelpunkt O des Kreises $MKNL$, so ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; also $\operatorname{Sin}\alpha = 1$, $\operatorname{Cos}\alpha = 0$; daher

$$\text{(IV)}\qquad K = \tfrac{2}{3}ar^2; \qquad F = 2ar.$$

Sechstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte schwerer Körper und von den einfachen Maschinen.

I. Gleichgewicht schwerer Körper im Allgemeinen.

§. 172.

Es handelt sich in diesem Abschnitte zunächst um die Bedingungen des Gleichgewichts von Körpern, auf welche außer der Schwere keine andern Kräfte wirken, und die daher nur im Gleichgewichte bleiben können, wenn sie sich auf feste Punkte oder Flächen stützen. Die Widerstände dieser festen Unterstützungen kann man als Kräfte betrachten, die den Pressungen, welche der Körper vermöge seines Gewichts auf dieselben ausübt, gleich und gerade entgegengesetzt sind (vergl. §. 108.). Denkt man sich nun das Gewicht des Körpers in seinem Schwerpunkte als eine lothrechte Kraft vereinigt, so muß dieselbe mit jenen Repulsivkräften im Gleichgewichte sein, wofern nämlich Reibungen und andere physische Hindernisse außer Betracht bleiben, und es finden also die in den ersten vier Kapiteln gefundenen Bedingungsgleichungen hier Anwendung. — Dies vorausgesetzt, so ergeben sich mit Rücksicht auf die früher entwickelten allgemeinen Lehren des Gleichgewichts folgende einfache Gesetze.

1) Stützt sich ein schwerer Körper nur mit einem seiner Punkte auf eine feste Oberfläche, so findet Gleichgewicht statt, wenn die Richtung der Schwerkraft des Körpers, d. h. die lothrechte Linie durch seinen Schwerpunkt, durch diesen Stützpunkt geht, und wenn zugleich die demselben angehörige Berührungsebene der festen Oberfläche wagerecht ist. Denn der Widerstand der unterstützenden Oberfläche kann als eine Kraft gedacht werden, die nach der Richtung der Normale im Stützpunkte aufwärts wirkt, und wenn man das Gewicht des Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt denkt, so hat man zwei Kräfte, die mit einander im Gleichgewichte sein müssen. Letzteres kann aber nach §. 13 nur dann stattfinden, wenn beide Kräfte einander gleich und gerade entgegengesetzt sind; folglich muß jene Normale lothrecht stehen und zugleich durch des Körpers Schwerpunkt gehen, was mit andern Worten der obige Satz ist.

2) Wenn ein schwerer Körper sich mit zweien seiner Punkte auf eine feste Oberfläche, oder auf zwei verschiedene Oberflächen stützt, so erfordert das Gleichgewicht, daß die Normalen in den Stützpunkten, nach deren Richtungen die Oberflächen Widerstand leisten, mit dem Schwerpunkte des Körpers in einer vertikalen Ebene liegen (§. 22), und sich entweder in der lothrechten Linie durch diesen Punkt schneiden, oder beide mit der genannten Linie parallel sind.

Stützt sich also der Körper mit zweien seiner Punkte auf eine horizontale Ebene, so muß für den Fall des Gleichgewichtes der Schwerpunkt des Körpers in der durch die Stützpunkte gelegten vertikalen Ebene, und die lothrechte Linie durch den Schwerpunkt muß zwischen den Stützpunkten liegen.

3) Ist endlich ein Körper in drei oder mehreren Punkten durch feste Oberflächen unterstützt, so findet Gleichgewicht statt, sobald die den Pressungen gleichen und entgegengesetzten Repulsivkräfte, welche in den Stützpunkten nach den Richtungen der

den Oberflächen angehörigen Normalen als wirksam zu denken sind, eine vertikal aufwärts gerichtete Mittelkraft liefern, welche durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Dies ist aber der Fall, wenn entweder jene Normalen sich in einem Punkte schneiden, der in der lothrechten Linie durch des Körpers Schwerpunkt liegt, oder, wenn alle Normalen eine vertikale Stellung haben, so daß sie die Kanten eines vertikalen Prismas bilden, innerhalb welchem der Schwerpunkt enthalten ist.

4) Die vorigen Gesetze gelten eben so für eine beliebige Anzahl von schweren Körpern, die zu einem festen System mit einander verbunden sind. Denn denkt man sich die Summe der Gewichte aller Körper in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte als eine lothrechte Kraft vereinigt, so kann man das ganze System als einen schweren Körper betrachten.

5) Imgleichen behalten die Gesetze ihre Gültigkeit, wenn außer der Schwere auch noch andere Kräfte auf das System wirken, wofern diese nur mit den Schwerkräften sich zu einer Mittelkraft vereinigen lassen. Es tritt dann bloß die Modifikation ein, daß die Beziehungen, welche vorhin als Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen dem Gewichte des Körpers und den Repulsivkräften angegeben wurden, jetzt zwischen jener Mittelkraft und den zuletzt genannten Kräften stattfinden müssen.

§. 173.

Anwendung dieser Sätze auf besondere Fälle.

1) Stützt sich eine Halbkugel mit einem Punkt ihrer converen Oberfläche auf eine feste Horizontalebene, so kann sie nur im Gleichgewichte sein, wenn ihre ebene Seitenfläche eine wagerechte Lage hat.

2) Dasselbe findet statt, wenn die Halbkugel sich auf zwei oder drei feste Ebenen stützt, die unter beliebigen Win-

kein gegen den Horizont geneigt sind. Denn die unterstützenden Ebenen berühren die convexe Halbkugelfläche, ihre Repulsivkräfte schneiden sich daher im Mittelpunkte derselben, und dieser Punkt muß nach (3) des vor. §. in der lothrechten Linie durch des Körpers Schwerpunkt — im Schwerpunktslothe — liegen. Die zuletzt genannte Linie steht aber auf der, die Halbkugel begrenzenden, Kreisfläche in derem Mittelpunkte senkrecht; also muß diese Kreisfläche selbst für den Zustand des Gleichgewichtes horizontal liegen.

Daß dieses Gesetz keine Änderung erleidet, wenn die unterstützenden Flächen nicht eben, sondern beliebige convexe Oberflächen sind, ergiebt eine geringe Überlegung bald.

3) Es stelle **ADB**, Fig. 118, eine Halbkugel vor, welche auf der unter dem Winkel α gegen der Horizont geneigten Ebene **MN** ruht, ohne längs derselben herabgleiten zu können. Um letzteres zu verhindern, kann man sich etwa einen vollkommen biegsamen Faden **AEN**, der mit dem einen Ende im Punkte **A** der Halbkugel, mit dem andern Ende aber in **N** auf der schiefen Ebene befestigt ist, angebracht denken. Die Spannung dieses Fadens ist dann als eine Kraft zu betrachten, die nach der Richtung **EN** wirkend das Abgleiten des Körpers verhindert.

Dies vorausgesetzt, so ergeben sich dem Vorhergehenden gemäß folgende Bedingungen des Gleichgewichts: Der Widerstand der schiefen Ebene ist als eine Kraft zu betrachten, die im Stützpunkte **E** nach der Richtung der Normale **EC** wirkt, und daher durch den Mittelpunkt der Halbkugel geht, während die Spannung des Fadens die auf **EC** normale Richtung **EN** hat. Der Durchschnittspunkt **E** dieser beiden Kräfte muß daher auf dem Schwerpunktslothe **GQ** liegen, und ihre Mittelkraft muß dem Gewichte **Q** der Halbkugel gleich und gerade entgegen gesetzt sein.

Um zunächst die Lage der Halbkugel im Zustande des

Gleichgewichtes zu bestimmen, sei φ der Neigungswinkel der Kreisebene AB gegen den Horizont, so ist — wie leicht erhellet — auch der Winkel $EGD = \varphi$. Eben so ergiebt sich leicht, daß der Winkel CEG dem Neigungswinkel α der schiefen Ebene gleich ist. Daher hat man im Dreieck CEG die Proportion:

$$CG : CE = \operatorname{Sin}\alpha : \operatorname{Sin}\varphi;$$

woraus sich

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{CE}{CG} \cdot \operatorname{Sin}\alpha$$

ergiebt. Nach §. 159, 2) ist aber $CG = \frac{8}{5}\,CE$; daher

$$\operatorname{Sin}\varphi = \tfrac{5}{8}\operatorname{Sin}\alpha.$$

Will man die Lage der Halbkugel durch Construction bestimmen, so kann dies leicht auf folgende Art geschehen: Man ziehe aus dem Punkte E eine Linie EF vertikal, und eine zweite Linie EC normal auf MN, mache letztere dem Halbmesser der Kugel gleich, und beschreibe aus C mit CG gleich $\frac{5}{8}$ dieses Halbmessers einen Kreisbogen. Letzterer bestimmt dann auf der Vertikalen EF den Schwerpunkt G der Halbkugel, und wenn man durch denselben den Halbmesser CD zieht, so muß AB darauf normal sein.

Was nun die nach EC und EN wirkenden Repulsivkräfte betrifft, so findet man deren Intensitäten (durch Zerlegung des Gewichts Q) bezüglich gleich $Q \cdot \operatorname{Cos}\alpha$ und $Q \cdot \operatorname{Sin}\alpha$.

4) Ein paraboliſches Conoid CAD (Fig. 119) ruht auf einer horizontalen Ebene MN, die es mit dem Punkte E seiner converen Oberfläche berührt. Man soll die Gleichgewichtslage dieses Körpers bestimmen.

Ist AB die Achse, G der auf ihr befindliche Schwerpunkt, so muß die Linie GE, welche diesen Punkt mit dem Stützpunkte E verbindet, lothrecht, also auf MN normal sein. Um nun den Winkel BMN zu bestimmen, unter welchem die Achse AB im Zustande des Gleichgewichtes gegen die Horizontale MN geneigt ist, ziehe man EF senkrecht auf AB,

und betrachte $AF = x$, $FE = y$ als die Coordinaten des Punktes E. Nun ist in dem rechtwinkl. Dreieck MEF

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{FE}{MF} = \frac{y}{2x},$$

weil bekanntlich die Subtangente MF gleich der doppelten Abscisse ($= 2x$) ist. Eben so hat man in dem rechtwinkelchen Dreieck EFG den Winkel bei E gleich φ; daher

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{FG}{FE} = \frac{AG - AF}{FE}.$$

Setzt man die Achse $AB = p$, und berücksichtigt man, daß nach §. 162 (4) $AG = \frac{2}{3}p$ ist, so hat man

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2}{3}p - x}{y}.$$

Diesen Ausdruck mit dem vorigen verglichen liefert

$$\frac{y}{2x} = \frac{\frac{2}{3}p - x}{y};$$

also $$y^2 = 2x(\tfrac{2}{3}p - x).$$

Nach der Gleichung der Parabel hat man aber auch

$$y^2 = ax;$$

daher ergiebt sich $2x(\frac{2}{3}p - x) = ax$,

woraus folgt: $x = \frac{2}{3}p - \frac{1}{2}a$.

Nunmehr ist $y = \sqrt{a(\frac{2}{3}p - \frac{1}{2}a)}$

und $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{a(\frac{2}{3}p - \frac{1}{2}a)}};$$

eine Formel, welche die fragliche Neigung der Achse des Parabeloids für die Gleichgewichtslage bestimmt. Sie zeigt dabei, daß die Aufgabe nur so lange möglich bleibt, als $\frac{2}{3}p > \frac{1}{2}a$ oder $p > \frac{3}{4}a$ ist; daß es also nur unter dieser Bedingung eine schiefe Gleichgewichtslage für den Körper giebt.

§. 174.

Allgemeine Eigenschaft eines im Gleichgewicht befindlichen Systems schwerer Körper. Man denke sich eine Anzahl von Körpern zu einem festen System ver-

bunden, und setze voraus, dasselbe ... ohne Mitwirkung anderer Kräfte dadurch im Gleichgewicht erhalten, daß es sich auf eine oder mehrere feste Flächen stützt. Alle Widerstände werden außer Acht gelassen, so daß also im Fall einer Störung des Gleichgewichtes eine freie Bewegung längs den unterstützenden Flächen möglich ist.

Es seien A, B, C, ... ꝛc. ꝛc. die Gewichte der mit einander verbundenen Körper, a, b, c, ꝛc. die Abstände ihrer Schwerpunkte im Zustande des Gleichgewichts von einer festen horizontalen Ebene, und z sei der Abstand ihres gemeinsamen Schwerpunktes von derselben Ebene. Nach den im vorhergehenden Kapitel vorgetragenen Lehren findet zwischen diesen Größen folgende Gleichung statt:

$$z = \frac{Aa + Bb + Cc + \ldots}{A + B + C + \ldots} = \frac{\Sigma Aa}{\Sigma A}.$$

Denkt man sich das System durch eine willkührliche Bewegung längs den unterstützenden Oberflächen etwas aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, und bezeichnet mit α, β, γ, ... ꝛc. ꝛc. die theils positiven, theils negativen Größen, um welche sich die oben genannten Schwerpunkts-Abstände durch diese Bewegung geändert haben, während ζ die entsprechende Änderung des Abstandes ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes vorstellt, so hat man:

$$z + \zeta = \frac{\Sigma A(a + \alpha)}{\Sigma A} = \frac{\Sigma Aa}{\Sigma A} + \frac{\Sigma A\alpha}{\Sigma A}.$$

Mit Rücksicht auf die obige Gleichung ergiebt sich hiernach

$$\zeta = \frac{\Sigma A\alpha}{\Sigma A},$$

ein Ausdruck für diejenige Größe, um welche der Schwerpunkt des ganzen Systems sich bei der willkührlich angenommenen Bewegung senkrecht erhoben oder gesenkt hat, jenachdem ζ positiv oder negativ ausfällt.

Wofern man nun die in Rede befindliche Bewegung des

Systems auf unendlich kleine Ortsveränderungen der zugehörigen Körper beschränkt, kann man die Größen α, β, γ .. ꝛc. ꝛc. als die virtuellen Geschwindigkeiten der lothrechten Kräfte A, B, C, ... ꝛc. ꝛc. betrachten, und wegen des vorausgesetzten Gleichgewichtes hat man nach den im vierten Kapitel entwickelten Lehren die entsprechende Bedingungsgleichung:

$$\Sigma A\alpha = 0.$$

Demnach ist auch $\zeta = 0$; der Schwerpunkts-Abstand z muß daher für den Zustand des Gleichgewichtes entweder ein Maximum oder ein Minimum sein, und es folgt also das allgemeine Gesetz:

Bei jedem festen System von Körpern, welches ohne Mitwirkung äußerer Kräfte durch unterstützende Oberflächen im Gleichgewicht erhalten wird, nimmt der Schwerpunkt desselben jedesmal die höchste oder niedrigste Stelle ein.

Beispiele zu diesem Gesetze bieten die im vor. § behandelten Aufgaben dar, bei welchen sich leicht zeigen läßt, daß in den verschiedenen Gleichgewichtslagen der betrachteten Körper der Schwerpunkt der letztern jedesmal am tiefsten liegt.

§. 175.

Zusätze. 1) verdient hier bemerkt zu werden, daß der obige Satz in gleicher Weise auch für ein loses System von Körpern gilt. Denn man denke sich die Körper A, B, C, ... ꝛc. etwa durch vollkommen biegsame Fäden mit einander verbunden, und das Gleichgewicht des so gebildeten Systems dadurch hervorgebracht, daß die einzelnen Körper desselben sich auf beliebige Flächen stützen, längs welchen sie sich, der Einwirkung ihres eigenen Gewichtes folgend, frei bewegen können. Wird nun das System unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, indem man die verschiedenen Körper desselben veranlaßt, sich längs den sie unterstützenden Flächen so zu bewe-

gen, wie es die Beschaffenheit der zwischen ihnen statthabenden Verbindungen gestattet, so finden die vorigen Schlüsse, wie leicht erhellet, eine ganz gleiche Anwendung.

2) Ist die angebrachte Unterstützung des im vor. §. betrachteten Systems, wodurch dasselbe im Gleichgewicht erhalten wird, von der Art, daß dieses Gleichgewicht bei jeder Veränderung der Lage der Körper immer fortbesteht, so brauchen die Größen α, β, γ, ... ꝛc. ꝛc., um welche sich die Schwerpunkte der einzelnen Körper vertikal gehoben oder gesenkt haben, nicht als unendlich klein vorausgesetzt zu werden. Die Gleichung $\Sigma A\alpha = 0$ findet aber als Bedingung des fortwährend bestehenden Gleichgewichtes dennoch statt, wie eine geringe Überlegung bald ergiebt, und unter diesen Umständen behält also der Schwerpunkt des ganzen Systems in jeder Lage immer denselben Abstand von der festen Horizontalebene bei. Er kann demnach bei der willkührlich hervorgebrachten Bewegung der Körper längs den sie stützenden Flächen nur in horizontaler Richtung fortrücken.

So kann z. B. eine homogene Kugel, die auf einer horizontalen Ebene liegt, als ein festes System betrachtet werden, welches in jeder Lage auf der Ebene im Gleichgewichte ist (§. 172, 1). Beim Fortrollen der Kugel behält daher ihr Schwerpunkt stets denselben Abstand von der sie unterstützenden Ebene bei, und bewegt sich folglich in einer mit letzterer parallelen Richtung. — Dasselbe gilt von normalen Kegeln und von geraden Cylindern, wenn diese Körper mit ihren Mantelflächen auf einer horizontalen Ebene liegen.

3) Dieser letzte Satz findet ebenfalls auf feste und lose Systeme gleiche Anwendung, wie dies durch folgende Beispiele näher erläutert werden wird:

§. 176.

Aufgaben zur Anwendung. Der in §. 174 be-

wiesene Satz kann in manchen Fällen mit Nutzen angewendet werden, um die Gleichgewichtslage eines Systems von Körpern zu bestimmen, was durch folgende Aufgaben näher erläutert werden soll:

1) Zwei Körper von den Gewichten P und Q sind auf dem festen Bogen eines vertikal stehenden Halbkreises MABN (Fig. 120) so angebracht, daß sie sich zwar längs desselben frei bewegen aber nicht von ihm entfernen können. Die beiden Körper sind durch einen festen, undehnbaren Faden AB, dessen Länge a kleiner als der Durchmesser MN ist, mit einander verbunden; man soll ihre Gleichgewichtslage bestimmen.

Man ziehe die Halbmesser OA, OB, deren Länge = r sein mag, und bezeichne den durch die Länge AB = a gegebenen Mittelpunktswinkel AOB mit α. Die fragliche Gleichgewichtslage der beiden Körper ist nun bekannt, sobald man den Winkel MAO = φ kennt, den der eine Halbmesser OA mit dem horizontalen Durchmesser MN bildet, und dieser soll daher gesucht werden. — Zu dem Ende fälle man die Perpendikel AC, BD aus den Schwerpunkten der Körper auf die Horizontale MN, deren Längen bezüglich durch $r\sin\varphi$ und $r\sin(\alpha+\varphi)$ ausgedrückt werden. Nach bekannten Lehren ist aber der Abstand des ihnen gemeinsamen Schwerpunktes von MN gleich

$$\frac{P\cdot AC+Q\cdot BD}{P+Q}=r\cdot\frac{P\cdot\sin\varphi+Q\cdot\sin(\alpha+\varphi)}{P+Q},$$

und dieser Ausdruck muß nach §. 174 ein Maximum oder Minimum sein.

Der Winkel φ muß also der genannten Bedingung gemäß bestimmt werden, und da derselbe nur im Zähler vorkömmt, so wird die fragliche Bedingung erfüllt, wenn

$$P\sin\varphi+Q\sin(\alpha+\varphi)=(P+Q\cos\alpha)\cdot\sin\varphi+Q\sin\alpha\cdot\cos\varphi$$

zu einem Max. oder Min. gemacht wird.

Nach Nr. 28 des Anhanges erhält man nun die zur

Bestimmung von φ erforderliche Gleichung, indem man die Ableitung des obigen Ausdruckes gleich Null setzt; also

$$(P + Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha)\cdot A\,\mathrm{Sin}\,\varphi + Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot A\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 0$$

oder, da $A\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Cos}\,\varphi$ und $A\,\mathrm{Cos}\,\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi$ ist,

$$(P + Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha)\,\mathrm{Cos}\,\varphi - Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha\cdot\mathrm{Sin}\,\varphi = 0.$$

Diese Gleichung liefert nun die Formel

$$\mathrm{Tang}\,\varphi = \frac{P + Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha},$$

wodurch der gesuchte Winkel bestimmt ist.

Ob nun für diesen Winkel ein Maximum oder ein Minimum statt findet, d. h. ob der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Körper im Zustande des Gleichgewichtes am höchsten oder am tiefsten liegt, ist eine Frage, welche die zweite Ableitung des obigen Ausdruckes beantwortet. Die erste Ableitung desselben war $= (P + Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha)\,\mathrm{Cos}\,\varphi - Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, und wenn man hiervon abermals die Ableitung bildet, so entsteht

$$-(P + Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha)\,\mathrm{Sin}\,\varphi - Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\varphi;$$

ein Ausdruck, der durchaus negativ ist, und nach Einsetzung des gefundenen Werthes von φ offenbar auch negativ bleibt.

Bei der in Fig. 120 angenommenen Gleichgewichtslage AB liegt daher der Schwerpunkt des Systems am höchsten, weil ein negativer Werth der zweiten Ableitung irgend einer Function allemal ein Maximum für dieselbe zur Folge hat. Er würde aber am tiefsten liegen, wenn das System sich in der Lage A'B' auf dem untern Halbkreise MB'A'N im Gleichgewichte befände, für welchen Fall man sich die Verbindungslinie B'A' als einen festen, wenngleich gewichtslosen, Stab zu denken hätte.

2) Befindet sich ein System von beliebig vielen Körpern A, B, C, D, ꝛc. auf dem Bogen eines vertikalen Halbkreises MBDN (Fig. 121) im Gleichgewichte, so läßt sich die Lage dieses Systems in ganz gleicher Weise bestimmen.

Es seien nämlich $Q, Q', Q'', \cdots$ ꝛc. die Gewichte der Körper, $x, x', x'', \cdots$ ꝛc. die Abstände ihrer Schwerpunkte von dem horizontalen Durchmesser des Halbkreises, dessen Radius wieder $= r$ sein mag, so hat man für den Abstand ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes die bekannte Formel

$$z = \frac{Qx + Q'x' + Q''x'' + \cdots}{Q + Q' + Q'' + \cdots} = \frac{\Sigma Qx}{\Sigma Q}.$$

Damit dieser Abstand, dem Satze §. 174 gemäß, ein Max. oder Min. sei, muß eins von beiden für den Zähler statt finden. Aus der Figur ergiebt sich aber nach der darin angegebenen Bezeichnung: $x = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$; $x' = r\,\mathrm{Sin}(\varphi+\alpha)$; $x'' = r\,\mathrm{Sin}(\varphi+\alpha+\beta)$; $x''' = r\,\mathrm{Sin}(\varphi+\alpha+\beta+\gamma)$; u. s. w.; und nach Einsetzung dieser Werthe hat man daher

$$\Sigma Qx = r[Q\,\mathrm{Sin}\,\varphi + Q'\,\mathrm{Sin}(\varphi+\alpha) + Q''\,\mathrm{Sin}(\varphi+\alpha+\beta) + Q'''\,\mathrm{Sin}(\varphi+\alpha+\beta+\gamma) + \cdots]$$

Um nun denjenigen Werth von φ zu bestimmen, der die eingeklammerte Größe, und somit den ganzen Ausdruck, zu einem Max. oder Min. macht, kann man jene Größe vorher auf nachstehende Form bringen:

$$[Q + Q'\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Q''\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) + Q'''\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots]\,\mathrm{Sin}\,\varphi + [Q'\,\mathrm{Sin}\,\alpha + Q''\,\mathrm{Sin}(\alpha+\beta) + Q'''\,\mathrm{Sin}(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots]\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Behandelt man diesen Ausdruck auf die bei der vorigen Aufgabe angegebene Weise, so findet man zuletzt:

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{Q + Q'\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Q''\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) + Q'''\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots}{Q'\,\mathrm{Sin}\,\alpha + Q''\,\mathrm{Sin}(\alpha+\beta) + Q'''\,\mathrm{Sin}(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots}.$$

Auch hier findet die bei der vorigen Aufgabe gemachte Bemerkung statt, daß nämlich der Schwerpunkt des Systems für die durch vorstehende Formel bestimmte Lage die höchste oder niedrigste Stelle einnimmt, je nachdem sich das System auf der convexen Seite des oberen, oder auf der concaven Seite des untern Halbkreises im Gleichgewichte befindet. In Fig. 121 ist der erste Fall durch $ABCD\cdots$ ꝛc., der andere durch $A'B'C'D'\cdots$ ꝛc. dargestellt, wobei man sich die Ver-

bindungslinien zwischen den einzelnen Körpern wieder als fest und unbiegsam denken muß.

3) Zwei Körper P, Q, die durch einen festen und undehnbaren Faden von gegebener Länge a mit einander verbunden sind, befinden sich auf den unter den Winkeln α und β gegen den Horizont geneigten Ebenen MO, NO (Fig. 122) im Gleichgewicht. Es soll die Lage AB dieser Körper bestimmt werden.

Man fälle aus den Schwerpunkten A, B der gegebenen Körper die Perpendikel $AA' = x$, $BB' = y$ auf die Horizontale MN, und bezeichne den Abstand GG' des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mit z, so hat man bekanntlich

$$z = \frac{Px + Qy}{P + Q}.$$

Ferner ziehe man aus A und B die Linien AM' und BN' parallel mit den geneigten Ebenen, jede bis an die Verlängerung der MN, und aus A die horizontale Linie AC, welche BB' in C schneidet. Bezeichnet man nun die Länge von M'N' mit b, den Winkel BAC, welcher die Gleichgewichtslage des Systems AB bestimmt, mit φ, so ergeben sich aus der Figur leicht folgende Vergleichungen:

$$y - x = a \operatorname{Sin}\varphi;$$

$$y \operatorname{Cotg}\beta + x \operatorname{Cotg}\alpha = b - a \operatorname{Cos}\varphi.$$

Entwickelt man aus diesen Gleichungen x und y, so findet man

$$x = \frac{b - a(\operatorname{Cotg}\beta \operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Cos}\varphi)}{\operatorname{Cotg}\alpha + \operatorname{Cotg}\beta};$$

$$y = \frac{b + a(\operatorname{Cotg}\alpha \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Cos}\varphi)}{\operatorname{Cotg}\alpha + \operatorname{Cotg}\beta}.$$

Diese Werthe in den Ausdruck von z eingesetzt, stellen denselben als Function von φ folgendermaßen dar:

$$z = \frac{b \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha + \beta)} + \frac{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{(P + Q) \operatorname{Sin}(\alpha + \beta)} \times$$
$$[(Q \operatorname{Cotg}\alpha - P \operatorname{Cotg}\beta) \operatorname{Sin}\varphi - (P + Q) \operatorname{Cos}\varphi].$$

Für die Bedingung des Gleichgewichtes muß nun der Winkel φ so bestimmt werden, daß der Abstand z ein Max. oder Min. wird. Bildet man also die Ableitung des obigen Ausdruckes nach φ und setzt dieselbe gleich Null, so entsteht:

$$(Q\,\mathrm{Cotg}\alpha - P\,\mathrm{Cotg}\beta)\,\mathrm{Cos}\varphi + (P+Q)\,\mathrm{Sin}\varphi = 0;$$

und diese Gleichung liefert nunmehr die Formel

$$\mathrm{Tang}\varphi = \frac{P\,\mathrm{Cotg}\beta - Q\,\mathrm{Cotg}\alpha}{P+Q} = \frac{P\cdot\mathrm{Tg}\alpha - Q\cdot\mathrm{Tg}\beta}{(P+Q)\cdot\mathrm{Tg}\alpha\mathrm{Tg}\beta}.$$

Die zweite Ableitung der von φ abhängigen Klammergröße in dem Ausdrucke von z ist gleich

$$(P\,\mathrm{Cotg}\beta - Q\,\mathrm{Cotg}\alpha)\,\mathrm{Sin}\varphi + (P+Q)\,\mathrm{Cos}\varphi,$$

und wenn darin der für $\mathrm{Tang}\varphi$ gefundene Werth eingesetzt wird, so entsteht nach gehöriger Reduction

$$\sqrt{(P+Q)^2 + (P\,\mathrm{Cotg}\beta - Q\,\mathrm{Cotg}\alpha)^2}.$$

Da dieser Ausdruck für die in Fig. 122 dargestellte Gleichgewichtslage nur positiv genommen werden kann, so entspricht der gefundene Werth von $\mathrm{Tg}\varphi$ einem Minimum von z, und der Schwerpunkt des Systems **AB** liegt also am **tiefsten**. Er muß folglich für die Gleichgewichtslage, welche in Fig. 123 dargestellt ist, die **höchste** Stelle einnehmen.

4) Um auch die Anwendung des unter Nr. 2 in §. 175 aufgestellten Satzes zu zeigen, wollen wir die letzte Aufgabe dahin abändern, daß die Verbindung der auf den geneigten Flächen **MO** und **NO** (Fig. 122) im Gleichgewicht befindlichen Körper, anstatt daß dieselbe vorhin durch den gerade gespannten Faden **AB** direct geschah, nunmehr durch den Faden **AOB** geschieht, indem der letztere bei **O** über eine frei bewegliche Rolle läuft, und mit seinen beiden Enden von den daran befestigten Körpern den schiefen Ebenen parallel gespannt wird.

Unter dieser Voraussetzung findet das Gleichgewicht zwischen den Körpern fortwährend statt, wie auch die Lage derselben auf den geneigten Flächen geändert werden möge, und

der gemeinschaftliche Schwerpunkt bleibt also stets in denselben Horizontalen. Sind demnach x und y die Schwerpunktsabstände der beiden Körper für irgend eine Lage A, B, und denkt man sich eine Bewegung veranlaßt, etwa so, daß der Körper A auf der Ebene MO um den Weg s aufwärts steigt, so muß offenbar der Körper B auf der andern Ebene ON denselben Weg abwärts zurücklegen. Die Schwerpunktsabstände von MO haben sich dann bezüglich um $s \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$ und $s \cdot \mathrm{Sin}\,\beta$ geändert, da sie nach jener Bewegung gleich $x + s\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ und $y - s\,\mathrm{Sin}\,\beta$ geworden sind. Man hat daher die Gleichung

$$\frac{Px + Qy}{P+Q} = \frac{P(x + s\,\mathrm{Sin}\,\alpha) + Q(y - s\,\mathrm{Sin}\,\beta)}{P+Q},$$

woraus sich $0 = P \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha - Q \cdot \mathrm{Sin}\,\beta,$

oder $P : Q = \mathrm{Sin}\,\beta : \mathrm{Sin}\,\alpha = MO : NO$

ergiebt. Die Bedingung des Gleichgewichts besteht also darin, daß die Gewichte der Körper sich wie die Längen der geneigten Ebenen verhalten, was man auch auf andere Weise, etwa durch Hülfe des Carteſiſchen Grundſatzes, hätte finden können.

5) Ein anderes hieher gehöriges Beiſpiel für ein loſes Syſtem von Körpern bietet die in §. 111 behandelte Aufgabe dar; nur daß dort ſtatt der unterſtützenden Oberflächen feſte Curven vorausgeſetzt wurden, was aber der Gültigkeit des in Rede befindlichen Satzes keinen Abbruch thut. Mit Hülfe deſſelben läßt ſich die zur Löſung jener Aufgabe erforderliche Grundgleichung (2) in §. 111. leicht herleiten, was indeß dem Leſer zu ſeiner eigenen Übung überlaſſen bleiben möge.

II. Stabilität ſchwerer Körper.

§. 177.

Die vorhergehenden Unterſuchungen haben ergeben, daß der Schwerpunkt irgend eines Köpers, oder eines beliebigen

Systems von Körpern, welches unter der alleinigen Einwirkung der Schwere auf festen Unterstützungen im Gleichgewicht ist, entweder die tiefste oder höchste Stelle einnimmt. Wenn also das System durch eine äußere Ursache noch so wenig aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird, so muß sich der zugehörige Schwerpunkt im ersten Falle erheben, im andern Falle aber senken, und da hiemit in beiden Fällen eine Störung des Gleichgewichtes verbunden ist, so erfolgt nothwendiger Weise eine entsprechende Bewegung, sobald das System wieder sich selbst überlassen wird. —

Bei der vorausgesetzten Abwesenheit aller äußeren Kräfte kann aber nur das eigne Gewicht des Systems als die Ursache jener Bewegung betrachtet werden, die daher nicht anders, als im Sinne der Schwerkraft, d. h. nur so erfolgen kann, daß dadurch der Angriffspunkt dieser Kraft eine tiefere Lage erhält, als ihm bei der willkührlichen Störung des Gleichgewichtes zu Theil wurde. War also hiedurch der Schwerpunkt aus seiner tiefsten Lage um Etwas erhoben worden, so wird er nachher wieder in seine erste Lage zurückgebracht, und es tritt dann Ruhe ein. Hatte er sich dagegen aus seiner höchsten Lage um noch so wenig gesenkt, so wird er durch das eigene Gewicht des Systems noch tiefer herabgedrückt, und diese Bewegung wird — wenn sonst kein Hinderniß entgegen steht — so lange dauern, bis das System in einer andern Gleichgewichtslage zur Ruhe kömmt.

Man nennt dies das Umschlagen des Systems, wozu die beiden ersten Aufgaben des vor. §. als Beispiele zur Erläuterung dienen können. Namentlich ist in Fig. 120 das System **AB** auf der converen Seite des obern Halbkreises so im Gleichgewicht, daß sein Schwerpunkt am höchsten liegt. Die geringste Erschütterung veranlaßt aber ein sofortiges Umschlagen dieses Systems, indem es in die entgegengesetzte Lage $A'B'$ auf der concaven Seite des untern Halbkreises übergeht und

daselbst nach einigen Schwankungen zur Ruhe kömmt. — Wird das System aus dieser Gleichgewichtslage, bei welcher der Schwerpunkt am tiefsten liegt, nach der einen oder andern Seite hin entfernt, so kehrt es jedesmal wieder darin zurück, sobald es sich selbst überlassen ist.

§. 178.

Stabiles und labiles Gleichgewicht. Aus dem so eben Dargelegten geht eine bemerkenswerthe Verschiedenheit hervor, hinsichtlich der Beschaffenheit des Gleichgewichtes, dessen ein System in verschiedenen Lagen gegen seine Unterstützungen, nach Maßgabe der Verbindungen zwischen den einzelnen Körpern desselben, fähig ist.

Das Gleichgewicht ist nämlich entweder nachhaltiger Art (dauernd), wenn nach einer geringen Störung desselben das System ein Bestreben kund giebt, in seine erste Lage zurückzukehren; oder es ist nur augenblicklich vorhanden, wenn gegentheils das System sich von seiner ersten Gleichgewichtslage, sei es auch noch so wenig daraus entfernt worden, immer weiter zu entfernen, d. h. umzuschlagen strebt. Den ersten Zustand nennt man das stabile, den zweiten das labile Gleichgewicht, und das Vorhandensein beider Zustände ist, wie aus den obigen Betrachtungen erhellet, an die Bedingung eines Maximums oder Minimums in Absicht auf die Lage des Schwerpunktes geknüpft.

Hiemit sind zugleich die Mittel angedeutet, um sich in jedem besondern Falle von der Beschaffenheit des Gleichgewichtes Kenntniß zu verschaffen, wozu die in §. 176 vorgetragenen drei ersten Aufgaben passende Beispiele darbieten.

Man kann noch einen dritten Zustand unterscheiden, darin bestehend, daß das System, wenn es aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und dann sich selbst überlassen wird, weder ein Bestreben zeigt, in die erste Lage zurückzukehren, noch sich weiter von derselben zu entfernen. Wegen dieses

indifferenten Verhaltens könnte man den fraglichen Zustand füglich ein neutrales Gleichgewicht nennen. Es findet übrigens in dem besondern Falle statt, wenn mit einer Änderung der Lage des Systems keine Störung seines Gleichgewichtes verbunden ist, und in diesem Falle rückt der Schwerpunkt desselben (nach §. 175, Zus. 2), ohne sich zu erheben oder zu senken, in horizontaler Richtung fort. — Die beiden letzten Aufgaben in §. 176 können als Beispiele eines neutralen Gleichgewichtszustandes dienen.

Ein Beispiel zur Erläuterung aller drei Zustände bietet noch der normale Kegel dar. Unterstützt von einer festen Horizontalebene ist derselbe im stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem er in vertikaler Stellung seiner Achse mit seiner vollen Grundfläche oder mit der Spitze auf die Ebene gestellt ist; wogegen für diesen Körper ein neutrales Gleichgewicht stattfindet, wenn er die unterstützende Ebene mit einer Seitenlinie seiner Mantelfläche berührt.

§. 179.

Begriff der Stabilität. Befindet sich ein Körper auf festen Unterstützungen im stabilen Gleichgewichte, so daß also sein Schwerpunkt die tiefste Stelle einnimmt, dann kann seine Lage nicht ohne Erhebung des letztern geändert werden, wozu aber allemal eine gewisse äußere Kraft nöthig ist. Denn da man sich das Gewicht des Körpers im Schwerpunkte desselben als eine lothrecht abwärts wirkende Kraft vereinigt denken kann, so erwächst daraus ein Widerstand gegen jene Erhebung, d. h. ein Streben zur unveränderten Beibehaltung der ursprünglichen Gleichgewichtslage.

Der Widerstand, den ein Körper der Änderung seiner Gleichgewichtslage entgegensetzt, oder die Größe seines Strebens, in diese Lage zurückzukehren, wenn eine wirkliche Änderung derselben stattgefunden hat, soll — ganz allgemein genommen — die Stabilität des Körpers genannt werden;

obwohl man unter dieser Benennung häufig auch die zur Änderung der Gleichgewichtslage erforderliche Kraft zu begreifen pflegt*).

Um die Stabilität eines im Gleichgewicht befindlichen Körpers durch Formeln auszudrücken, kommen in jedem besondern Fall die Hülfsmittel zur Anwendung, welche die in den ersten vier Kapiteln entwickelten Gesetze darbieten. Soll z. B. die Gleichgewichtslage eines unterstützten Körpers durch drehende Bewegung geändert werden, ein Fall, der in der Praxis häufig vorkömmt, so ist der Widerstand, den der Körper einer solchen Bewegung entgegensetzt, durch das statische Moment seines Gewichtes in Bezug auf die Drehachse auszudrücken, und der Ausdruck der Stabilität ist daher das Produkt aus dem Gewicht in den kürzesten Abstand des Schwerpunktslothes von der genannten Achse.

Zusatz. Die Stabilität eines Körpers, der sich im Zustande des labilen Gleichgewichts befindet, ist in Bezug auf die eines Körpers im stabilen Gleichgewichte als negativ aufzufassen. Denn wenn der Körper etwas aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird, so zeigt er im letzten Falle das Streben, in dieselbe zurückzukehren; im ersten Falle dagegen das Streben, sich noch weiter von ihr zu entfernen, und beide Bestrebungen sind daher entgegengesetzten Sinnes.

Für den neutralen Gleichgewichtszustand ist die Stabilität gleich Null, weil hier weder ein Streben in dem einen, noch in dem entgegengesetztem Sinne stattfindet.

§. 180.

Stabilität schwerer Körper auf wagerechten Ebenen. Nach dem Vorhergehenden ist das Gleichgewicht

*) Man vergl. Eytelwein, Handbuch der Statik fester Körper, Band I. §. 160; Grunert, Statik fester Körper, §. 215 ꝛc.; wo überhaupt die Lehre von der Stabilität auf eine von der hier gegebenen Darstellung ganz abweichende Weise vorgetragen wird.

eines Körpers, der sich auf mehrere feste Flächen stützt, stabiler oder labiler Art, jenachdem eine geringe Änderung seiner Gleichgewichtslage eine Erhebung oder Senkung des Schwerpunktes zur Folge hat. Dies soll hier als ein einfaches Kennzeichen festgehalten werden, um danach die Beschaffenheit des Gleichgewichtes für den besondern Fall zu beurtheilen, wo der Körper durch eine feste Horizontalebene, die er mit mehreren Punkten seiner Oberfläche berührt, unterstützt ist. — Wir setzen voraus, daß diese Berührungspunkte nicht in einer geraden Linie liegen, so kann man sie entweder alle, oder nur eine gewisse Anzahl von ihnen, durch gerade Linien so verbunden denken, daß eine geschlossene Figur mit lauter hohlen Winkeln entsteht. Diese Figur soll hier die Grundfläche des Körpers genannt werden.

Berührt der Körper die ihn unterstützende Horizontalebene mit einer ebenen Seitenfläche, welche nur auswärts gehende Winkel hat, dann ist diese selbst als seine Grundfläche zu betrachten. Hat sie dagegen auch einwärts gehende Winkel, so muß man dieselben durch geradlinige Verbindung der beiden, einem solchen Winkel zunächst liegenden, äußern Eckpunkte abgeschnitten denken, um die Grundfläche des Körpers zu bilden.

Dies vorausgesetzt, und angenommen zugleich, der Körper könne auf der festen Horizontalebene nicht verschoben, sondern nur dadurch aus seiner Lage gebracht werden, daß er sich um eine der Seitenlinien seiner Grundfläche wie um eine feste Achse dreht, so läßt sich das Vorhandensein des Gleichgewichts und die Beschaffenheit desselben folgendergestalt auf die Lage des Schwerpunktslothes gegen den Umfang der Grundfläche zurückführen:

1) Kann kein Gleichgewicht statt finden, sobald die lothrechte Linie durch den Schwerpunkt des Körpers die Grundfläche des letztern außerhalb ihrer Umgrenzung schneidet.

Denn in diesem Falle vereinigen sich die Repulsivkräfte, welche die Widerstände der festen Ebene gegen die Stützpunkte des Körpers ersetzen, zu einer vertikalen Mittelkraft, welche durch die dem Schwerpunktslothe zunächstliegende Seitenlinie der Grundfläche geht; und wenn ebenso das eigene Gewicht des Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt gedacht wird, so bildet dieses mit jener Mittelkraft ein Kräftepaar, welches nach §. 63 stets ein Bestreben zur Drehung äußert. In Folge dessen muß also, sofern der Körper der alleinigen Einwirkung seiner Schwere überlassen ist, ein Umschlagen desselben erfolgen.

2) Schneidet das Schwerpunktsloth die Grundfläche des Körpers in ihrem Umfange, oder in einer ihrer Seitenlinien, so läßt sich in derselben Weise, wie im ersten Falle, ein Kräftepaar bilden, dessen Intervall aber gleich Null ist. Es findet also Gleichgewicht statt, aber von labiler Beschaffenheit; denn es kann durch jede noch so geringe Erschütterung des Körpers gestört werden, was dann eine sofortige Senkung seines Schwerpunktes und demnächst ein Umschlagen zur Folge hat.

3) Fällt endlich das Schwerpunktsloth ganz innerhalb des Umfangs der Grundfläche, so ist offenbar ein stabiles Gleichgewicht vorhanden. Denn in diesem Falle läßt sich die Lage des Körpers nur durch eine Erhebung seines Schwerpunktes ändern, wozu eine Kraft von bestimmter Größe erforderlich ist.

Mit Hinsicht auf die praktische Anwendung interessirt uns vornehmlich der zuletzt erwähnte Fall, für den wir also zunächst den Ausdruck der Stabilität zu suchen haben. Zu diesem Ende denke man sich aus dem Punkte, in welchem das Schwerpunktsloth die Grundfläche schneidet, auf eine Seitenlinie der letztern einen Perpendikel gefällt, so stellt derselbe den Hebelsarm vor, an welchem der Körper durch sein eigenes Gewicht der Drehung um jene Seitenlinie widersteht.

Das Produkt aus der Länge dieses Perpendikels in das Gewicht des Körpers drückt dann, nach Inhalt des vorigen Paragraphen, die gesuchte Stabilität in Bezug auf die fragliche Grundkante aus.

§. 181.

Anwendung auf einen bestimmten Fall. Die Figur 124 stelle einen Körper vor, dessen horizontale Grundfläche **ABCD** und dessen Gewicht = **Q** ist. Die Vertikale durch seinen Schwerpunkt **G** schneide die Grundfläche innerhalb ihres Umfanges in **H**, aus welchem Punkte die Linie **HK** normal auf die Grundkante **AB** gezogen werde. Der Körper hat daher ein stabiles Gleichgewicht, und gemäß der obigen Erklärung drückt nun das Produkt $Q \times HK$ die Stabilität desselben in Bezug auf die Kante **AB** als Achse, also das Widerstandsmoment gegen jede Kraft aus, die das Bestreben hat, den Körper durch Drehung um **AB** aus seiner Gleichgewichtslage zu bringen.

Stellt z. B. **P** eine solche Kraft vor, welche nach der mit **HK** parallelen Richtung **GP** am Schwerpunkte **G** angebracht ist, und setzt man voraus, diese Kraft sei mit dem Gewichte **Q** des Körpers so im Gleichgewicht, daß jede noch so geringe Vergrößerung derselben eine Störung des Gleichgewichtes zur Folge hat, so müssen offenbar die Momente von **P** und **Q** in Bezug auf **AB** als Drehachse einander gleich sein. Ist also **KI** normal auf **GP**, so hat man die statische Momentengleichung:

$$P \cdot IK = Q \cdot HK;$$

woraus sich $P : Q = HK : IK$ ergiebt.

Für den Zustand des Gleichgewichtes verhalten sich also die beiden Kräfte **P** und **Q** zu einander wie die Seiten **HK** und **IK**, oder wie die ihnen gleichen Seiten **GI** und **GH** des Parallelogrammes **GHKI**. Wenn man also diese Seiten als die Repräsentanten der nach ihren Richtungen wir-

kenden Kräfte P und Q betrachtet, so stellt die Diagonale GK jenes Parallelogrammes die Größe und Richtung ihrer Mittelkraft vor. Demnach läßt sich die Bedingung des Gleichgewichtes auch dahin ausdrücken, daß die Richtungslinie der Mittelkraft jener beiden Kräfte diejenige Grundkante schneidet, um welche sich der Körper beim Umfallen drehen muß. Denn eine Kraft, welche größer ist als die vorhin angenommene P, z. B. der Linie GL > GI proportional, liefert mit dem Gewichte Q eine Mittelkraft GM, welche die Grundfläche des Körpers außerhalb ihrer Umgrenzung in M schneidet, und daß unter diesen Umständen der Körper nicht in Ruhe bleiben kann, bedarf keiner weitern Ausführung.

§. 182.

Stabilität eines rechtwinkligen Parallelepipedums. Es stelle ABCD (Fig. 125) den vertikalen Durchschnitt durch den Schwerpunkt G des genannten Körpers vor, MN sei der Durchschnitt der festen Grundebene, worauf derselbe steht, und Q sei das Gewicht des Körpers, dessen Richtungslinie GQ die Grundfläche AB in H schneidet. In Bezug auf die durch den Punkt A gehende Kante ist dann die Stabilität, welche fortan stets mit S bezeichnet werden soll, gleich

$$S = Q \cdot AH = \tfrac{1}{2} Q \cdot AB,$$

weil $AH = \frac{1}{2} AB$ ist. Setzt man die Höhe $AD = BC = h$, die Breite $AB = DC = b$, und bezeichnet mit l die Länge des Körpers, mit q das Gewicht der Kubikeinheit seiner Materie, so hat man $Q = bhlq$; daher

$$S = \tfrac{1}{2} q \cdot b^2 hl.$$

Demnach ist die Stabilität einer auf beiden Seiten lothrechten Mauer, unter übrigens gleichen Umständen, dem Quadrate ihrer Breite, aber der einfachen Höhe und Länge proportional. Die Stabilität kann daher leichter

durch Vergrößerung der Breite als einer der andern Abmessungen erhöht werden, daher man in der Praxis immer trachtet, den Mauern durch Anbringung von Plinten, Banketts ꝛc. eine möglichst breite Basis zu geben.

Wirkt in der Ebene des Durchschnittes **ABCD** im Punkte **E** eine Kraft **P** auf die Mauer, deren Richtung mit der Vertikalen **BC** den Winkel α bildet, und soll die Größe dieser Kraft so bestimmt werden, daß sie mit dem Gewichte **Q** des Körpers in Bezug auf Drehung um die durch **A** gehende Längenkante im Gleichgewicht ist, so muß ihr statisches Moment der vorhin berechneten Stabilität gleichgesetzt werden. Man fälle den Perpendikel **AF** auf die Richtung von **P**, setze $\mathbf{BE} = a$, so ergiebt sich sehr leicht $\mathbf{AF} = a\,\mathrm{Sin}\alpha - b\,\mathrm{Cos}\alpha$; und da diese Linie den Hebelsarm von **P** vorstellt, so hat man die Momentengleichung

$$P(a\,\mathrm{Sin}\alpha - b\,\mathrm{Cos}\alpha) = \tfrac{1}{2}q \cdot b^2 hl,$$

woraus folgt: $$P = \frac{\frac{1}{2}qb^2hl}{a\,\mathrm{Sin}\alpha - b\,\mathrm{Cos}\alpha}.$$

Es könnte aber auch verlangt werden, die Breite der Mauer der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß sie durch die Wirkung einer gegebenen Kraft **P** nicht umgeworfen werden kann. Zur Beantwortung dieser Frage müßte aus obiger Momentengleichung **b** entwickelt werden, wofür man findet:

$$b = \frac{-P\,\mathrm{Cos}\alpha + \sqrt{P(P\mathrm{Cos}\alpha^2 + 2qahl\,\mathrm{Sin}\alpha)}}{qhl}.$$

Diese Beispiele lassen zur Genüge ersehen, wie die Stabilität irgend eines Körpers bei Beantwortung der von der Praxis gestellten Fragen in Anwendung kömmt, und daher beschränken wir uns hier darauf, nur noch wenige Beispiele folgen zu lassen.

§. 183.

Stabilität eines prismatischen Körpers mit trapezförmigem Querschnitte. Das Paralleltrapez

ABCD (Fig. 126) ſtelle den vertikalen Querſchnitt des Körpers vor, deſſen Stabilität in Bezug auf die durch den Punkt **A** gehende Längenkante beſtimmt werden ſoll.

Um zuerſt die Abmeſſungen des genannten Querſchnittes feſtzuſtellen, denke man die Perpendikel **CE**, **DF** auf die Grundebene **AB** gefällt, bezeichne die Länge derſelben mit **h**, die obere Breite **CD** mit **x** und ſetze **AF** = **y**, **BE** = **z**. Iſt nun **l** die Länge des Körpers, **q** das Gewicht von einem Kubikfuß der Materie, woraus derſelbe beſteht, ſo ergiebt ſich das Moment des dreikantigen Prismas **ADF** in Bezug auf die Kante bei **A** gleich

$$\tfrac{1}{2}yhlq\cdot\tfrac{2}{3}y = \tfrac{1}{3}qhl\cdot y^2.$$

Das Moment des Parallelepipedums **CDFE** in Bezug auf dieſelbe Kante als Achſe iſt gleich

$$xhlq(y+\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}qhl(2xy+x^2);$$

und das Moment des dreikantigen Prismas **BCE** gleich

$$\tfrac{1}{2}zhlq(y+x+\tfrac{1}{3}z) = \tfrac{1}{6}qhl(3yz+3xz+z^2).$$

Addirt man dieſe drei Momente, ſo erhält man für das Moment des ganzen Körpers, d. h. für die Stabilität deſſelben in Bezug auf die Kante bei **A**, den Ausdruck

(I.) $S = \tfrac{1}{6}qhl(2y^2+6xy+3x^2+3yz+3xz+z^2).$

Für den Fall, daß die beiden Seiten **AD** und **BC** gleiche Neigung gegen die Grundlinie **AB** haben, iſt $y = z$ zu ſetzen, und die vorige Gleichung reducirt ſich auf folgende:

(II.) $S = \tfrac{1}{2}qhl(x^2+3xy+2y^2) = \tfrac{1}{2}qhl(x+y)(x+2y).$

Iſt dagegen die eine Seite **CB** (Fig. 127) auf der Grundlinie **AB** normal, ſo muß $z = 0$ geſetzt werden, und es entſteht:

(III.) $S = \tfrac{1}{6}qhl(2y^2+6xy+3x^2).$

Für den in Fig. 128 angenommenen Fall hat man $y = 0$ zu ſetzen, wo dann entſteht

(IV.) $S' = \tfrac{1}{6}qhl(3x^2+3xz+z^2).$

Nimmt man in den beiden letzten Formeln y und z als gleich an, und subtrahirt beide Ausdrücke, so kömmt

$$S - S' = \tfrac{1}{6} q h l \cdot y(3x + y),$$

ein Ausdruck, welcher angiebt, um wieviel die Stabilität einer Mauer von dem in Fig. 127 dargestellten Profil unter übrigens gleichen Umständen größer ist, als für das umgekehrte Profil Fig. 128. Wenn also in beiden Fällen gegen die Seitenfläche **BC** irgend eine Kraft drückt, so daß die in **A** projicirte Kante zur Drehachse wird, dann gewährt das zuerst genannte Profil hinsichtlich der Standfestigkeit der Mauer einen entschiedenen Vortheil gegen das zuletzt genannte Profil.

§. 184.

Vergleichung der Stabilitäten für rechtwinklige und trapezförmige Querschnitte. Man denke sich zwei Mauern aus gleichem Material aufgeführt, die eine mit einem rechtwinkligen Profil (Fig. 125), die andere mit dem trapezförmigen Profil (Fig. 127), beide aber mit gleichen Längen l und gleichen Höhen h. Wirken nun gegen die Seitenflächen **BC** dieser Mauern Kräfte mit dem Bestreben, sie um die Grundkanten bei **A** zu drehen — umzuwerfen — und man setzt die Breite b der an beiden Seiten lothrechten Mauer als gegeben voraus, so sollen die Breitenabmessungen der trapezförmigen Mauer der Bedingung gemäß bestimmt werden, daß sie mit jener eine gleiche Stabilität erhalte.

Nach dem Vorhergehenden werden die Stabilitäten beider Mauern bezüglich durch $\frac{1}{6} q h l (3x^2 + 6xy + 2y^2)$ und $\frac{1}{4} q h l b^2$ ausgedrückt, und diese Ausdrücke müssen den Bedingungen der Aufgabe gemäß einander gleich gesetzt werden. Also hat man

$$3x^2 + 6xy + 2y^2 = 3b^2.$$

Da diese Gleichung zwei Unbekannten enthält, so muß man der Aufgabe noch eine anderweitige Bedingung hinzufügen, um sie zu einer bestimmten zu machen. In der Praxis pflegt

nun die Horizontalprojection AF (Fig. 127) der Böschungsfläche AD gewöhnlich als ein aliquoter Theil der Höhe DF gegeben zu sein, und demgemäß kann man $y = mh$ setzen, unter m einen ächten Bruch verstanden. Nach Einsetzung dieses Werthes von y verwandelt sich die obige Gleichung in folgende:

$$3x^2 + 6mhx + 2m^2h^2 = 3b^2$$

aus welcher demnächst gefunden wird:

$$x = -mh + \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{3}m^2h^2}.$$

Diese Formel liefert die obere Breite der trapezförmigen Mauer, während deren untere Breite durch

$$x + mh = \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{3}m^2h^2}.$$

ausgedrückt wird. Der Inhalt ihres Querschnittes ist daher

$$\tfrac{1}{2}DF(AB + DC) = \tfrac{1}{2}h\left(-mh + 2\sqrt{b^2 + \tfrac{1}{3}m^2h^2}\right),$$

wogegen bh den Inhalt des Rechteckes (Fig. 125) ausdrückt. Bei den hier vorausgesetzten gleichen Längen der beiden Mauern verhalten sich aber die kubischen Inhalte wie die Querschnitte derselben; daher lassen sich nun leicht die nöthigen Vergleichungen in Bezug auf den Materialbedarf zur Aufführung der beiden in Rede befindlichen Mauern anstellen.

Beispiel. Gesetzt, es sei von einer Mauer mit rechteckigem Querschnitte bekannt, daß sie hinreichende Stabilität besitzt, einer gewissen auf sie einwirkenden Kraft in Bezug auf das Umwerfen zu widerstehen, sobald ihre Breite den dritten Theil der Höhe beträgt, und man wollte zur Ersparung an Material anstatt dieser Mauer eine andere mit trapezförmigem Querschnitte aufführen, welche bei gleicher Höhe und Länge der einwirkenden Kraft denselben Widerstand entgegen zu setzen vermag. Nach der Beschaffenheit des in Anwendung zu bringenden Materials kann die horizontale Projection der Böschungsfläche nur den 12ten Theil der Höhe betragen; wie groß ist die obere Breite x dieser Mauer anzunehmen?

Hier ist also $b = \frac{1}{3}h$, $m = \frac{1}{12}$ zu setzen, und dafür findet man nach der vorhin entwickelten Formel:

$$x = -\tfrac{1}{12}h + \sqrt{(\tfrac{1}{3}h)^2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{12}h)^2} = \tfrac{1}{12}h(-1 + \sqrt{16{,}3333}),$$

oder $x = \frac{1}{12}h(-1 + 4{,}04) = \frac{1}{4}h$ nahe genug.

Der Querschnitt der auf beiden Seiten lothrechten Mauer hat nun den Inhalt $bh = \frac{1}{3}h^2$, wogegen der Inhalt des trapezförmigen Quer-

schnittes der Böschungsmauer gleich $\frac{1}{2}h(2 \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{12}h) = \frac{7}{24}h^2$ ist. Daher wird bei Aufführung der letzten Mauer anstatt der ersten $\frac{1}{2} - \frac{7}{24} = \frac{5}{24}$ an Material erspart, während die Stabilität dieselbe bleibt.

§. 185.

Stabilität runder Körper. Bei den vorhergehenden Aufgaben haben wir nur solche Körper vorausgesetzt, deren Grundflächen geradlinige Figuren waren, wo dann jedesmal eine Seitenlinie dieser Figuren als Drehachse angenommen wurde. Ist aber die Grundfläche durch irgend eine Curve begrenzt, so muß man sich die Drehachse, welche sich beim Umwerfen des Körpers bildet, als eine Tangente zu jener Curve denken.

Steht z. B. ein normaler Cylinder vom Halbmesser r und von der Höhe h mit einer seiner Endflächen auf einer festen Horizontalebene, so trifft das Schwerpunktsloth den Mittelpunkt der Grundfläche; der Körper hat also nach jeder Richtung hin dieselbe Stabilität, welche durch das Product aus seinem Gewichte in den Radius der Grundfläche ausgedrückt wird. Ersteres ist aber gleich $\pi r^2 hq$, wenn q die früher angegebene Bedeutung beibehält, und daher ist

$$(1) \qquad S = \pi r^2 hq \cdot r = \pi q h r^3$$

der Ausdruck für die Stabilität des Cylinders.

Eben so ist unter denselben Voraussetzungen die Stabilität eines normalen Kegels mit vertikaler Achse

$$(2) \qquad S = \tfrac{1}{3}\pi r^3 hq \cdot r = \tfrac{1}{3}\pi q h r^3.$$

Sind beide Körper so auf die horizontale Ebene gelegt, daß ihre Mantelflächen dieselbe in einer geraden Linie berühren, so ist die Stabilität in Bezug auf diese Berührungslinie als Achse für jeden Körper gleich Null.

§. 186.

Stabilität auf geneigten Ebenen. Bei den bisherigen Untersuchungen über die Stabilität der Körper haben wir uns dieselben immer als auf horizontalen Ebenen stehend

gedacht. Aber die Bedingungen des Gleichgewichtes bleiben dieſelben, wenn man vorausſetzt, daß ſie auf ſchiefen Ebenen ſtehen, die ſie mit einer ebenen Seitenfläche als Grundfläche berühren, und daß jedes Abgleiten durch anderweitige Hinderniſſe unmöglich gemacht wird. Wenn nämlich die lothrechte Linie durch den Schwerpunkt des Körpers die ſchiefe Ebene in einem Punkte innerhalb der Grundfläche ſchneidet, ſo findet ein ſtabiles Gleichgewicht ſtatt. Liegt der Durchſchnittspunkt in der Umfangslinie der Grundfläche, ſo iſt ein labiles, und wenn er ganz außerhalb der Grundfläche fällt, ſo iſt gar kein Gleichgewicht vorhanden.

Es ſei **ABC** (Fig. 129) der Durchſchnitt des auf der geneigten Ebene befindlichen Körpers mit einer verticalen Ebene, welche ſeine Grundfläche in **AB** und die geneigte Ebene in **MN** ſo ſchneidet, daß jede in dieſer gezognene Horizontallinie normal auf **AB** iſt. **GQ** ſei die lothrechte Linie durch den Schwerpunkt **G**, welche die ſchiefe Ebene innerhalb der Grundfläche **AB** ſchneidet und **Q** ſei das Gewicht des Körpers.

Um von dieſem Körper die Stabilität in Bezug auf die durch **A** gehende horizontale Berührungslinie der Grundfläche zu finden, ziehe man die Linie **AD** normal auf **GQ**, ſo iſt $Q \cdot AD$ der Ausdruck für die Stabilität. Aus dem Schwerpunkte **G** werde der Perpendikel **GE** auf die ſchiefe Ebene gefällt und durch **E** die lothrechte Linie **EF** gezogen, welche ſich mit der Verlängerung der Horizontalen **AD** in **F** ſchneidet. Bezeichnet nun α den Neigungswinkel der ſchiefen Ebene gegen den Horizont, ſo kann bewieſen werden, daß $\angle EGQ = \angle EAF = \angle \alpha$ iſt. Setzt man alſo $AE = a$, $EG = b$, ſo iſt $AD = AF - DF = a\,\mathrm{Cos}\,\alpha - b\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; folglich die geſuchte Stabilität **S** gleich

$$S = Q(a\,\mathrm{Cos}\,\alpha - b\,\mathrm{Sin}\,\alpha).$$

Soll der Neigungswinkel α ſo beſtimmt werden, daß für den Körper **ABC** ein labiles Gleichgewicht eintritt, daß alſo

bei jeder noch so kleinen Vergrößerung von α ein Umschlagen des in Rede befindlichen Körpers erfolgt, so muß $S = 0$ gesetzt werden. Dadurch erhält man die Gleichung

$$a\,\mathrm{Cos}\alpha - b\,\mathrm{Sin}\alpha = 0;\ \text{folglich}\ \mathrm{Tang}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Beispiele. 1) Ist ABC eine Halbkugel, AE = EB = a ihre Halbmesser, so ist nach §. 159 EG = ⅜a. Mithin

$\mathrm{Tg}\alpha = \frac{3}{8} = 2{,}6666\ldots$; und also $\alpha = 69°\ 26'\ 38''$.

2) Ist der Körper ein Kubus, AB = 2a die Seite desselben, so ist GL = ½AB = a; also $\mathrm{Tg}\alpha = 1$; und folglich $\alpha = 45°$. U. s. w.

III. Von den einfachen Maschinen.

§. 187.

Unter der Benennung Maschinen sollen hier gewisse Verbindungen von festen Körpern verstanden werden, welche dazu bestimmt sind, die Größen und Richtungen der daran wirkenden Kräfte so zu modifiziren, daß dadurch für diese ein Gleichgewicht eintritt, welches ohne Mitwirkung eines solchen festen Systems nicht stattfinden könnte.

Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte Maschinen, insofern jede von diesen als eine Zusammensetzung aus mehreren von jenen betrachtet werden kann. Die Zahl der zusammengesetzten Maschinen ist so unbegrenzt, wie die Mannichfaltigkeit der Combinationen, deren der menschliche Geist fähig ist. Dagegen zählt man gewöhnlich nur sechs einfache Maschinen, nämlich die schiefe Ebene, den Keil, die Schraube, den Hebel, die Rolle und das Rad an der Welle.

Strenge genommen sind indeß nur die schiefe Ebene und der Hebel eigentliche Elementar-Maschinen zu nennen, da diese nicht mehr auf einfachere Prinzipe zurückgeführt, die andern vier genannten aber aus ihnen abgeleitet werden können. Hier sollen aber alle sechs Maschinen, die man auch wohl unter der gemeinschaftlichen Benennung der statischen

Potenzen zu begreifen pflegt, in der Reihenfolge, wie ſie oben genannt wurden, abgehandelt werden, wobei jedoch auf Reibung und andere phyſiſche Hinderniſſe vorläufig noch keine Rückſicht genommen werden kann.

§. 188.

Die ſchiefe Ebene. Jede feſte und unbiegſame, unter einem beliebigen Winkel gegen den Horizont geneigte Ebene, auf welche ſich ein ſchwerer Körper ſtützt, der von einer auf ihn wirkenden äußern Kraft und von der Repulſivkraft der feſten Ebene im Gleichgewichte erhalten wird, ſoll ſchiefe Ebene genannt werden.

Stellt **ABC**, Fig. 130, eine vertikale Ebene vor, auf welcher die ſchiefe Ebene, deren Seitenanſicht die Linie **AB** iſt, normal ſteht, ſo heißt der Winkel $BAC = \alpha$ die Neigung der fraglichen ſchiefen Ebene gegen den Horizont **AC**. Das von **B** auf **AC** gefällte Loth **BC** ſoll die Höhe, **AC** ſelbſt die Grundlinie oder Baſis, und **AB** die Länge der ſchiefen Ebene genannt werden.

Bei den folgenden Unterſuchungen nehmen wir zuerſt den einfachſten Fall an, daß nämlich die zur Erhaltung des Gleichgewichts erforderliche Kraft am Schwerpunkte des Körpers angebracht ſei, und demnächſt ſoll der Fall, wo ein beliebiger Punkt des Körpers als Angriffspunkt jener Kraft angenommen iſt, unterſucht werden.

§. 189.

Man denke ſich alſo einen beliebigen Körper **EFG** vom Gewicht **Q** auf die ſchiefe Ebene **AB** (Fig. 130) geſtellt, und am Schwerpunkte **G** dieſes Körpers eine äußere Kraft, deren Richtungslinie in der durch **G** parallel mit **ABC** gelegten Ebene enthalten iſt, ſo angebracht, daß ſie den Körper im Gleichgewichte erhält. Nach welcher Richtung dieſe Kraft auch wirken möge, ſo iſt klar, daß ſie mit dem Gewichte **Q** eine Mittelkraft liefern muß, die im Falle des Gleichgewichtes

auf der unterstützenden Ebene **AB** normal sein, und dieselbe innerhalb der Grundfläche **EF** des Körpers schneiden muß. Den Widerstand jener festen Ebene gegen diese Grundfläche hat man daher als eine Kraft **R** zu betrachten, die dem genannten Drucke gleich und gerade entgegen gesetzt ist, und deren Richtungslinie durch den Schwerpunkt **G** geht.

1) Wirkt am Schwerpunkte des Körpers eine Kraft **P** nach der mit der Horizontalen **AC** parallelen Richtung **GP**, so hat man drei Kräfte **P**, **Q** und **R**, die am Punkte **G** mit einander im Gleichgewichte sind. Die Richtungslinien dieser Kräfte stehen bezüglich auf den Seiten **BC**, **AC** und **AB** des Dreieckes **ABC** senkrecht, und ihre Intensitäten müssen also den genannten Seiten proportinal sein (§. 42. 2). Demnach hat man die Proportion:

$$P : Q : R = BC : AC : AB;$$

aus welcher sich ergiebt, Q als gegeben vorausgesetzt,

$$P = \frac{BC}{AC} \cdot Q; \quad R = \frac{AB}{AC} \cdot Q.$$

Diese beiden Ausdrücke lassen sich auch folgendermaßen darstellen:

$$P = Q \cdot \mathrm{Tang}\alpha; \quad R = Q \cdot \mathrm{Sec}\alpha.$$

2) Statt der horizontalen Kraft **P** denke man sich nun am Schwerpunkte des Körpers eine Kraft **P'** angebracht, deren Richtungslinie mit der Länge **AB** der schiefen Ebene parallel ist. Bezeichnet jetzt **R'** die entsprechende Repulsivkraft der letztern, so hat man, da dieselbe ebenfalls durch den Schwerpunkt gehen muß, die drei Kräfte **P'**, **Q** und **R'** an diesem Punkte als im Gleichgewichte mit einander zu betrachten.

Um die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, fälle man aus **C** den Perpendikel **CD** auf **AB**, so wird dadurch das Dreieck **ABC** in zwei Dreiecke **ACD** und **BCD** zerlegt, welche einander und dem ganzen Dreieck ähnlich sind.

Jedes von dieſen beiden Dreiecken hat nun eine ſolche Lage, daß ſeine Seiten entweder auf den Richtungen der Kräfte P', Q, R' normal oder mit denſelben parallel ſind. Letzteres iſt namentlich mit dem Dreieck BCD der Fall, und daraus folgt die Proportion

$$P' : Q : R' = BD : BC : CD.$$

Wegen der erwähnten Ähnlichkeit verhält ſich aber auch

$$BD : BC : CD = BC : AB : AC,$$

ſo daß man alſo hat

$$P' : Q : R' = BC : AB : AC.$$

Daraus folgt $P' = \frac{BC}{AB} \cdot Q$; $R' = \frac{AC}{AB} \cdot Q$;

oder $P' = Q \operatorname{Sin} \alpha$; $R' = Q \operatorname{Cos} \alpha$;

3) Wenn es ſich bloß um eine Vergleichung der in beiden Fällen erforderlichen Kräfte P, P' mit dem Gewichte Q des von ihnen im Gleichgewicht zu erhaltenden Körpers handelt, ſo kann man die entſprechenden Proportionen

$$P : Q = BC : AC,$$

und

$$P' : Q = BC : AB,$$

zu folgender fortlaufenden Proportion vereinigen:

$$P : P' : Q = \frac{1}{AC} : \frac{1}{AB} : \frac{1}{BC}.$$

D. h. jede von den drei Kräften P, P' und Q iſt der mit ihrer Richtung parallelen Abmeſſung der ſchiefen Ebene umgekehrt proportional.

Zuſatz. Die vorſtehend entwickelten Geſetze hätte man auch, wenngleich nicht einfacher, noch auf andern Wegen finden können; unter Anderm durch Hülfe des Carteſiſchen Grundſatzes (§. 107). Denkt man ſich nämlich eine fortgehende Bewegung des Körpers längs der ſchiefen Ebene veranlaßt, ſo daß der Schwerpunkt von G nach G' fortrückt, und aus G' den Perpendikel G'H auf die Horizontale GP gefällt, ſo ſtellen, für das Gleichgewicht zwiſchen P und Q

bezüglich GH und G'H, für das Gleichgewicht zwiſchen P' und Q aber GG' und G'H die virtuellen Geſchwindigkeiten der genannten Kräfte vor. Nach dem Carteſiſchen Satze hat man alſo nach einander:

$$P : Q = G'H : GH = BC : AC,$$
$$P' : Q = G'H : GG' = BC : AB,$$

wobei zugleich die Ähnlichkeit der Dreiecke GG'H und ABC berückſichtigt worden iſt.

§. 190.

Fall, wo die Richtung der Kraft nicht durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Es ſtelle AB (Fig. 131) die ſchiefe Ebene vor, deren Neigungswinkel gegen den Horizont mit α bezeichnet werden ſoll. In C ſtütze ſich der Körper CD vom Gewichte Q auf dieſelbe und werde durch die in D angebrachte Kraft P im Gleichgewicht erhalten. Denkt man ſich die Punkte C und D durch eine gerade Linie CD verbunden, ſo ſoll vorausgeſetzt werden, daß dieſe Linie und die Richtungslinie von P ſich in einer auf der ſchiefen Ebene normalen Vertikalebene befinden, welche letztere zugleich den Schwerpunkt des Körpers enthält. Unter dieſen Umſtänden ſchneidet ſich das Schwerpunktsloth GQ mit CD in einem Punkte E, deſſen Abſtand CE von dem Stützpunkte C wir mit b bezeichnen wollen, während CD = a ſein mag. Endlich ſei β der Winkel, den die Richtung von P mit der Verbindungslinie CD, und γ ſei der Winkel, den dieſe Linie ſelbſt mit der Horizontalen CF bildet.

Um nun die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, denke man ſich die Gegenwirkung der ſchiefen Ebene als eine in C normal auf AB wirkende Kraft R angebracht, dann hat man drei mit einander im Gleichgewicht befindliche Kräfte P, Q und R, deren Richtungslinien in einer Ebene liegen. Auf ſie finden alſo die im erſten Abſchnitt des dritten Kapitels vorgetragenen Lehren Anwendung, und zwar erhält

man nach §. 82, wenn man alle drei Kräfte nach der Richtung von CD und normal auf dieſe Linie in Seitenkräfte zerlegt denkt, zunächſt folgende zwei Gleichungen:

(1) $R\,\mathrm{Sin}(\alpha+\gamma) = Q\,\mathrm{Sin}\,\gamma + P\,\mathrm{Cos}\,\beta;$

(2) $R\,\mathrm{Cos}(\alpha+\gamma) = Q\,\mathrm{Cos}\,\gamma - P\,\mathrm{Sin}\,\beta.$

Dieſelben drücken das Vorhandenſein des Gleichgewichtes in Bezug auf fortgehende Bewegung aus, und daher muß für das Gleichgewicht in Bezug auf drehende Bewegung noch eine dritte Bedingungsgleichung gebildet werden. Zu dieſem Behuf kann man C als Momentenpunkt, und die aus ihm auf die Richtungen von P und Q gefällten Perpendikel $CH = a\,\mathrm{Sin}\,\beta$, $CF = b\,\mathrm{Cos}\,\gamma$ als die Hebelsarme dieſer Kräfte annehmen. Man hat dann

(3) $P\,a\,\mathrm{Sin}\,\beta = Q\,b\,\mathrm{Cos}\,\gamma.$

Aus dieſen drei Gleichungen laſſen ſich nun drei von den darin vorkommenden Größen als unbekannt entwickeln, indem man die andern Größen als bekannt vorausſetzt. Wird z. B. zu beſtimmen verlangt: die zum Gleichgewicht des Körpers erforderliche Kraft P, der Normaldruck R auf die ſchiefe Ebene, und der Neigungswinkel α, den letztere mit dem Horizonte bilden muß, damit der durch ſie unterſtützte Körper im Gleichgewichte ſein kann, ſo findet man zunächſt aus (3)

$$P = \frac{b\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{a\,\mathrm{Sin}\,\beta}\cdot Q.$$

Quadrirt man (1) und (2) und addirt dann, ſo kömmt:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\,\mathrm{Sin}(\beta-\gamma);$$

alſo nach Einſetzung des Werthes von P,

$$R = \frac{Q}{a\,\mathrm{Sin}\,\beta}\sqrt{a^2\mathrm{Sin}\,\beta^2 + b^2\mathrm{Cos}\,\gamma^2 - 2ab\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Sin}(\beta-\gamma)}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) mit einander dividirt liefern, wenn für P wieder der Werth eingeſetzt wird,

$$\mathrm{Tang}(\alpha+\gamma) = \frac{a\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\gamma + b\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma}{(a-b)\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma},$$

eine Formel, mittelst welcher der Winkel α leicht berechnet werden kann.

Andere Entwicklungen aus den gefundenen Bedingungsgleichungen, so wie die Anwendung derselben auf Körper von bestimmter Form, mögen dem Leser zu seiner Übung anheimgestellt bleiben.

§. 191.

Der Keil. Jedes dreikantige Prisma, auf dessen Seitenflächen Kräfte wirken, die mit einander im Gleichgewichte sind, wird Keil genannt Gewöhnlich werden zwei von diesen drei Kräften als Widerstände betrachtet, mit welchen die dritte Kraft im Gleichgewicht ist. Die Seitenflächen des Prismas, auf welche jene wirken, pflegt man die Seiten, und die Fläche, worauf diese wirkt, den Rücken des Keiles zu nennen. Unter Schärfe oder Schneide versteht man diejenige Kante, welche dem Rücken gegenüber liegt.

Stellt **ABC** (Fig. 132) den Querschnitt des Prismas normal auf dessen Kanten vor, und sind **P**, **Q**, **R** die auf seine Seitenflächen wirkenden Kräfte, von welchen die erste als selbstthätige Kraft, die beiden andern aber als Widerstände betrachtet werden, dann ist nach obiger Erklärung **AB** der Rücken, **C** die Schärfe des Keils; **AC** und **BC** sind die Seiten desselben. Denkt man sich aus **C** den Perpendikel **CD** auf den Rücken **AB** gefällt, so nennt man diesen noch die Höhe des Keiles.

Am häufigsten wird der Keil angewendet, um die Theile eines Körpers von einander zu trennen, indem man ihn mit der Schärfe in eine Spalte desselben steckt und ihn dann, durch eine auf seinen Rücken angebrachte Kraft, mit Gewalt in den Körper hineintreibt und so denselben spaltet. Auch bedient man sich seiner, um durch eine mäßige Kraft sehr große Seitenpressungen hervorzubringen.

§. 192.

Gleichgewicht des Keiles. Es ſollen die Bedingungen des Gleichgewichts zwiſchen den am Keil wirkenden Kräften **P**, **Q**, **R** ermittelt werden, unter der Vorausſetzung, daß deren Richtungslinien auf den Seitenflächen **AB**, **AC** und **BC** (Fig. 132) normal ſind.

Zunächſt erfordert das Gleichgewicht, daß die genannten drei Kräfte ſich mit ihren Richtungslinien in einer und derſelben Ebene befinden, welche die des Dreieckes **ABC** ſein mag. Denn wäre dies nicht der Fall, ſo würde aus ihrer vereinigten Wirkung ein Beſtreben hervorgehen, den Keil um eine Achſe, die in einer mit **ABC** parallelen Durchſchnittsebne enthalten iſt, zu drehen. Ferner müſſen ſich die Richtungslinien aller drei Kräfte innerhalb der Ebene **ABC** in einem und demſelben Punkte **O** ſchneiden, weil ſonſt ebenfalls eine Drehung entſtehen würde, aber um eine Achſe, die mit den Längenkanten des Keiles parallel iſt.

Dies vorausgeſetzt, ſo reducirt ſich die vorliegende Aufgabe ganz auf den Fall des Gleichgewichtes von drei Kräften an einem materiellen Punkte, welcher im erſten Kapitel unter **I.** abgehandelt iſt. Nach §. 42 (2) hat man daher die Proportion

(1) $$P:Q:R = AB:AC:BC,$$

wonach alſo die Kräfte, die einander vermittelſt des Keiles das Gleichgewicht halten, *ſich wie die Seiten des letztern verhalten.*

Um die Wirkungen kennen zu lernen, welche aus der gegebenen Kraft **P** nach den mit **AB** und **CD** parallelen Richtungen hervorgehen, muß man die Widerſtände **Q** und **R** in die Seitenkräfte Q', Q'' und R', R'' nach den genannten Richtungen zerlegen. Die Richtungslinien von **Q**, Q', Q'' ſind ſenkrecht auf den Seiten des Dreiecks **ACD**, und

ein Gleiches gilt von R, R', R'' in Bezug auf das Dreieck BCD. Daher verhält ſich

$$Q : Q' : Q'' = AC : CD : AD;$$
$$R : R' : R'' = BC : CD : BD;$$

und hieraus findet man nach einander:

$$Q' = \frac{CD}{AC} \cdot Q; \qquad R' = \frac{CD}{BC} \cdot R;$$

$$Q'' = \frac{AD}{AC} \cdot Q; \qquad R'' = \frac{BD}{BC} \cdot R.$$

Aus der Proportion (1) findet man aber

$$Q = \frac{AC}{AB} \cdot P; \qquad R = \frac{BC}{AB} \cdot P,$$

und nach Einſetzung dieſer Werthe geſtalten ſich die vorigen Ausdrücke alſo:

(2) $$Q' = \frac{CD}{AB} \cdot P; \qquad R' = \frac{CD}{AB} \cdot P$$

(3) $$Q'' = \frac{AD}{AB} \cdot P; \qquad R'' = \frac{BD}{AB} \cdot P.$$

Demnach ſind die mit dem Rücken des Keiles parallelen Wirkungen einander gleich, und wenn man daher jede von ihnen mit S bezeichnet, ſo hat man die Proportion:

(4) $$P : S = AB : CD;$$

d. h. die Kraft verhält ſich zu den auf ihrer Richtung normalen Seitenpreſſungen, wie der Rücken des Keiles zu ſeiner Höhe.

Was die beiden andern Seitenkräfte Q'' und R'' betrifft, ſo finden für ſie folgende Vergleichungen ſtatt:

(5) $$\begin{cases} Q'' : R'' = AD : BD; \\ Q'' + R'' = P. \end{cases}$$

Demnach ſind die Wirkungen, welche der Keil nach der Richtung der auf ſeinen Rücken wirkenden Kraft ausübt, zuſammengenommen der genannten Kraft gleich, und

unter einander verhalten sie sich, wie die Projectionen der Seitenflächen auf den Rücken.

§. 193.

Zusätze: 1) Die vorhin für das Gleichgewicht des Keiles gefundenen Gesetze gelten mit geringer Modifikation auch für einen Keil mit abgestumpfter Schärfe, dessen Querschnitt das Paralleltrapez **ABCD** (Fig. 133) vorstellt.

Denn denkt man sich die Seitenflächen **AC**, **BD** desselben bei **E** und **F** gegen feste Körper gestützt, so findet Gleichgewicht statt, wenn die Repulsivkräfte dieser Körper sich mit der auf den Rücken des Keils wirkenden Kraft **P** in einem und demselben Punkte **O** schneiden. Bezeichnen **Q** und **R** die Wirkungen, welche der Keil auf diese festen Körper nach den auf **AC** und **BC** normalen Richtungen ausübt, und man zieht **CB'** parallel mit **DB**, so ergiebt sich

$$P : Q : R = AB' : AC : B'C$$

oder

$$P : Q : R = AB - CD : AC : BD.$$

Folglich $$Q = \frac{AC \cdot P}{AB - CD}; \quad R = \frac{BD \cdot P}{AB - CD}.$$

Fällt man ferner die Perpendikel **CC'**, **DD'** auf **AB**, und zerlegt **Q** und **R** in die Seitenkräfte **Q'**, **R'** parallel mit **AB**, **Q''**, **R''** normal auf diese Linie, so findet man

$$Q' = \frac{Q \cdot CC'}{AC} = \frac{CC' \cdot P}{AB - CD};$$

$$R' = \frac{R \cdot DD'}{BD} = \frac{DD' \cdot P}{AB - CD},$$

welche Seitenwirkungen (wegen $CC' = DD'$) offenbar einander gleich sind. Ferner findet man

$$Q'' = \frac{AC' \cdot Q}{AC} = \frac{AC' \cdot P}{AB - CD};$$

$$R'' = \frac{BD' \cdot R}{BD} = \frac{BD' \cdot P}{AB - CD},$$

und diese Ausdrücke führen wieder zu den Vergleichungen

$$Q'' + R'' = P\ ;$$
$$Q'' : R'' = AC' : BD'\ ;$$

welche ſich auf ähnliche Weiſe wie vorhin in Worten ausdrücken laſſen.

2) Keilartige Wirkungen entſtehen auch, wenn ein runder Körper **ABC** (Fig. 134) ſich gegen zwei feſte Ebenen **DE** und **FG** ſtützt, die unter den beliebigen Winkeln α und β gegen den Horizont geneigt ſind.

Wird dieſer Körper durch eine vertikale Kraft **P** — etwa durch ſein eigenes Gewicht, das man als eine ſolche Kraft im Schwerpunkt **O** vereinigt denken kann — ſenkrecht herabgedrückt, ſo zerlegt ſich dieſelbe in die auf **DE** und **FG** normalen Seitenkräfte **Q** und **R**, welche nach der in der Figur angegebenen Bezeichnung folgendergeſtalt gefunden werden:

$$P : Q : R = \operatorname{Sin}(\alpha+\beta) : \operatorname{Sin}\beta : \operatorname{Sin}\alpha;$$

alſo $\quad Q = \dfrac{P \cdot \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}\ ;\quad R = \dfrac{P \cdot \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}\ .$

Dieſe Kräfte zerlege man ferner nach horizontaler und vertikaler Richtung, ſo findet man nach einander

$$Q' = Q\operatorname{Sin}\alpha\ ; \qquad R' = R\operatorname{Sin}\beta\ ;$$
$$Q'' = Q\operatorname{Cos}\alpha\ ; \qquad R'' = R\operatorname{Cos}\beta\ ;$$

oder, nach Einſetzung obiger Werthe von **Q** und **R**,

$$Q' = R' = P \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}\ ;$$

$$Q'' = P \cdot \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}\ ;\quad R'' = P \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}$$

Auch hier ergiebt ſich $Q'' + R'' = P$, während ſich verhält $Q'' : R'' = \operatorname{Cot}\alpha : \operatorname{Cot}\beta$.

§. 194.

Die Schraube. Man denke ſich den Mantel eines normalen Cylinders **AG** (Fig. 135) abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet, ſo entſteht ein Rectangel $AA'F'F$, deſſen Grundlinie AA' dem Umfange, und deſſen Höhe $AF = A'F'$

der Höhe des Cylinders gleich iſt. Jede der Seiten AF und A'F' theile man in dieſelbe Anzahl gleicher Theile AB = BC = CD ... ꝛc., A'B' = B'C' = C'D' ... ꝛc., und ziehe die ſchrägen Verbindungslinien AB', BC', CD' ... ꝛc. Wenn man ſich nun vorſtellt, daß das Rectangel AA'F'F wieder als Mantel um den Cylinder AG herumgelegt wird, ſo fallen die beiden Seiten AF und A'F' in eine mit der Achſe des Cylinders parallele Linie AF dergeſtalt zuſammen, daß der Punkt A' in A, F' in F und die Theilpunkte B', C', D' ... ꝛc. in B, C, D ... u. ſ. w. zu liegen kommen. Die ſchrägen Linien AB', BC', CD', ... EF' bilden dann auf dem Cylindermantel eine zuſammenhängende, ſtetige Curve AaBbC ... F von doppelter Krümmung, die man Schraubenlinie nennt.

Man wird leicht einſehen, daß die gerade Berührungslinie an irgend einem beliebigen Punkte der Schraubenlinie jede auf der Achſe des Cylinders normale Ebene immer unter demſelben Winkel ſchneidet, und daß dieſer Winkel kein anderer ſein kann, als derjenige, den die Geraden AB', BC' ꝛc. mit AA' bilden. Dieſer Winkel, der durch A'AB' dargeſtellt wird, ſoll die Neigung der Schraubenlinie heißen.

Ein vollkommen biegſamer prismatiſcher Körper, welcher nach der Richtung einer Schraubenlinie um einen gegebenen Cylinder dergeſtalt herumgebogen wird, daß er ſich mit einer ſeiner Seitenflächen genau an den Mantel deſſelben anſchließt, heißt ein Schraubengewinde, und letzteres bildet mit dem Cylinder, der nun eine Schraubenſpindel genannt wird, eine Schraube. Jenachdem der Querſchnitt des Prismas, welches das Schraubengewinde bildet, ein Dreieck oder ein Rectangel iſt, entſteht eine Schraube, entweder mit dreieckigem oder mit viereckigem Gewinde, von welchen jene bei DE, dieſe aber bei AB (Fig. 136) in der Seitenanſicht dargeſtellt iſt.

Derjenige Theil eines Schraubengewindes, welcher einmal um die Schraubenſpindel herumläuft, und deſſen Enden

in einer Ebene liegen, die durch die Achſe der Spindel geht, heißt ein Schraubengang. Der Abſtand ab zweier Schraubengänge von einander, parallel mit der Achſe gemeſſen, ſoll die Höhe eines Schraubenganges genannt werden.

Ein Körper wie MN (Fig. 136), in welchem eine cylinderförmige Höhlung dergeſtalt ausgearbeitet und mit eingeſchnittenen Schraubengängen verſehen iſt, daß darin eine Schraube mit ihrem Gewinde genau paßt, wird eine Schraubenmutter genannt. In der Praxis pflegt man die Schraube mit der zugehörigen Mutter, beide zuſammen, einen Schraubenſatz zu nennen.

Bei der Anwendung der Schraube zur Ueberwältigung eines Widerſtandes iſt entweder die Mutter unbeweglich und die Schraube wird darin um ihre Achſe gedreht, wodurch ſie ſich hebt oder ſenkt; oder, das geradlinige Fortrücken der Schraube wird durch Umdrehen der Mutter bewirkt, indem dieſe ihren Ort nicht verändert und jene keine Drehung erleidet. In beiden Fällen wirkt der Widerſtand wie eine Laſt, die an der Spindel hängt. Auch giebt es Anordnungen, wo entweder die Schraube unbeweglich feſtſteht, und die Mutter durch Umdrehen um die Spindel hin und her bewegt wird; oder, wo zwar die Schraube um ihre Achſe gedreht wird, aber ohne daß ſie ſelbſt fortrücken kann, und wo es die Mutter iſt, welche ſich parallel mit ſich ſelbſt fortbewegt, indem ſie an der Drehung keinen Theil nimmt. Bei dieſen Anordnungen wirkt der Widerſtand wie eine an der Mutter hangende Laſt.

§. 195.

Gleichgewicht der Schraube. Es werde nun vorausgeſetzt, daß die vertikale Schraube AB (Fig. 136) in der unbeweglichen Mutter MN durch eine Kraft P um ihre Achſe gedreht wird, indem dieſe Kraft am Endpunkte C des in den Schraubenkopf eingeſetzten Hebels AC nach horizontaler, auf

AC normaler Richtung wirkt. Nach der Richtung der Achſe AB der Schraubenſpindel wirke ein Widerſtand Q der beabſichtigten Bewegung entgegengeſetzt. Es wird verlangt, das Verhältniß von P zu Q anzugeben, für die Bedingung des Gleichgewichtes zwiſchen beiden Kräften.

Man kann ſich die Schraubenwindung in der Mutter MN, deren Oberfläche eine ſogenannte windſchiefe Fläche bildet, als aus einer ſehr großen Anzahl ſchiefer Ebenen zuſammengeſetzt denken, welche alle gleiche Neigung gegen den Horizont haben, und über welche die Laſt Q gleichförmig vertheilt iſt. Bezeichnet n die Anzahl dieſer ſchiefen Ebenen, ſo iſt $q = \frac{1}{n} Q$ die Laſt auf jeder einzelnen von ihnen, und wenn man ihren gemeinſchaftlichen Neigungswinkel für die Mitte der Schraubenwindung mit α, ſo wie mit p die Kraft bezeichnet, welche unmittelbar an der Laſt q nach horizontaler Richtung angebracht werden muß, um ſie im Gleichgewichte zu erhalten, ſo hat man nach §. 189, 1, die Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichtes

$$p = q \cdot \mathrm{Tang}\,\alpha.$$

Eine ſolche Kraft p wirkt nun n mal als Widerſtand der von P beabſichtigten Drehung der Spindel entgegen, und zwar an einem Hebelsarme, welcher dem normalen Abſtande der Mitte der Schraubenwindung von der Achſe AB gleich iſt. Bezeichnet man dieſen mit r, ſo iſt das Moment des geſammten Widerſtandes

$$np \cdot r = n \cdot q\,\mathrm{Tang}\,\alpha \cdot r = Qr\,\mathrm{Tang}\,\alpha,$$

weil $nq = Q$ iſt, und eben ſo groß muß das Moment der Kraft P ſein, wenn Gleichgewicht ſtatt finden ſoll. Setzt man daher $AC = a$, ſo hat man die Gleichung

$$a \cdot P = Q \cdot r\,\mathrm{Tang}\,\alpha \quad ; \quad \text{mithin } P = \frac{Qr}{a} \cdot \mathrm{Tang}\,\alpha.$$

Stellt nun AA′ die mittlere Peripherie $2r\pi$ der Schraube

vor, welche zum Halbmeſſer r gehört, und iſt A'B' = h die Höhe ab eines Schraubenganges, dann iſt A'AB' = α der Neigungswinkel jener ſchiefen Ebenen; daher hat man

$$\text{Tang}\,\alpha = \frac{A'B'}{AA'} = \frac{h}{2r\pi}.$$

Dies in die vorige Gleichung geſetzt, liefert

$$P = \frac{Qh}{2a\pi},$$

oder $$P : Q = h : 2a\pi.$$

Man wird leicht die Bemerkung machen, daß dieſe Auseinanderſetzung eigentlich nur für die Schraube AB (Fig. 136) gilt, wo die elementaren ſchiefen Ebenen alle nur eine einzige Neigung, nämlich nach der Richtung der Schraubenlinie, haben. Bei der Schraube DC findet aber eine doppelte Neigung ſtatt, und deshalb kann die vorige Herleitung auf dieſe Schraube nicht unmittelbar angewendet werden. Durch Anwendung des Carteſiſchen Grundſatzes ergiebt ſich aber für beide Schrauben daſſelbe Reſultat. Wenn nämlich die Kraft P eine vollſtändige Umdrehung der Schraube bewirkt hat, ſo iſt ihr Angriffspunkt durch den Weg $2a\pi$ gegangen, und der Widerſtand Q iſt gleichzeitig um die Höhe h eines Schraubenganges entweder gehoben oder herabgedrückt. Da alſo $2a\pi$ und h die gleichzeitigen Wege der Kräfte P und Q ſind, ſo findet, für den Fall des Gleichgewichtes, die Proportion ſtatt

$$P : Q = h : 2a\pi.$$

Demnach iſt für jede Schraube ein Gleichgewicht vorhanden, wenn ſich die Kraft zur Laſt verhält, wie die Höhe eines Schraubenganges zu derjenigen Peripherie, die von dem Angriffspunkte der Kraft beſchrieben wird.

§. 196.

Differentialſchraube. In Fig. 137 iſt eine Ver-

bindung zweier Schrauben dargeſtellt, von welchen die größere **AB** inwendig ausgehöhlt iſt, und die Mutter der kleineren **DE** enthält. Der unbewegliche Rahmen **FHGK** enthält bei **G** eine Mutter für die größere Schraube, und bei **F** eine viereckig durchbrochene Oeffnung, durch welche die vierkantige Verlängerung der kleineren Schraube geht. Beide Schrauben ſind mit Windungen von ungleichen Ganghöhen verſehen, ſo daß, wenn die Schraube **AB** durch Drehung in der Mutter **G** heraufgeht, die mit engeren Windungen verſehene Schraube **DE** ſich in die Aushöhlung von jener hineinziehen muß, weil die viereckige Oeffnung **F** keine Drehung, ſondern nur ein geradliniges Fortrücken derſelben zuläßt. Bei einer vollſtändigen Umdrehung der großen Schraube iſt alſo die Bewegung der kleinen Schraube gleich der Differenz beider Ganghöhen, weshalb man dieſe Verbindung in der Praxis eine *Differentialſchraube* nennt.

Bezeichnet alſo h die Ganghöhe der größeren, h' die der kleineren Schraube, und iſt $h > h'$, ſo durchläuft der Punkt **D** den Weg $h - h'$, wenn die untere Schraube in ihrer Mutter **G** einmal umgedreht worden iſt. Denkt man ſich nun bei **C** eine Kraft **P** angebracht, welche normal an dem Hebel $AC = a$ wirkt, während bei **D** ein Widerſtand **Q** zu überwinden iſt, ſo ſind $2a\pi$ und $h - h'$ die gleichzeitigen Wege dieſer beiden Kräfte, und wenn unter ihnen ein Gleichgewicht ſtattfinden ſoll, ſo muß ſich nach dem Carteſiſchen Grundſatze verhalten

$$P : Q = h - h' : 2a\pi;$$

oder, *die Kraft zur Laſt, wie die Differenz der Ganghöhen beider Schrauben zu der vom Angriffspunkte der Kraft beſchriebenen Peripherie.*

Dieſelbe Vergleichung findet Anwendung auf die in Fig. 138 dargeſtellte Conſtruction, welche in dieſer Geſtalt am häufigſten in der Praxis gebraucht wird, um bei großen

Kraftäußerungen eine leichte Bewegung zu erzeugen. AB und CD ſtellen nämlich zwei Schrauben mit Gewinden von ungleichen Ganghöhen h, h' vor, welche nur in der Richtung ihrer Achſen, von welchen die eine in der Verlängerung der andern liegt, fortrücken, aber ſich nicht um dieſe Achſen drehen können. GH iſt ein viereckiger Rahmen, der bei G und H die Muttern jener Schrauben enthält und vermittelſt des hineingeſteckten Knebels EF um die Achſe AD gedreht werden kann. Wirkt an dem Griffe bei F eine gewiſſe Kraft P in dem Abſtande OP = a von der genannten Achſe, während nach der Richtung der letztern die Widerſtände Q = Q' entgegengeſetzten Sinnes wirken, ſo findet die obige Proportion hierauf unmittelbare Anwendung.

Anmerk. Die zuerſt beſchriebene Anordnung iſt von W. Hunter erdacht, und von Melville in den Phil. transact. for the Year 1781, Vol. LXXI, Part 1. pag. 58 u. f. bekannt gemacht, woſelbſt auch mehrere nützliche Anwendungen gezeigt werden.

§. 197.

Der materielle Hebel. Im Allgemeinen heißt jedes unveränderliche Syſtem von materiellen Punkten, welches von einer feſten Achſe gehalten wird, um die es ſich drehen kann, ohne aber eine fortgehende Bewegung annehmen zu können, ein Hebel. Wird nun bei der Beſtimmung des Gleichgewichtes zwiſchen den Kräften, die auf Drehung des Syſtems wirken, das letztere als gewichtslos gedacht, ſo nennt man daſſelbe einen mathematiſchen Hebel, und von einem ſolchen ſind die Bedingungen des Gleichgewichtes aus früheren Lehren bereits bekannt. Wenn aber das fragliche Syſtem ein phyſiſcher Körper, z. B. eine ſchwere prismatiſche Stange iſt, deren eigenes Gewicht als eine lothrechte Kraft in ihrem Schwerpunkte vereinigt gedacht, und in den Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichtes neben den andern auf Drehung wirkenden Kräften beſonders berückſichtigt wird, ſo hat man den materiellen Hebel.

Bei jedem materiellen Hebel iſt alſo, wie man ſieht, die Kenntniß von der Lage ſeines Schwerpunktes ein nothwendiges Erforderniß. Hat man ſich dieſe nach den Lehren des vorhergehenden Kapitels verſchafft, ſo kann man den materiellen Hebel wie einen mathematiſchen behandeln, indem man nur nöthig hat, außer den gegebenen Kräften noch eine lothrechte Kraft, die dem Gewichte des Körpers gleich iſt, im Schwerpunkte anzunehmen.

Wenn mehrere Kräfte an einem unterſtützten materiellen Hebel auf Drehung wirken, und die Richtungslinien jener Kräfte fallen auf verſchiedene Seiten des Stützpunktes, ſo nennt man den Hebel doppelarmig; liegen ſie aber ſämmtlich auf einer und derſelben Seite des Stützpunktes, ſo wird der Hebel einarmig genannt. Ein ſogenannter Winkelhebel entſteht, wenn zwei verſchiedene einarmige Hebel einen gemeinſchaftlichen Stützpunkt haben, und in demſelben auf eine unveränderliche Weiſe ſo mit einander verbunden ſind, daß ſie einen beliebigen Winkel bilden.

Dieſe Benennungen haben indeß nur ein techniſches Intereſſe, berühren aber die Theorie des Hebels auf keine Weiſe, und da letztere, wie ſchon erwähnt, in den frühern allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes enthalten iſt, ſo beſchränken wir uns hier auf einige einfache Anwendungen auf beſondere Fälle.

§. 198.

Gleichgewicht am Hebel. Zur Erläuterung deſſelben mögen folgende zwei Aufgaben genügen.

1) An dem doppelarmigen Hebel AB (Fig. 139), der im Punkte C unterſtützt iſt, wirkt im Anfangspunkte A eine gegebene Laſt Q. Im Endpunkte B ſoll ein Gewicht P aufgehängt werden, welches in Gemeinſchaft mit dem eigenen Gewichte des Hebels der Laſt Q das Gleichgewicht hält. Man ſoll die Größe des Gegengewichtes P und die Länge

AB des Hebels der Bedingung gemäß bestimmen, daß der Druck auf den Unterstützungspunkt C ein Minimum werde.

Denkt man sich das eigene Gewicht des Hebels, welches W heißen mag, im Schwerpunkte D als eine vertikale Kraft vereinigt, so hat man als Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf Drehung um den Punkt C die statische Momentengleichung:

$$P \cdot CB + W \cdot CD = Q \cdot CA.$$

Wir setzen den Hebel, dessen unbekannte Länge $= x$ sein mag, als prismatisch und von gleichmäßiger Schwere voraus, so daß sein Schwerpunkt in der Mitte seiner Länge liegt. Bezeichnet q das Gewicht einer jeden Längeneinheit, so ist $W = xq$ das Gewicht des ganzen Hebels, und wenn ferner $AC = a$ als gegeben angenommen wird, dann ist $CB = x - a$ und $CD = \frac{1}{2}x - a$. Diese Werthe in obiger Gleichung eingesetzt, liefern

$$P(x-a) + qx(\tfrac{1}{2}x - a) = Qa,$$

woraus sich $P = \dfrac{aQ - qx(\frac{1}{2}x - a)}{x-a}$ ergiebt.

Der lothrechte Druck auf den Unterstützungspunkt ist nun $= P + Q + W$, oder, wenn man für P und W die entsprechenden Werthe einsetzt, gleich

$$\frac{aQ - \frac{1}{2}qx^2 + aqx}{x-a} + qx + Q = \frac{\frac{1}{2}qx^2 + Qx}{x-a}.$$

Um nun denjenigen Werth von x zu bestimmen, der diesen Druck zu einem Minimum macht, muß die erste Ableitung gebildet werden, wozu die in No. 25 des Anhangs mitgetheilte Formel (5) Anwendung findet. Nach derselben ergiebt sich die fragliche Ableitung gleich

$$\frac{(x-a) \cdot \mathfrak{A}(\frac{1}{2}qx^2 + Qx) - (\frac{1}{2}qx^2 + Qx) \cdot \mathfrak{A}(x-a)}{(x-a)^2}$$

oder, wenn die angezeigten Operationen ausgeführt werden,

gleich $$\frac{\frac{1}{2}qx^2 - aqx - aQ}{(x-a)^2}.$$

Sofern nun überhaupt ein Maximum oder Minimum zulässig ist, findet man die entsprechende Gleichung, indem man den vorigen Ausdruck gleich Null setzt. Offenbar braucht dies aber bloß mit dem Zähler zu geschehen, und demnach hat man

$$x^2 - 2ax - \frac{2q}{q}Q = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nunmehr

$$x = a \pm \sqrt{a^2 + \frac{2a}{q}Q},$$

ein Ausdruck, der im Allgemeinen sowohl einem Max. als Min. entsprechen kann. Im vorliegenden Falle soll aber das letztere stattfinden, weshalb man denjenigen Werth von x nehmen muß, der die zweite Ableitung positiv macht; und dies ist, wie leicht erhellet, der folgende:

$$x = a + \sqrt{a^2 + \frac{2a}{q}Q}.$$

Substituirt man nun diesen Werth in dem für P gefundenen Ausdrucke, so ergiebt sich derselbe gleich Null. D. h. wenn unter den anfänglich aufgestellten Bedingungen die Last Q am Hebel AB im Gleichgewichte gehalten werden, und zugleich der Druck auf den Unterstützungspunkt ein Minimum sein soll, so darf an dem Hebel kein Gegengewicht aufgehängt werden, sondern das eigene Gewicht desselben muß das fragliche Gleichgewicht herstellen und erhalten. Das Gewicht des Hebels ist nun

$$qx = aq + \sqrt{aq(aq + 2Q)}$$

folglich der Druck auf das Unterlager C gleich

$$Q + aq + \sqrt{aq(aq + 2Q)}$$

2) Der einarmige Hebel AB (Fig. 140), welcher sich in horizontaler Lage befindet und mit dem Ende A auf einem festen Unterlager ruhet, ist in der Entfernung AC = a vom Unterstützungpunkte mit einer Last Q beschwert. Man soll

ſeine Länge $AB = x$ ſo beſtimmen, daß eine gegebene, am andern Ende B angebrachte, lothrecht nach oben wirkende Kraft P den Hebel nebſt der aufgehängten Laſt im Gleichgewichte erhalten kann.

Bezeichnet wieder q das Gewicht von jeder Längeneinheit des Hebels, ſo iſt deſſen ganzes Gewicht $W = qx$, und wenn dies in dem Schwerpunkte D, d. h. in der Mitte der Länge AB, vereinigt gedacht wird, ſo hat man für den Zuſtand des Gleichgewichtes die Momenten-Gleichnng

$$Qa + qx \cdot \tfrac{1}{2}x = Px,$$

oder
$$x^2 - \frac{2P}{q} \cdot x + \frac{2a}{q} Q = 0;$$

woraus ſich durch Entwicklung findet:

$$x = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 2aqQ}}{q}.$$

In dieſer Formel können beide Vorzeichen der Wurzel gelten, und daher giebt es jedesmal zwei verſchiedene Längen des Hebels, für welche ein Gleichgewicht ſtattfinden kann. Jedoch gilt dies nur ſo lange, als beide Werthe von x noch reell ſind, d. h. ſo lange unter dem Wurzelzeichen $P^2 > 2aqQ$ iſt. Fände das Gegentheil von dieſem ſtatt, ſo würde x imaginär ausfallen, und dann gäbe es keine Hebellänge, die der Bedingung des Gleichgewichtes zwiſchen der gegebenen Kraft P und den Gewichten Q, W entſprechen könnte. Der kleinſte für P zuläſſige Werth ergiebt ſich demnach aus der Gleichung

$$P^2 = 2aqQ; \quad \text{nämlich } P = \sqrt{2aqQ};$$

und für dieſen Werth von P wird $x = \frac{P}{q} = \sqrt{\frac{2aQ}{q}}$.

Beiſp. Für $Q = 400$ ℔, $q = 16$ ℔ und $a = 2$ Fuß findet man den kleinſten zuläſſigen Werth von $P = \sqrt{2.2.400.16} = 160$ ℔. Wäre alſo eine größere Kraft, etwa $P = 175$ ℔ gegeben, ſo würde man für die beiden Hebellängen $x = 15{,}37$ Fuß und $x = 6{,}51$ Fuß finden, welche beide der Bedingung des Gleichgewichtes Genüge leiſten.

§. 199.

Die feste und lose Rolle. Jede cylinderförmige Scheibe, die sich frei um ihre Achse drehen kann und über deren Umfang ein vollkommen biegsames Seil in eine dazu ausgearbeitete Rinne gelegt ist, mittelst welchem zwei Kräfte sich gegenseitig im Gleichgewicht erhalten können, wird eine Rolle genannt.

Die drehende Bewegung der Scheibe geschieht vermittelst sogenannter Zapfen, welche dünne Cylinder sind, die auf beiden Seiten der Scheibe nach der Richtung ihrer Achse so weit vortreten, daß sie in Höhlungen von andern Körpern oder in Hülsen, die man Zapfenlager nennt, gelegt werden können, um sie dadurch zu unterstützen. Sind die Zapfenlager unbeweglich, während die Rolle sich darin frei drehen kann, so heißt letztere eine feste Rolle (Fig. 141). Wenn aber eine Drehung der Rolle nur dadurch bewirkt werden kann, daß die Zapfenlager selbst mit in Bewegung kommen (Fig. 142), so heißt diese Anordnung eine bewegliche oder lose Rolle.

Eine Verbindung von losen Rollen, bei welcher nach Fig. 143 jede Rolle schwebend getragen wird von einem Seile, dessen eines Ende an einem festen Körper, dessen anderes Ende aber an der Hülse der nächstfolgenden Rolle befestigt ist, wird ein Rollenzug genannt.

Wenn dagegen mehrere Rollen in einem gemeinschaftlichen festen Gehäuse so angebracht sind, daß sie sich unabhängig von einander je um ihre Achse drehen können, so nennt man dieses System eine Flasche oder einen Kloben. Zur praktischen Anwendung werden allemal zwei solcher Systeme dadurch mit einander verbunden, daß ein Seil, dessen eines Ende an einer der Hülsen befestigt ist, abwechselnd von einem Kloben zum andern über die darin befindlichen Rollen hin und herläuft. Dadurch entsteht ein sogenannter Flaschen-

zug, welcher nach Fig. 144 in dem oberen Kloben A aus festen, in dem untern B aus losen Rollen besteht.

§. 200.

Gleichgewicht der festen und losen Rolle.

1) An der in Fig. 141 dargestellten festen Rolle sollen sich zwei Kräfte P und Q einander das Gleichgewicht halten, und zwar mittelst des Seiles PABQ, welches den zum Mittelpunktswinkel ACB gehörigen Bogen AB umspannt.

Da hier nur eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt der Rolle entstehen kann, in Bezug auf welche ein Gleichgewicht stattfinden soll, so müssen die Momente beider Kräfte einander gleich sein. Man kann nun die feste Rolle als einen Winkelhebel ACB betrachten, CA und CB als die Hebelsarme, an welchen die Kräfte P, Q auf Drehung wirken, und da jene Hebelsarme offenbar gleich groß sind, so müssen auch die genannten Kräfte einander gleich sein.

Die feste Rolle ändert also nichts an der Wirkung einer Kraft, und kann daher nur dazu dienen, diese Wirkung auf einen Punkt zu leiten, der außerhalb ihrer Richtung liegt. Sie wird aus diesem Grunde auch häufig eine Leitscheibe genannt.

Das vorstehende Resultat läßt sich aber auch noch auf eine andere Weise, unabhängig von der Hebeltheorie, herleiten, wobei sich zugleich der Druck ergiebt, den die beiden Kräfte P, Q auf die Zapfenlager ausüben.

Denkt man sich nämlich an die Stelle der fraglichen Lager im Mittelpunkte C eine Kraft angebracht, die dem Drucke R auf dieselben gleich und gerade entgegen gesetzt ist, so muß diese Kraft mit den beiden andern Kräften P und Q im Gleichgewichte sein. Alle drei Kräfte müssen sich daher in einem und demselben Punkte D schneiden, und DC repräsentirt folglich die Richtung der Mittelkraft von P und Q,

d. h. die Richtung des Druckes, den letztere auf die Achſe ausüben. Man ziehe nun die Sehne **AB**, ſo entſteht das gleichſchenklige Dreieck **ACB**, deſſen Seiten auf den Richtungen jener Kräfte normal und alſo den Intenſitäten derſelben proportionirt ſind. Daher iſt

$$P : Q : R = AC : BC : AB,$$

und weil die Linien **AC**, **BC** als Radien eines Kreiſes einander gleich ſind, ſo ſind auch die ihnen proportionalen Kräfte **P**, **Q** gleich groß. In Bezug auf den Druck **R** ergiebt ſich aber das Geſetz, daß ſich jede von den gleichen, das Seil ſpannenden, Kräften zu dem Druck auf das feſte Zapfenlager verhält, wie der Halbmeſſer der Rolle zur Sehne des vom Seil umſpannten Bogens.

Sind die an der feſten Rolle im Gleichgewicht befindlichen Kräfte parallel mit einander, ſo iſt die Sehne **AB** dem Durchmeſſer gleich, und der Druck auf das Zapfenlager ergiebt ſich dann gleich der Summe beider Kräfte.

2) In Fig. 142 ſei eine loſe Rolle dargeſtellt, an deren Zapfen **C** eine Hülſe **CD** angebracht, und daran die ſchwere Laſt **Q** aufgehangen iſt. Dieſe Laſt werde von der Kraft **P** im Gleichgewichte gehalten, welche an dem Ende **AP** des bei **E** befeſtigten Seiles **PABE** wirkt.

Denkt man ſich anſtatt der Befeſtigung des Seilendes **BE** nach der Richtung deſſelben eine Kraft **S** wirkſam, welche mit **P** und **Q** im Gleichgewicht iſt, ſo ſtellt dieſelbe die Spannung des Seilendes **BE** oder den Widerſtand vor, den der Befeſtigungspunkt **E** leiſten muß. Offenbar wird nun das Gleichgewicht zwiſchen den drei Kräften **P**, **Q** und **S** nicht geſtört, wenn man ſich die Hülſe **C** als ein unbewegliches Zapfenlager denkt. Aber dadurch reducirt ſich die Theorie der loſen Rolle auf die der feſten, welche im Vorhergehenden abgehandelt iſt; denn was dort der Druck auf das Zapfenlager **C** war, iſt hier die Laſt **Q**, welche mittelſt der Hülſe

CD am Zapfen hängt. Es finden demnach hier wie vorhin dieſelben Bedingungen des Gleichgewichtes ſtatt; d. h. die Tangenten PA, EB müſſen ſich mit der Richtungslinie CQ in einem und demſelben Punkte ſchneiden, und letztere muß alſo den Winkel zwiſchen den beiden erſteren halbiren. Ueberdies hat man die Vergleichungen:

$$P = S \quad \text{und} \quad P : Q = AC : AB.$$

Wenn alſo die loſe Rolle im Gleichgewichte iſt, ſo erleiden beide Enden des Seiles, welches die Rolle trägt, einerlei Wirkungen, und es verhält ſich die Kraft, welche in jedem derſelben angebracht werden muß, zu der am Zapfen hangenden Laſt, wie der Halbmeſſer der Rolle zur Sehne des Bogens, den das Seil umſpannt.

Zu demſelben Reſultate gelangt man auch, wenn man die Kräfte P und Q ſo betrachtet, als wären ſie an dem einarmigen Hebel AB im Gleichgewichte, deſſen Drehpunkt ſich in B befindet.

§. 201.

Gleichgewicht des Rollen- und Flaſchenzuges.

1) Der in Fig. 143 dargeſtellte Rollenzug beſtehe aus n loſen Rollen B, C, D, ... N, deren erſte an ihrer Hülſe die Laſt Q trägt, während an dem Seilende, welches von der letzten Rolle N über die Leitſcheibe A geht, die Kraft P wirkt.

Um für dieſes Syſtem die Bedingungen des Gleichgewichtes zu ermitteln, ſeien r_1, r_2, r_3, ... r_n die Halbmeſſer, s_1, s_2, s_3, ... s_n die Sehnen der von den Seilen umſpannten Bögen der Rollen B, C, D, ... N, von welchen B die erſte und N die letzte oder nte vorſtellt. Ferner ſeien p_1, p_2, p_3, ... p_n die Wirkungen in den Seilenden, welche die einzelnen Rollen je mit den Hülſen der nächſtfolgenden verbinden. Betrachtet man nun dieſe Wirkungen einmal als Kräfte, welche die zu-

gehörigen Rollen im Gleichgewichte halten, und dann als Laſten, die an den Hülſen der nächſtfolgenden Rollen angebracht sind, ſo ergeben ſich hieraus folgende Proportionen:

$$p_1 : Q = r_1 : s_1$$
$$p_2 : p_1 = r_2 : s_2$$
$$p_3 : p_2 = r_3 : s_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_n : p_{n-1} = r_n : s_n.$$

Setzt man dieſe Proportionen zu einer einzigen zuſammen, und berückſichtiget dabei, daß nach dem vorigen Paragraphen $P = p_n$ ſein muß, ſo entſteht

$$P : Q = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n : s_1 s_2 s_3 \ldots s_n.$$

Demgemäß findet ein Gleichgewicht am Rollenzuge ſtatt, wenn ſich die Kraft zur Laſt verhält, wie das Produkt aus den Halbmeſſern der Rollen, zu dem Produkte der Sehnen, welche zu den von den Seilen umſpannten Bögen der Rollen gehören.

Die vortheilhafteſte Anordnung des Rollenzuges iſt offenbar diejenige, mittelſt welcher eine gegebene Laſt Q durch die möglichſt kleinſte Kraft P im Gleichgewichte gehalten werden kann. Dies findet ſtatt, wenn alle Seilenden vertikal und alſo parallel mit einander ſind (wie Figur 131 ebenfalls zeigt); denn alsdann iſt der Radius im Verhältniß zur Sehne am kleinſten, weil letztere dem Durchmeſſer gleich iſt. Mit Rückſicht hierauf, entſteht

$$P : Q = 1 : 2^n;$$

woraus ſich ergiebt $P = \frac{Q}{2^n}$.

Iſt daher die Laſt gegeben, ſo findet man die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft, wenn jene durch diejenige Potenz der Zahl 2 dividirt wird, deren Exponent der Anzahl der loſen Rollen gleich iſt.

2) In Fig. 144 ſind zwei verſchiedene Anordnungen von Flaſchenzügen dargeſtellt. Dabei bedeutet P die Kraft, welche an dem nicht befeſtigten Seilende wirken muß, um mittelſt des Flaſchenzuges einer gegebenen Laſt Q, die am untern Kloben hängt, das Gleichgewicht zu halten. Zur Beſtimmung dieſer Kraft dient die Bemerkung, daß ſich für den Fall des Gleichgewichtes das Gewicht Q auf alle Seilenden, welche die Kloben mit einander verbinden, gleichmäßig vertheilt, und daß alſo die Kraft P nur ſo groß zu ſein braucht als derjenige Theil der Laſt, welcher auf das Seilende kommt, an deſſen Verlängerung die genannte Kraft angebracht iſt. Wäre alſo die Anzahl der verbindenden Seilenden = n, dasjenige nicht mitgezählt, woran die Kraft wirkt, ſo iſt

$$P = \frac{1}{n} Q.$$

Durch Anwendung des Carteſiſchen Grundſatzes läßt ſich dieſes Reſultat ebenfalls leicht herleiten, wenn man annimmt, daß der mit dem Gewichte Q beſchwerte Kloben um den Weg a gehoben wird, wo ſich dann alle Seilenden, mit Ausnahme des von der Kraft P ergriffenen, um die Länge a verkürzen müſſen, wenn ſie wieder gleichmäßig geſpannt ſein ſollen. Der Angriffspunkt der Kraft P muß alſo den Weg na durchlaufen, wenn die Laſt Q auf die Höhe a gehoben werden ſoll, und daher verhält ſich

$$P : Q = a : na; \quad \text{mithin } P = \frac{1}{n} Q.$$

Es iſt leicht einzuſehen, daß die Größe n auch die Anzahl der feſten und loſen Rollen in beiden Kloben ausdrückt. Daher findet man die zum Gleichgewicht am Flaſchenzuge erforderliche Kraft, indem man die zu hebende Laſt mit der Geſammtzahl der feſten und loſen Rollen beider Kloben dividirt.

§. 202.

Das Rad an der Welle. Wird eine kreisförmige Scheibe mit einem Cylinder von geringerem Durchmesser so zu einem festen System verbunden, daß die Achse des Cylinders auf der Ebene der Scheibe in derem Mittelpunkte normal ist, und zugleich die Achse dergestalt unterstützt, daß nur eine drehende Bewegung um sie stattfinden kann, so heißt diese Vorrichtung das Rad an der Welle. Man nennt nämlich die Kreisscheibe das Rad und den Cylinder, womit sie fest verbunden ist, die Welle. Letztere ist an ihren Enden mit concentrisch eingesetzten Zapfen versehen, die nach der Richtung der Achse vortreten und in passenden Lagern ruhen, worin sie sich frei drehen können.

Sollen sich an diesem Systeme zwei Kräfte in Bezug auf Drehung das Gleichgewicht halten, so kann man annehmen, daß eine von diesen Kräften im Umfange des Rades nach der Richtung einer in dessen Ebene liegenden Tangente, die andere aber im Umfange der Welle ebenfalls nach tangentialer Richtung wirkt. Gewöhnlich wird dann jene ausschließlich die Kraft, diese aber der Widerstand oder die Last genannt. Man kann aber auch annehmen, daß beide Kräfte in den Umfängen zweier Kreisscheiben, die in der beschriebenen Weise mit einer gemeinschaftlichen Welle zu einem festen System verbunden sind, je nach tangentialer Richtung wirken. Betrachtet man dann die eine von diesen Kräften vorzugsweise als Kraft, die andere hingegen als eine Last, welche von jener im Gleichgewicht erhalten wird, so pflegt man die zugehörigen Kreisscheiben bezüglich das Kraftrad und das Lastrad zu nennen.

Aus dem Gesagten geht schon hervor, daß beide Kräfte nicht in einer und derselben Ebene, sondern in zwei parallelen Ebenen liegen, was aber auf die Größe ihres Strebens zur Drehung um die gemeinschaftliche Achse keinen Einfluß

hat. Sofern es ſich alſo bloß um eine Vergleichung zwiſchen den Intenſitäten beider Kräfte in Bezug auf das genannte Streben derſelben handelt, kann man ihre Richtungslinien auf eine und dieſelbe Ebene projicirt denken, was dem Anfänger zur Erleichterung des Verſtändniſſes dienen mag.

§. 203.

Gleichgewicht des Rades an der Welle. Die Figur 145 ſtelle dieſes Syſtem in der Projection auf eine Ebene dar, welche auf der Wellenachſe normal iſt. AA' ſei das Kraftrad, BB' die Welle oder das Laſtrad, und in C ſeien die Zapfen der Welle vorgeſtellt. Die mit einander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte P und Q wirken in den Umfängen jener Räder nach den Richtungen der Tangenten AP, BQ, auf welchen die Halbmeſſer CA, CB ſenkrecht ſind. Letztere bilden offenbar die Hebelsarme jener Kräfte, und da nur eine Drehung um die bei C projicirte Achſe ſtattfinden kann, weil die unverrückbaren Zapfenlager jede fortgehende Bewegung verhindern, ſo iſt Gleichgewicht vorhanden, ſobald die ſtatiſchen Momente von P und Q einander gleich ſind. Demnach hat man alſo:

(1) $$P \cdot AC = Q \cdot BC,$$

oder $$P : Q = BC : AC;$$

wonach alſo die beiden mit einander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte ſich umgekehrt wie die Halbmeſſer der Räder verhalten, in deren Umfängen ſie wirken.

Dies Geſetz läßt ſich auch auf ähnliche Weiſe, wie bei der feſten Rolle, folgendermaßen herleiten: Man verlängere die Richtungslinien PA, QB, bis ſie ſich in D ſchneiden, und nehme hier die Mittelkraft von P und Q, ſo muß deren Richtungslinie DR durch den Mittelpunkt C gehen, weil ſonſt eine Drehung um dieſen Punkt entſtehen würde. Sind nun E und F die Durchſchnittspunkte der beiden concentriſchen Kreisumfänge mit den Halbmeſſern CA, CB oder

deren Verlängerung, und man zieht die Verbindungslinie EF, ſo ſteht dieſe auf CR ſenkrecht. Dies iſt mit Hülfe des über CD als Durchmeſſer zu beſchreibenden Kreiſes, welcher durch die Punkte A und B gehen muß, und der Congruenz der beiden Dreiecke ABC und EFC unſchwer zu beweiſen, weshalb die weitere Ausführung dem Leſer überlaſſen bleiben möge.

Das Dreieck EFC hat aber nun eine ſolche Lage, daß ſeine Seiten auf den Richtungen der drei Kräfte P, Q und R ſenkrecht ſind, woraus mit Rückſicht auf §. 42, 2) die Proportion folgt:

$$P : Q : R = CE : CF : EF,$$

oder, weil $CE = CB$, $CF = CA$ und $EF = AB$ *iſt*,

(2) $$P : Q : R = CB : CA : AB.$$

Durch dieſe Proportion ſind nun die mit einander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte nicht bloß unter ſich, ſondern auch mit ihrer Mittelkraft in Beziehung geſetzt, welche letztere den Druck auf die Achſe darſtellt, ſofern er von jenen Kräften allein herrührt.

Verlangt man aber den geſammten Druck R zu wiſſen, den die beiden Kräfte P, Q in Verbindung mit dem eignen Gewicht W des Rades und der Welle auf die Zapfenlager ausüben, ſo müſſen die Winkel α und β, welche die Richtungen jener Kräfte gegen eine durch den Mittelpunkt C gezogene Horizontallinie beſtimmen, gegeben ſein. Der fragliche Druck iſt offenbar nichts anderes, als die Mittelkraft von den drei nicht parallelen Kräften P, Q und W, von denen die letzte nach vertikaler Richtung wirkt, und zur Beſtimmung dieſer Mittelkraft hat man alſo, ihre Richtung gegen die Horizontale mit ϱ bezeichnend, nach §. 79 folgende Gleichungen:

$$R \operatorname{Sin} \varrho = P \operatorname{Sin} \alpha + Q \operatorname{Sin} \beta + W;$$
$$R \operatorname{Cos} \varrho = P \operatorname{Cos} \alpha + Q \operatorname{Cos} \beta.$$

Aus ihnen findet man auf bekannte Weiſe

(3) $R = \sqrt{(P\,\mathrm{Sin}\,\alpha + Q\,\mathrm{Sin}\,\beta + W)^2 + (P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Q\,\mathrm{Cos}\,\beta)^2}$;

(4) $\mathrm{Tang}\,\varrho = \dfrac{P\,\mathrm{Sin}\,\alpha + Q\,\mathrm{Sin}\,\beta + W}{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Q\,\mathrm{Cos}\,\beta}$.

Eigentlich gelten die letzten Gleichungen nur für den Fall, daß die drei Kräfte P, Q und W in einer und derſelben Ebene liegen. Wenn gleich nun dieſe beſondere Vorausſetzung nicht gemacht wurde, ſo können doch jene Reſultate als ſolche Näherungswerthe betrachtet werden, die ſich nur wenig von der Wahrheit entfernen.

Beiſpiel. Für $Q = 1200$ ℔.; $BC = \frac{1}{2}'$; $AC = 2'$; $\alpha = 120°$; $\beta = 50°$; $W = 330$ ℔., findet man $P = 300$ ℔.; $R = 1632{,}2$ ℔, und $\varrho = 67° 28\frac{2}{3}'$.

§. 204.

In manchen Fällen iſt es erforderlich, den Druck auf jedes einzelne Zapfenlager zu kennen; alsdann kann man auf folgendem Wege zu dieſer Kenntniß gelangen.

Stellt nämlich Fig. 146 die perſpectiviſche Anſicht des Rades an der Welle vor, ſo ſei $B'B'' = l$ die Länge der Welle, $B'C = a$ der Abſtand des Rades vom Zapfenlager B' und $B'B = b$ der Abſtand des Angriffspunktes der Kraft Q von demſelben Zapfenlager.

Aus P entſpringen zwei Preſſungen P' und P'' auf die Zapfenlager B' und B'', nach den mit AP parallelen Richtungen $A'P'$ und $A''P''$, welche nach §. 58 folgendergeſtalt gefunden werden:

$$P' = \frac{CB''}{B'B''} \cdot P = \frac{l - a}{l} \cdot P;$$

$$P'' = \frac{B'C}{B'B''} \cdot P = \frac{a}{l} \cdot P.$$

In derſelben Art erhält man aus Q die Preſſungen Q' und Q'' auf die genannten Zapfenlager, nach den mit BQ parallelen Richtungen $B'Q'$ und $B''Q''$, nämlich:

$$Q' = \frac{BB''}{B'B''} \cdot Q = \frac{l-b}{l} \cdot Q;$$

$$Q'' = \frac{BB'}{B'B''} \cdot Q = \frac{b}{l} \cdot Q.$$

Nach lothrechter Richtung erleiden die beiden Zapfenlager, wenn man das Gewicht der Welle mit U, und das des Rades mit V bezeichnet, die Preſſungen

$$W' = \tfrac{1}{2}U + \frac{CB''}{B'B''} \cdot V = \tfrac{1}{2}U + \frac{l-a}{l} \cdot V;$$

$$W'' = \tfrac{1}{2}U + \frac{CB'}{B'B''} \cdot V = \tfrac{1}{2}U + \frac{a}{l} \cdot V.$$

Setzt man nun in die zweite Formel des vorigen Paragraphen, an die Stelle von P, Q und W, einmal die Größen P', Q', W' und dann P'', Q'', W'', ſo findet man nach einander

$$(1) \quad \begin{cases} R' = \sqrt{(P'\mathrm{Cos}\alpha + Q'\mathrm{Cos}\beta)^2 + (P'\mathrm{Sin}\alpha + Q'\mathrm{Sin}\beta + W')^2} \\ R'' = \sqrt{(P''\mathrm{Cos}\alpha + Q''\mathrm{Cos}\beta)^2 + (P''\mathrm{Sin}\alpha + Q''\mathrm{Sin}\beta + W'')^2} \end{cases}$$

welches die Preſſungen auf die Zapfenlager B' und B'' ſind. Will man ihre Richtungen ϱ' und ϱ'' wiſſen, ſo ergeben ſich dieſe mittelſt der folgenden Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathrm{Tang}\varrho' = \dfrac{P'\mathrm{Sin}\alpha + Q'\mathrm{Sin}\beta + W'}{P'\mathrm{Cos}\alpha + Q'\mathrm{Cos}\beta}; \\ \mathrm{Tang}\varrho'' = \dfrac{P''\mathrm{Sin}\alpha + Q''\mathrm{Sin}\beta + W''}{P''\mathrm{Cos}\alpha + Q''\mathrm{Cos}\beta}. \end{cases}$$

Wirken die Kräfte P und Q nach lothrechten Richtungen, ſo ſind die Winkel α, β Rechte, folglich ihre Coſinuſſe $= 0$ und ihre Sinuſſe $= 1$; daher entſteht:

$$(3) \quad \begin{cases} R' = P' + Q' + W' = \dfrac{(l-a)(P+V) + (l-b)Q + \frac{1}{2}lU}{l} \\ R'' = P'' + Q'' + W'' = \dfrac{a(P+V) + bQ + \frac{1}{2}lU}{l}. \end{cases}$$

Die Werthe (2) der Tangenten von ϱ' und ϱ'' ergeben ſich für dieſen beſondern Fall beide $= \infty$; folglich ſind die zu-

gehörigen Winkel ebenfalls Rechte, und die Zapfenlager erleiden daher die Preſſungen (3) nach lothrechten Richtungen.

Beiſpiel. Mit Rückſicht auf die in dem Beiſpiel, am Ende des vorigen Paragraphen, angegebenen Zahlenwerthe, ſei noch $l = 6'$, $a = 4'$, $b = 2'$, $U = 226$ ℔, $V = 104$ ℔ gegeben, ſo findet man, zufolge der vorigen Formeln, $P' = 100$; $P'' = 200$; $Q' = 800$; $Q'' = 400$; $W' = 147{,}7$; $W'' = 182{,}3$, und demgemäß

$$R' = 966{,}05 \text{ ℔}; \quad \varrho' = 70^\circ\ 30'\ 4''$$
$$R'' = 680{,}41 \text{ ℔}; \quad \varrho'' = 76^\circ\ 38'\ 42''.$$

§. 205.

Gleichgewicht der Räderwerke. Unter einem Räderwerke verſteht man eine Verbindung von mehreren mit Rädern verſehenen Wellen, in ſolcher Art, daß keine dieſer Wellen gedreht werden kann, ohne dieſe Bewegung gleichzeitig den andern mitzutheilen. Die Verbindung der verſchiedenen Wellen kann dadurch bewirkt werden, daß ein vollkommen biegſames Seil ohne Ende über den Umfang eines jeden Rades und zugleich über den Mantel der nächſten Welle, oder einer darauf befeſtigten Scheibe läuft (Fig. 147), wobei es in einer ſolchen Spannung erhalten werden muß, daß es über dieſe Umfänge durchaus nicht gleiten kann. Andere Mittel zur Hervorbringung einer gleichzeitigen Drehung ſämmtlicher Wellen des Räderwerkes, wie z. B. Verzahnungen, brauchen hier nicht angeführt zu werden, da hiervon das Nöthige im zweiten Theile der Statik vorkommen wird.

Sei nun P die Kraft am Umfange des erſten Rades, Q die Laſt im Mantel der letzten Welle, welche von der genannten Kraft im Gleichgewicht erhalten werden ſoll; ſeien ferner R, R', R'', ꝛc. die Halbmeſſer der Räder; r, r', r'', ꝛc. die Halbmeſſer der zugehörigen Wellen und p, p', p'', ꝛc. die Spannungen in den umlaufenden Seilen, ſo kann man dieſe Spannungen für die Wellen, um welche die Seile laufen, als Laſten, und für die Räder, über deren Umfänge ſie laufen,

als Kräfte betrachten. Da nun das Gleichgewicht in der Maschine nur dann bestehen kann, wenn jede Welle für sich im Gleichgewichte ist, so hat man folgende Vergleichungen:

$$P : p = r : R$$
$$p : p' = r' : R'$$
$$p' : Q = r'' : R'' \text{ u. s. w.}$$

welche Proportionen, mit einander verbunden, die folgende liefern:

$$P : Q = rr'r'' : RR'R''.$$

D. h. Für das Gleichgewicht am Räderwerke muß sich die Kraft zur Last verhalten, wie das Produkt aus den Halbmessern der Wellen zum Produkte aus den Halbmessern der Räder.

Käme es darauf an, die einzelnen Zwischenwirkungen p, p', ... ꝛc. zu bestimmen, so kann dies mittelst der obigen Proportionen ebenfalls leicht geschehen.

§. 206.

Gleichgewicht am Krummzapfen. Es stelle AA', Fig. 148, ein Rad an der Welle und CD einen Arm vor, der mit der Fortsetzung eines der Wellzapfen in rechtwinkliger Stellung zu demselben fest verbunden ist. Am äußeren Ende D des Armes ist ein seitwärts vortretender Knopf — die sogenannte Warze — angebracht, dessen rundgedrehter Hals von einer Stange DQ (der Lenk- oder Bläuelstange) vermittelst einer Öse umfaßt wird. Der Arm CD mit dem zugehörigen Wellzapfen und der Warze D, welche Theile gewöhnlich aus einem Stücke bestehen, wird in der Praxis eine Kurbel oder ein Krummzapfen genannt, und der Zweck dieser Vorrichtung besteht darin, eine drehende Bewegung in eine hin- und hergehende, oder umgekehrt, zu verwandeln.

Denkt man ſich nämlich die Welle um ihre Achſe gedreht, ſo dreht ſich auch der mit ihr verbundene Krummzapfen um dieſelbe Achſe, und der Mittelpunkt ſeiner Warze beſchreibt einen Kreis, welcher durch **BB'** dargeſtellt iſt. Die Lenkſtange **DQ** wird aber dadurch bei jeder Umdrehung um den Durchmeſſer des genannten Kreiſes einmal hin und her bewegt, wobei ſie entweder ſich ſelbſt ſtets parallel bleibt, oder eine fortwährend veränderte Lage erhält.

Wie nun umgekehrt aus der hin- und hergehenden Bewegung der Lenkſtange mittelſt des Krummzapfens eine drehende Bewegung des Rades an der Welle hervorgehen kann, wird für ſich deutlich ſein. Wir ſetzen hier den erſten Fall voraus, indem wir zugleich annehmen, daß die Lenkſtange ſtets mit ſich ſelbſt parallel bleibt. Außerdem werde vorausgeſetzt, daß im Umfange des Rades eine Kraft **P**, in der Richtung der Lenkſtange aber ein Widerſtand **Q** wirkt, und zwar letzterer jedesmal der Bewegung dieſer Stange gerade entgegen. Soll nun zwiſchen dieſen beiden Kräften ein fortwährendes Gleichgewicht ſtattfinden, ſo kann dieſe Bedingung nur dadurch erfüllt werden, daß das Verhältniß ihrer Intenſitäten zu einander nach Maaßgabe der Stellung des Krummzapfens ſich ändert. Für die in Fig. 148 angenommene Stellung findet man z. B. das fragliche Verhältniß folgender Geſtalt:

Man fälle aus dem Mittelpunkte **C** den Perpendikel **CE** auf die verlängerte Richtung von **Q**, ſo ſtellt derſelbe den Hebelsarm vor, an welchem dieſe Kraft der Drehung widerſteht, welche **P** am Hebelsarm **CA** hervorzubringen ſtrebt, und für die Bedingung des Gleichgewichtes hat man daher

$$P \cdot AC = Q \cdot CE;$$

Zieht man den Durchmeſſer **AA'** parallel mit der Richtung von **Q**, und bezeichnet den Winkel **BCD**, der die Stellung

des Armes CD gegen jenen Durchmesser bestimmt, mit α, die Länge von CD mit a, die von CA mit r, so ist CE $= a \operatorname{Sin} \alpha$ und also

$$P \cdot r = Q \cdot a \operatorname{Sin} \alpha. \quad (1)$$

Diese Gleichung giebt nun die veränderliche Beziehung, welche zwischen den Kräften P und Q stattfinden muß, wenn dieselben für alle Werthe von α, d. h. für alle möglichen Stellungen des Krummzapfens, mit einander im Gleichgewichte sein sollen. In der Praxis ist Q gewöhnlich ein sich stets gleichbleibender Widerstand, nur darin veränderlich, daß er bei der hin- und hergehenden Bewegung der Lenkstange seine Richtung abwechselnd in die entgegengesetzte *verwandelt*. Betrachtet man diesen beständigen Widerstand als gegeben, so ergiebt sich für die Intensität der, ihm das Gleichgewicht halhaltenden, Kraft die Formel

$$P = \frac{a}{r} Q \operatorname{Sin} \alpha.$$

Dieselbe liefert $P = 0$ sowohl für $\alpha = 0$, als auch für $\alpha = 2$ R.; dagegen $P = \frac{a}{r} Q$ für $\alpha = 1$ R. und $\alpha = 3$ R. Jene Werthe entsprechen den Stellungen des Krummzapfens, wo sich der Mittelpunkt seiner Warze in B und B', diese dagegen den Stellungen, wo sich derselbe um 90 Grade von den vorigen Punkten entfernt in F und F' befindet.

Wenn also der in der Lenkstange wirkende Widerstand als beständig vorausgesetzt wird, so erreicht die zu seiner Überwindung im Umfange des Rades erforderliche Kraft bei jeder Umdrehung desselben zweimal den kleinsten Werth $= 0$ und zweimal den größten $= \frac{a}{r} Q$.

§. 207.

Mittelwerth der Kraft am Krummzapfen. Da sich eine nach bestimmten Gesetzen veränderliche Kraft zum

Maſchinenbetriebe praktiſch nicht herſtellen läßt, ſo iſt man genöthigt, mit Verzichtleiſtung auf das fortwährende Gleichgewicht zwiſchen Kraft und Widerſtand, einen paſſenden Mittelwerth für erſtere in Anwendung zu bringen. Letzterer wird erhalten, wenn man die im Umfange des Rades AA' (Fig. 148) erforderliche Kraft P für alle Stellungen berechnet, in die der Krummzapfen CD bei jedem Hin- und Hergange der Lenkſtange nach einander gelangt, und die Summe dieſer Werthe von P durch die Anzahl derſelben dividirt.

Um dieſes Verfahren in Ausübung zu bringen, denke man ſich den Halbkreis BFB' in n gleiche Theile getheilt, und aus den Theilpunkten gerade Linien nach dem Mittelpunkte C gezogen, ſo entſtehen hier n gleiche Centriwinkel, deren Summe gleich zweien Rechten iſt. Bezeichnet man alſo jeden dieſer Centriwinkel, in Bogenmaaß für den Halbmeſſer = 1 genommen, mit φ, ſo iſt $n\varphi = \pi$. Wenn nun der Mittelpunkt der Warze D nach einander im erſten, zweiten, dritten Theilpunkte, u. ſ. f. gedacht wird, ſo ergeben ſich die entſprechenden Werthe von P, indem man in der zweiten Formel des vorigen Paragraphen für α nach einander die Werthe φ, 2φ, 3φ,....$n\varphi$ einſetzt; nämlich gleich

$$\frac{a}{r}Q\,\mathrm{Sin}\,\varphi;\quad \frac{a}{r}Q\,\mathrm{Sin}\,2\varphi;\quad \frac{a}{r}Q\,\mathrm{Sin}\,3\varphi;\quad \ldots\frac{a}{r}Q\,\mathrm{Sin}\,n\varphi.$$

Der fragliche Mittelwerth iſt daher

$$P = \frac{aQ}{rn}[\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,2\varphi + \mathrm{Sin}\,3\varphi + \cdots\cdots + \mathrm{Sin}\,n\varphi],$$

wo es nunmehr noch darauf ankommt, die Summe der eingeklammerten Reihe, welche durch $\Sigma\mathrm{Sin}\,n\varphi$ bezeichnet werden mag, zu finden. Nach Formel (4) in Nr. 20 des Anhangs iſt aber

$$\Sigma\mathrm{Sin}\,n\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,n\varphi - \mathrm{Sin}(n+1)\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi}{2(1-\mathrm{Cos}\,\varphi)},$$

welcher Ausdruck ſich, wenn man für $n\varphi$ den zugehörigen Werth π einſetzt, auf folgenden reducirt:

$$\Sigma \operatorname{Sin} n\varphi = \frac{\operatorname{Sin}\pi - \operatorname{Sin}(\pi+\varphi) + \operatorname{Sin}\varphi}{2(1-\operatorname{Cos}\varphi)} = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Bekanntlich iſt nun $\operatorname{Sin}\varphi = 2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi$ und $1-\operatorname{Cos}\varphi = 2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varphi^2$; und mit Rückſicht auf dieſe Werthe findet man demnächſt

$$P = \frac{aQ\operatorname{Sin}\varphi}{rn(1-\operatorname{Cos}\varphi)} = \frac{aQ\cdot\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi}{rn\cdot\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varphi}.$$

Dieſe Formel liefert nun den geſuchten Mittelwerth der zur Bewegung des Krummzapfens erforderlichen Kraft offenbar deſto genauer, je größer die Anzahl der gleichen Theile iſt, in die man den Halbkreis BFB' getheilt hat; d. h. je größer n, und folglich je kleiner φ angenommen wird. Sie giebt daher einen vollkommen genauen Werth von P, wenn man n unendlich groß, φ alſo unendlich klein annimmt. — Für unendlich kleine Winkel kann man aber den Coſinus gleich eins und den Sinus gleich dem zugehörigen Bogen ſetzen, ſo daß alſo der genaue Mittelwerth der bewegenden Kraft nach obiger Formel gefunden wird, indem man darin $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = 1$ und $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ ſetzt. Dadurch entſteht

$$P = \frac{aQ}{rn\cdot\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2a}{rn\varphi}\cdot Q,$$

oder, weil nach der Vorausſetzung $n\varphi = \pi$ iſt,

$$P = \frac{2a}{\pi r}\cdot Q.$$

Daſſelbe Reſultat läßt ſich auch noch auf einem kürzeren Wege, nämlich durch eine einfache Anwendung des Carteſiſchen Grundſatzes, herleiten, nur daß es dabei nicht als das arithmetiſche Mittel aller Kraftäußerungen hervortritt, die während jedes Hin- und jedes Herganges der Lenkſtange erforderlich ſind.

Um dies noch zu zeigen, denke man ſich den Mittel-

punkt der Kurbelwarze zuerst im Anfangspunkte B des mit der Lenkstange parallelen Durchmessers, und lasse dann das Rad AA' eine halbe Umdrehung machen, so daß die Warze, nachdem ihr Mittelpunkt durch den Halbkreis BFB' gegangen ist, nach B' kömmt. Da nun die Lenkstange während dieser Bewegung sich selbst stets parallel bleibt, so ist $BB' = 2a$ der vom Widerstande Q durchlaufene Weg, während der gleichzeitige Weg der Kraft P gleich πr ist. Nach dem Cartesischen Grundsatze hat man daher

$$P : Q = 2a : \pi r; \quad \text{also } P = \frac{2a}{\pi r} Q.$$

Anmerk. Die Praktiker berechnen den Mittelwerth der bewegenden Kraft des Krummzapfens gewöhnlich für den mittleren Stand des Kurbelarmes, in welchem derselbe mit der Lenkstange einen Winkel von 45 Graden bildet. Nach (2) des vorigen §. ergiebt sich aber für $\alpha = 45°$

$$P = \frac{a}{r} Q \cdot \sin 45° = \frac{aQ}{r} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707 \cdot \frac{aQ}{r};$$

während nach obiger Formel $P = 0{,}637 \cdot \frac{aQ}{r}$ ist. Daher liefert erstere Berechnungsweise ein Resultat, welches um etwa 11 Procent größer ist, als der wahre Mittelwerth der bewegenden Kraft.

IV. Von den Waagen und Kraftmessern.

§. 208.

Wiegevorrichtungen oder Waagen sind im Allgemeinen eine besondere Art einfacher Maschinen — meist Hebelverbindungen — dazu bestimmt, zwei Kräfte, von denen die eine unbekannt ist, mit einander ins Gleichgewicht zu bringen, und aus den Bedingungen des Gleichgewichtes die Intensität der unbekannten Kraft zu bestimmen. In dieser allgemeinen Auffassung führen jene Vorrichtungen den Namen der Kraftmesser (Dynamometer), während sie insbesondere Waagen genannt werden, sobald sie als Hülfsmittel zur Bestimmung des unbekannten Gewichts der Körper mit-

telst bekannter Gegengewichte, d. h. zum Wiegen, benutzt werden.

Diese verschiedenen Benennungen deuten also nicht sowohl auf eine Verschiedenartigkeit der Anordnung dieser Vorrichtungen, als vielmehr nur auf die technische Anwendung derselben hin. Denn der Natur der Sache nach kann jede Waage als Kraftmesser, wie umgekehrt, jeder Kraftmesser als Waage dienen, und in der That werden die genannten Apparate sehr häufig zu beiden Zwecken benutzt. Der Unterschied liegt also nur in der verschiedenen Benennung, welche aus dem gewerblichen Verkehr herübergekommen ist; er fällt für die theoretische Betrachtung sogleich fort, wenn man statt des Wortes Waage, das vielleicht bezeichnendere Wort Gewichtsmesser setzt, und sich dabei erinnert, daß ein Gewicht eben nichts anderes ist als eine Kraft, nämlich eine Schwerkraft, und daß auch von andern Kräften die Intensitäten nur durch Vergleichung mit Gewichten gemessen zu werden pflegen.

Es muß indeß bemerkt werden, daß die obige Identität der Gewichts- und Kraftmesser nur im statischen Sinne zu nehmen ist, wogegen in der praktischen Mechanik auch Apparate zur Anwendung kommen, um neben der Intensität einer bewegenden Kraft zugleich die Größe der von ihr in einer bestimmten Zeit hervorgebrachten Bewegung, oder vielmehr das Produkt beider Größen, zu messen. Von diesen Apparaten, welche ebenfalls Dynamometer genannt werden, kann hier natürlich nicht die Rede sein.

Bei denjenigen Gewichts- oder Kraftmessern, welche ihrer theoretischen Grundlage nach hieher gehören, und von welchen in den nächstfolgenden §§. die gebräuchlichsten näher betrachtet werden sollen, ist es ein Haupterforderniß ihrer praktischen Brauchbarkeit, daß sie vermöge ihrer Construction so viel wie irgend möglich frei sind, von allen Reibungen und

sonstigen Nebenhindernissen. Denn da die letztern niemals mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmt werden können, so würden sie die Resultate der Messung zu sehr beeinträchtigen und dadurch unzuverlässig, ja ganz unbrauchbar, machen.

Aus diesem Grunde, und in Übereinstimmung mit dem bisher bei der Ausarbeitung dieses Buches befolgten Plane, soll hier die Theorie der in Rede befindlichen Vorrichtungen ohne alle Rücksicht auf etwanige Nebenhindernisse dargelegt werden.

§. 209.

Die gemeine Krämerwaage, vielleicht die älteste aller bekannten Wiegevorrichtungen, besteht aus einem doppelarmigen Hebel **AB** (Fig. 149), dem Waagebalken, der in seiner Mitte bei **C** unterstützt und an beiden Enden mit frei herabhängenden Schalen zur Aufnahme der zu wiegenden Körper versehen ist. Legt man in beide Schalen gleiche Gewichte **Q**, so muß der Waagebalken genau horizontal stehen, wogegen ein Mehrgewicht **P** in der einen Schale dieselbe herabdrückt und einen schrägen Stand **A'B'** des Balkens herbeiführt. Die mit dem Waagebalken verbundene Zunge **CE** zeigt diesen schrägen Stand an, durch den Winkel $ECE' = x$, den man den Ausschlag nennt, und nach dessen Größe die Empfindlichkeit der Waage beurtheilt wird. Daher kömmt es darauf an, die Umstände zu ermitteln, welche hierauf Einfluß haben, und darin besteht die Theorie der in Rede befindlichen Vorrichtung.

Um dieselbe zu entwickeln, denke man sich die Aufhängepunkte **A** und **B** der beiden Waagschalen durch eine gerade Linie **AB** verbunden, und durch den Unterstützungspunkt **C** des Waagebalkens eine horizontale Linie **KL** gelegt, auf welche aus den Punkten **A**, **B** die Perpendikel **AK**, **BL** gefällt werden. Bezeichnet man die Längen der gleichen Arme $AD = BD$ mit **a**, dann ist für den horizontalen Stand

des Balkens auch $KC = LC = a$, und diese Linien bilden die Hebelsarme in Bezug auf den Drehpunkt C, an welchen die mit gleichen Gewichten Q belasteten Schalen sich einander das Gleichgewicht halten. Der Schwerpunkt G der unbelasteten Waage liegt dabei, wie auch der Mittelpunkt D, senkrecht unter dem Drehpunkte C, dessen Abstände CG, CD von jenen Punkten bezüglich durch b und c bezeichnet werden sollen.

Dieser horizontale Gleichgewichtsstand hört auf, sobald man zu der Belastung Q der einen, etwa der rechten, Schale ein Übergewicht P legt, wodurch die Mittellinie AB des Balkens in die schräge Lage A'B', der Schwerpunkt G aber seitwärts der Vertikale CG nach G' gebracht wird. Das im letzteren vereinigt zu denkende Gewicht W der unbelasteten Vorrichtung erhält dadurch einen Hebelsarm CH, an dem es der ferneren Drehung widersteht, dergestalt, daß die Vorrichtung in der schrägen Lage auf's neue zum Gleichgewichte kommen kann. Fällt man nämlich aus A' und B' die Perpendikel A'K', B'L' auf die Horizontale KL, so sind CK', CL' die Hebelsarme der ungleichen Kräfte Q und $P+Q$, und es ergiebt sich die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes:

$$Q \cdot CK' + \cdot CHW = (P+Q) \cdot CL'.$$

In dieser Gleichung ist aber, wie sich leicht finden läßt, $CH = b\,\mathrm{Sin}\,x$, $CK' = a\,\mathrm{Cos}\,x + c\,\mathrm{Sin}\,x$, $CL' = a\,\mathrm{Cos}\,x - c\,\mathrm{Sin}\,x$, und durch Einsetzung dieser Werthe findet man:

$$Q(a\,\mathrm{Cos}\,x + c\,\mathrm{Sin}\,x) + W\,b\,\mathrm{Sin}\,x = (P+Q)(a\,\mathrm{Cos}\,x - c\,\mathrm{Sin}\,x).$$

Zur Bestimmung des fraglichen Ausschlages ergiebt sich nun

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{Tang}\,x = \frac{aP}{c(P+2Q)+bW};$$

ein Ausdruck, der zu folgenden Schlüssen Anlaß giebt:

1) Der Ausschlag x ist desto merklicher, die Waage also desto empfindlicher, je größer unter übrigens gleichen Umstän-

den die Länge a der beiden Arme, oder je größer die Länge des ganzen Waagebalkens ist.

2) Daß mit der Größe des Übergewichtes P auch der Ausschlag zunehmen muß, wie die obige Formel zeigt, ist schon für sich einleuchtend.

3) Dagegen wird die Empfindlichkeit durch die ursprüngliche Belastung Q der beiden Waagschalen vermindert, und zwar desto mehr, je größer CD = c ist. Soll dieser Uebelstand beseitigt werden, so muß c = 0 sein, d. h. der Unterstützungspunkt C muß mit den beiden Aufhängepunkten A und B in einer geraden Linie liegen, wie es auch bei allen feinen Waagen der Fall ist. Dies vorausgesetzt, so verwandelt sich der obige Ausdruck in folgenden:

$$\text{(II)} \qquad \text{Tang } x = \frac{aP}{bW}$$

4) Der Ausschlag x wird ferner desto größer, je kleiner das eigne Gewicht W der unbelasteten Vorrichtung ist. Um daher die Empfindlichkeit der Waage zu steigern, muß ihr Balken möglichst leicht konstruirt werden, was einigermaaßen mit der ersten Bedingung einer möglichst großen Länge desselben im Widerspruch steht. Beide Bedingungen lassen sich nur insoweit vereinigen, als es die nicht außer Acht zu lassende Rücksicht auf die der Belastung entsprechende Festigkeit und Unbiegsamkeit des Balkens gestattet, was der Künstler in jedem besondern Falle beurtheilen muß.

5) Endlich hat die Größe CG = b einen entschiedenen Einfluß auf die Empfindlichkeit der Waage, und zwar ist nach Formel (II) die Tangente von x jener Größe umgekehrt proportional. Darin ist ein häufig benutztes Mittel gegeben, die Empfindlichkeit beliebig zu steigern, was jedoch seine Grenzen hat. Namentlich darf b niemals gleich Null werden, d. h. der Schwerpunkt G darf mit dem Unterstützungspunkte C nicht zusammenfallen, weil sonst für jeden

Werth von P sich allemal Tang. $x = \infty$, also $x = 90°$, ergäbe. Der Waagebalken würde demnach bei jeder noch so kleinen Mehrbelastung der einen Schale sofort umschlagen und sich vertikal stellen; so daß die Vorrichtung nicht mehr zum Wiegen gebraucht werden könnte.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß die obige Theorie wesentlich auf der Voraussetzung der Gleichheit der beiden Arme AD und BD beruht, was für die Richtigkeit der Waage eine unerläßliche Bedingung ist. Wie man sich in der Praxis von dieser Gleicharmigkeit Ueberzeugung verschafft, und welche Hülfsmittel man anzuwenden pflegt, um in zweifelhaften Fällen dem nachtheiligen Einflusse einer etwanigen Ungleicharmigkeit vorzubeugen, das gehört nicht hieher.

§. 210.

Die römische Waage (Romana). Sie gehört zu der Gattung der sogenannten Schnellwaagen, worunter man im Allgemeinen solche Vorrichtungen begreift, die das Gewicht eines Körpers durch ein kleineres Gegengewicht bestimmen. Bei der in Rede befindlichen Vorrichtung findet noch die Eigenthümlichkeit statt, daß das Gegengewicht konstant, sein Hebelsarm dagegen veränderlich ist, während es auch Schnellwaagen giebt, wo das Umgekehrte von diesem stattfindet.

Die in Fig. 150 dargestellte römische Waage besteht aus einem ungleicharmigen, in A unterstützten Waagebalken BC, an dessen kürzerem Arm AB die zu wiegende Last Q wirkt, während das zum Gleichgewicht erforderliche Gegen- oder Laufgewicht P auf dem längern Arme AC so lange verschoben wird, bis der Waagebalken in horizontaler Stellung zum Gleichgewichte kommt. Diesen Zustand vorausgesetzt, sei W das eigne Gewicht des Waagebalkens, AE die Entfernung seines Schwerpunktes vom Unterstützungspunkte A, so findet

mit Hinſicht auf die Figur folgende ſtatiſche Momenten-Gleichung ſtatt:

$$P \cdot AD + W \cdot AE = Q \cdot AB.$$

Man bezeichne die unveränderlichen Abſtände AB und AE bezüglich mit a und b, die mit dem Gewicht Q ſich ändernde Entfernung AD des Laufgewichtes mit x, ſo iſt:

$$Px + Wb = Qa;$$

alſo

$$x = \frac{Qa - Wb}{P}.$$

Für $x = 0$ ergiebt ſich hieraus $Q = \frac{b}{a} W$, wodurch dasjenige Gewicht beſtimmt wird, welches von der Schwere des zu wiegenden Körpers überſchritten werden muß, damit letzterer mittelſt der fraglichen Vorrichtung gewogen werden kann. — In der Regel muß alſo Q größer als jenes kleinſte Gewicht ſein, um beſtimmte Werthe von x zu erhalten, und für den praktiſchen Gebrauch bringt man dann auf dem langen Arme AC des Waagebalkens eine Theilung mit beigeſetzten Zahlen an, welche das geſuchte Gewicht der Laſt Q ſofort erſehen laſſen. Die Intervalle zwiſchen je zwei Theilſtrichen entſprechen nämlich einer gewiſſen Gewichtseinheit q, von welcher Q irgend ein Vielfaches iſt, und dieſe Vielfachen drücken die den Theilſtrichen beigefügten Zahlen aus.

Bezeichnet man die den Belaſtungen $Q = mq$ und $Q = (m-1)q$ entſprechenden Werthe von x bezüglich mit x_m und x_{m-1}, ſo hat man nach einander:

$$x_m = \frac{mqa - Wb}{P};$$

$$x_{m-1} = \frac{(m-1)qa - Wb}{P}.$$

Die Differenz dieſer beiden Werthe giebt nun die Größe des mten Intervalles, nämlich:

$$x_m - x_{m-1} = \frac{qa}{P},$$

woraus man ſieht, daß ſämmtliche Intervalle gleich groß ſein müſſen; denn der obige Ausdruck hängt für ein beſtimmtes a nur von der Größe des unveränderlichen Gegengewichts und von der zum Grunde liegenden Gewichtseinheit ab.

Der Waagebalken muß demnach eine gleichmäßige Theilung erhalten, und eine ſolche läßt ſich auf empiriſchem Wege leicht ausführen. Iſt z. B. 5 Pfund das kleinſte und 30 Pfund das größte Gewicht, welches mit einer derartigen Vorrichtung bei einer beſtimmten Länge ihres Balkens gewogen werden kann, ſo ſucht man durch Probiren die Punkte auf, wo das Gegengewicht angebracht werden muß, um jenen Belaſtungen das Gleichgewicht zu halten. An dieſen Punkten macht man die erſten, mit 5 und 30 zu bezeichnenden, Theilſtriche, und theilt dann den Zwiſchenraum durch mechaniſche Hülfsmittel in 25 gleiche Theile.

Sollen mit derſelben Vorrichtung ſchwerere Laſten, als die der oberen Theilung entſprechen, gewogen werden, ſo kehrt man den Waagebalken um, und dann dient F ſtatt A als Unterſtützungspunkt. Daß dann aber auf der entgegengeſetzten Seite des Balkens eine neue Theilung ſtattfinden muß, iſt ein Selbſtverſtändniß.

Anmerk. Die obige Wiegevorrichtung war ſchon bei den alten Römern im Gebrauche und hat davon ihren Namen. Abbildungen antiker römiſcher Waagen nach in Herkulanum und Pompeji aufgefundenen Exemplaren findet man im Real Museo Borbonico Vol. I, Tab. VI und Vol. 8, Tab. XVI.

§. 211.

Die ſchwediſche Waage (Deſemer), eine bei uns auf dem Lande vielfach im Gebrauch befindliche Art von Schnellwaagen, beſteht aus einem geraden Stabe AB, Fig. 151, der an einem Ende mit einer aufgeſchraubten Kugel B beſchwert, am andern Ende aber mit einem beweglichen Haken zum Anhängen der zu wiegenden Laſt Q verſehen iſt. Der

Stab ruht in einem Ringe D, der ihm beim Wiegen zur Unterstützung dient, und in welchem er so lange verschoben wird, bis die angehängte Last Q mit dem eigenen Gewichte der Vorrichtung ins Gleichgewicht gekommen ist.

Es sei C der Schwerpunkt, W das darin als eine vertikale Kraft vereinigt gedachte Gewicht des Stabes mit sammt der Kugel B und des bei A angebrachten Hakens, und in D befinde sich die Unterstützung für den Zustand des Gleichgewichtes zwischen Q und W, bei welchem die Mittellinie des Stabes horizontal steht. Man setze $AC = a$, $CD = x$, so ist $AD = a - x$; nach §. 57 findet nun die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes statt:

$$Q(a-x) = Wx;$$

woraus sich findet $$x = \frac{Qa}{Q+W}.$$

Will man für eine auf dem Stabe zu machende Theilung die Größe der zugehörigen Intervalle bestimmen, so setze man mit Bezug auf q, als die angenommene Gewichtseinheit, $W = nq$ und bezeichne wie vorhin die zu den successiven Belastungen $Q = mq$ und $= (m-1)q$ gehörigen Werthe von x bezüglich mit x_m und x_{m-1}, so hat man

$$x_m = \frac{ma}{m+n}; \quad x_{m-1} = \frac{(m-1)a}{m-1+n}.$$

Die Differenz $x_m - x_{m-1} = \frac{na}{(m+n)(m+n-1)}$ giebt nun die Größe des mten Intervalles, und es erhellet aus dieser Formel, daß mit der Zunahme von m die Intervalle immer kleiner werden, da n und a unveränderlich sind. Die Theilung ist also bei dieser Vorrichtung keine gleichmäßige und ihr Anfertigung daher schwieriger als bei der römischen Waage. Auf folgende Art kann sie aber mechanisch ausgeführt werden: Eine geringe Ueberlegung zeigt nämlich, daß es nur darauf ankömmt, für jeden gegebenen Werth von Q

den Punkt D so zu finden, daß sich AD : CD = W : Q verhält, oder, wenn Q = mq angenommen wird, während W = nq ist,

$$AD : CD = n : m.$$

Man ziehe nun aus C, dem Nullpunkte der Theilung, die Gerade CX von unbestimmter Länge, mit AC einen beliebigen Winkel bildend, und trage darauf nach irgend einem Maaßstabe die gleichen Theile CE = EF = FG ꝛc. ab, so sind CE, CF, CG, ꝛc. den aufeinanderfolgenden Zahlenwerthen von m proportional. Aus A ziehe man parallel mit CX die Linie AO, deren Länge man gleich n von den gleichen Theilen der CX macht, und verbinde den Punkt O mit den Punkten E, F, G, H, ꝛc. durch gerade Linien, welche AC in 1, 2, 3, 4, ꝛc. schneiden, so sind das die gesuchten Theilpunkte der Skala, deren Intervalle sich, wie man sieht, von C nach A zu allmählig verjüngen.

Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens liegt in der Aehnlichkeit der Dreiecke wie AOD und CDG, nach welcher sich AD : CD = AO : CG verhält. Da nun AO dem Gewichte W oder der Zahl n, CG aber der Last Q oder einem der Zahlenwerthe vom m proportional ist, so hat man die dem Gleichgewichte zwischen Q und W entsprechende Proportion: AD : CD = W : Q. Dasselbe läßt sich für jeden andern Theilpunkt der Skala nachweisen.

§. 212.

Straßburger Brückwaage. Die von Quintenz in Straßburg erfundene Schnellwaage, welche zum Wiegen schwerer Güter allgemein im Gebrauche ist, besteht dem Prinzipe nach in Folgendem:

In Fig. 152 ist AB der ungleicharmige Waagebalken, welcher bei C mit stählernen Schneiden in Pfannen von gleichem Material ruht, und an seinem langen Arme bei A mit

einer Schale zur Aufnahme von Gegengewichten versehen ist. GH ist ein eiserner Tragehebel, unterhalb der zur Aufnahme der Last Q bestimmten Brücke EF horizontal gelagert, an seinem hintern Ende bei H durch eine Stahlschneide unterstützt, an seinem vorderen Ende aber durch die senkrechte Stange BG an dem kurzen Arme BC des Waagebalkens aufgehangen. Derselbe ist aus zwei gleich langen Eisenstäben so zusammengesetzt, daß letztere im Grundrisse mit der horizontalen Schneide bei H ein gleichschenkliches Dreieck bilden, dessen Spitze in G liegt. Eine ähnliche Gestalt hat die Brücke EF, welche zum freien Durchgange der Stange BG an ihrer vorderen Seite geschlitzt ist; sie hängt einerseits mittelst der ebenfalls senkrechten Stange DE am kurzen Arme des Waagebalkens und ruht andererseits bei F auf Stahlschneiden, die zu dem Ende auf den Schenkeln des Tragehebels angebracht sind.

Es versteht sich von selbst, daß alle Unterstützungs- und Verbindungspunkte mittelst gehärteter Schneiden und Pfannen aus Stahl so hergestellt sein müssen, daß in ihnen eine freie Drehbewegung der verbundenen Theile ohne merkliche Friction stattfinden kann. Vor allen Dingen müssen aber die Gewichte aller beweglichen Theile genau ausgeglichen sein, damit bei der unbelasteten Vorrichtung der Waagebalken horizontal zu stehen kommt, was man daran erkennt, daß der mit dem Balken auf und ab spielende Zeiger K sich dem unbeweglichen Zeiger L gerade gegenüber stellt.

Dies vorausgesetzt, sei Q das zu bestimmende Gewicht der Last auf der Brücke und P das bekannte Gegengewicht, welches in die Schale bei A gelegt werden muß, um den horizontalen Stand des Waagebalkens, d. h. das genaue Einspielen der Zeiger K und L herbeizuführen; alsdann findet zwischen P und Q Gleichgewicht statt, da die beweglichen Theile des Apparats für sich im Gleichgewichte sind. — Um

nun die Bedingungen des Gleichgewichtes zwiſchen P und Q zu finden, ſei J die Projection des Schwerpunktes der Laſt, EJ = x, JF = y. Man zerlege Q in zwei parallele Seitenkräfte Q′ und Q″, welche durch die Punkte F und E gehen, ſo ergeben ſich deren Intenſitäten alſo:

$$Q' = \frac{xQ}{x+y}; \qquad Q'' = \frac{yQ}{x+y}.$$

Die Kraft Q″ wirkt vermittelſt der feſten Stange ED auf den Punkt D des Waagebalkens, während Q′ auf den Punkt F des Tragehebels drückt. Um die daraus entſpringende Wirkung in der Richtung von BG zu finden, ſei Q‴ die gleichgeltende Kraft in G, die Abſtände GH, FH ſeien bezüglich gleich a′ und b′, ſo hat man

$$Q''' = \frac{Q'b'}{a'} = \frac{b'xQ}{a'(x+y)},$$

wenn für Q′ der vorige Werth eingeſetzt wird.

Am kurzen Arme des Waagebalkens wirken nun nach den Richtungen DE, BG die Kräfte Q″ und Q‴, und dieſe müſſen daher mit dem bei A aufgehängten Gewicht P im Gleichgewichte ſein. Setzt man daher die Hebelsarme CB = a, CD = b und AC = c, ſo hat man die ſtatiſche Momentengleichung in Bezug auf den Drehpunkt C:

$$aQ''' + bQ'' = cP,$$

oder, wenn für Q″ und Q‴ die zugehörigen Werthe eingeſetzt werden

$$\frac{ab'xQ}{a'(x+y)} + \frac{byQ}{x+y} = cP.$$

Hieraus findet man nun das erforderliche Gegengewicht

$$P = \frac{ab'x + a'by}{a'c(x+y)}\,Q,$$

welches demnach von x und y, d. h. von der Lage der Laſt Q auf der Brücke, weſentlich abhängig iſt. Damit aber die Vorrichtung zu Gewichtsermittelungen wirklich brauchbar ſei,

muß jene Abhängigkeit beseitigt und die Einrichtung so getroffen werden, daß es in Absicht auf das zum Gleichgewicht erforderliche Gegengewicht gleichgültig ist, auf welche Stelle der Brücke die Last zu liegen kommt. — Diese unerläßliche Bedingung der praktischen Brauchbarkeit wird erreicht, wenn $a'b = ab'$ gesetzt, oder $a' : b' = a : b$ gemacht wird, denn dann hebt sich in dem vorigen Ausdrucke von P im Zähler und Nenner die Größe $x + y$, und es entsteht

$$P = \frac{b}{c} Q.$$

Bei der Ausführung der in Rede befindlichen Vorrichtung muß also darauf gesehen werden, daß zwischen den Abständen GH, FH genau dasselbe Verhältniß wie zwischen CB und CD stattfinde; alsdann wirkt die Last Q eben so auf den Waagebalken, als wäre sie an seinem kurzen Arme unmittelbar im Punkte D aufgehangen, und das Verhältniß der Hebelarme CD zu CA bestimmt demnächst das der Gewichte P und Q zu einander. Ist jenes Verhältniß z. B. gleich 1 : 10, wie es in der Regel ausgeführt wird, so erfordert die Last Q, wo sie auch auf der Brücke liegen mag, jedesmal $\frac{1}{10}$ ihres Gewichts als Gegengewicht in der Waageschale, um dadurch ins Gleichgewicht zu kommen. Die Vorrichtung ist dann eine Dezimalwaage, die man im öffentlichen Verkehr gewöhnlich zum Wiegen von Lasten bis etwa 50 Zentnern anwendet. Doch hat man auch Centesimalwaagen, bei welchen das Verhältniß CD : CA = 1 : 100 ist, und die zum Wiegen schwererer Lasten bis zu mehreren 100 Zentnern dienen. Letztere werden gewöhnlich so groß und stark gebaut, daß ein ganzer Frachtwagen mit seinen vier Rädern darauf Platz findet, um gewogen zu werden.

§. 213.

Kuppler's Tafelwaage. Das Prinzip dieser Vor-

richtung, welches dem der Brückwaage ähnlich iſt, beſteht in Folgendem:

In Fig. 153 ſtellt **AB** eine horizontale Tafel zum Auflegen der zu wiegenden Laſten **Q**, **CD** eine kleinere Tafel für die entſprechenden Gegengewichte **P** vor. **EF** und **GH** ſind zwei ungleicharmige, bei **J** und **K** durch Stahlſchneiden unterſtützte Tragehebel, mit deren kurzen Armen die Tafel **AB** durch die ſenkrechten Stützen **AE**, **BG**, und mit deren langen Armen die Tafel **CD** durch die ebenfalls ſenkrechten Stützen **DF**, **CH** verbunden ſind. Innerhalb der Unterſtützungen **J** und **K** iſt zwiſchen beiden Traghebeln die ſenkrechte Spreize **LM** angebracht, vermöge welcher keiner der Hebel ſich bewegen kann, ohne daß der andere mit in Bewegung kommt.

Die Verbindungen in **E**, **F**, **G** und **H**, ſowie die in **L** und **M**, ſind zur Erzielung einer freien Drehbewegung ohne Friction vermittelſt harter Stahlſchneiden und Pfannen bewirkt. Auch müſſen die eignen Gewichte aller genannten Theile ſo ausgeglichen ſein, daß das ganze Syſtem, wenn unbelaſtet, ſich im Gleichgewichte befindet, wobei die Traghebel eine horizontale Lage haben, und eine gleiche Lage müſſen dieſelben annehmen, ſobald die Laſt **Q** mit dem entſprechenden Gegengewichte **P** ins Gleichgewicht gekommen iſt. Dieſer Zuſtand wird durch einen Inder angezeigt, der etwa an der Tafel **CD** irgend wo angebracht ſein kann. Daß endlich der ganze Apparat in einem kaſtenförmigen Gehäuſe angeordnet iſt, um ihn gegen Staub und Beſchädigung zu ſchützen, mag beiläufig noch erwähnt werden.

Es kömmt nun darauf an, die Theorie dieſer Vorrichtung zu entwickeln, aus welcher demnächſt die Bedingungen für die Konſtruction derſelben hervorgehen werden.

Die Stelle, welche die Laſt **Q** auf der Tafel **AB** einnimmt, ſoll durch die Abſtände $AQ = y$, $BQ = y'$, die,

welche das Gegengewicht P auf CD einnimmt, durch DP = x, CP = x′ bezeichnet werden; ferner ſeien FJ = a, EJ = b die Hebelsarme des unteren, HK = a′, GK = b′ die des oberen Traghebels und die Entfernungen JM, KL der Spreize LM von den beiden Unterſtützungen J und K mögen bezüglich z und z′ heißen.

Die Laſt Q zerlegt ſich in zwei parallele Seitenkräfte Q′, Q″ nach den Richtungen der vertikalen Stützen AE und BG, wofür ſich nach bekannten Lehren die Ausdrücke ergeben:

$$Q' = \frac{Qy'}{y+y'}; \quad Q'' = \frac{Qy}{y+y'}.$$

Ebenſo zerlegt ſich das Gewicht P nach den Richtungen DF, CH in die Seitenkräfte

$$P' = \frac{Px'}{x+x'}; \quad P'' = \frac{Px}{x+x'}.$$

Die Angriffspunkte dieſer vier Kräfte können in deren Richtungen nach den Endpunkten der Traghebel verlegt werden, und da die letzteren vermittelſt der Spreize LM auf einander wirken, ſo muß der Widerſtand dieſer Spreize gegen beide Hebel mit in Rechnung kommen. Man kann denſelben durch eine Kraft V erſetzt denken, welche auf den untern Hebel in M vertikal abwärts, gegen den oberen Hebel in L aber vertikal aufwärts wirkt, und dann iſt jener unter den Kräften P′, Q′, V, dieſer unter den Kräften P″, Q″ und V als im Gleichgewicht zu betrachten. Dem entſprechend hat man die Bedingungsgleichungen:

$$P'a + Vz = Q'b,$$
$$P''a' - Vz' = Q''b',$$

aus welchen durch Elimination von V folgende Gleichung entſteht:

$$az'P' + a'zP'' = bz'Q' + b'zQ''.$$

Setzt man darin für P′, P″, Q′ und Q″ die obigen

Werthe ein, ſo verwandelt ſich dieſe Gleichung folgendergeſtalt:

$$\frac{az'x' + a'zx}{x' + x} P = \frac{bz'y' + b'zy}{y' + y} Q.$$

Hiedurch würde nun zwar das Verhältniß zwiſchen P und Q gegeben ſein; allein eine geringe Ueberlegung läßt ſofort ermeſſen, daß damit für den praktiſchen Gebrauch der Vorrichtung ſo lange nichts gewonnen iſt, als die obigen Ausdrücke noch von den Größen x, x'; y, y' und z, z' abhängig bleiben. Es muß alſo die Einrichtung ſo getroffen werden, daß die genannten Größen aus der Rechnung wegfallen, welches erreicht wird, indem man einerſeits $az' = a'z$, und andererſeits $bz' = b'z$ ſetzt, wonach ſich die obige Gleichung auf folgende reducirt:

$$aP = bQ.$$

Die gemachte Annahme $az' = a'z$ und $bz' = b'z$ führt zu der Proportion:

$$a : a' = b : b' = z : z',$$

d. h. es müſſen ſich die langen und die kurzen Arme beider Hebel eben ſo zu einander verhalten, wie die Entfernungen der zwiſchen geſetzten Spreize von den Unterſtützungspunkten der Hebel. Am einfachſten dürfte die Konſtruction ausfallen, wenn man $z = z'$ macht; denn dann ergiebt ſich auch $a = a'$ und $b = b'$. Jedenfalls iſt es aber in Folge der obigen Proportion ganz gleichgültig, auf welche Stellen der Tafeln die Gewichte Q und P zu liegen kommen; ſie erhalten ſich einander ebenſo im Gleichgewichte, als hingen ſie unmittelbar an den Endpunkten des unteren Hebels, und das für jede Laſt Q erforderliche Gegengewicht P wird durch das umgekehrte Verhältniß der Hebelsarme EJ und FJ beſtimmt.

Anmerk. Die obige Vorrichtung iſt von Kuppler in Nürnberg erfunden, der darauf ein bayerſches Patent erhalten hat. Beſchreibung und Abbildung findet man im Kunſt- und Gewerbeblatt für Bayern, Jahrg. 1838, S. 522 u. f.

§. 214.

Dümont'sche Schnellwaage. Diese, von einem gewissen Du Mont in Metz erfundene und in Frankreich patentirte, Vorrichtung gehört zur Gattung der sogenannten Zeigerwaagen, worunter man solche begreift, die ohne besonderes Gegengewicht eine aufgelegte oder angehängte Last durch ihre eigene Schwere ins Gleichgewicht bringen, und das fragliche Gewicht derselben vermöge ihrer schrägen Stellung durch einen Zeiger auf einer Skala anzeigen.

Die hier in Rede befindliche Vorrichtung, deren Prinzip die Fig. 154 nur durch einfache Linien darstellt, besteht aus einem, die Stelle des Waagebalkens vertretenden Stabe **ACB**, mit welchem der Winkelhaken **CDE** zu einem festen Systeme verbunden ist. Das System befindet sich in einer vertikalen Ebene und ist um eine bei **C** angebrachte horizontale Achse drehbar. An dem Endpunkte des Armes **CB** ist vermittelst eines vertikalen Fadens oder Stabes **BH** die zu wiegende Last **Q** aufgehangen, deren Gewicht durch die Länge des Stückes **DE**, welches von jenem Faden auf dem untern Schenkel des Winkels **CDE** abgeschnitten wird, bestimmt werden soll.

Es sei **W** das eigene Gewicht der unbelasteten Vorrichtung, **G** der Ort ihres Schwerpunktes für die in der Figur dargestellte Lage, in welcher sie unter der Belastung **Q** im Gleichgewichte bleibt. Legt man durch den Drehpunkt **C** eine horizontale Linie und fällt darauf aus **G** und **B** die Perpendikel **GJ**, **BK**, so sind **CJ** und **CK** die Hebelsarme, an welchen die Kräfte **W** und **Q** einander das Gleichgewicht halten. Daher hat man die Bedingungsgleichung

$$W \cdot CJ = Q \cdot CK.$$

Die Stellung, welche die Vorrichtung annimmt, wenn bei **B** keine Last aufgehangen ist, werde durch die punktirten Linien **A'CB'**, **CD'E'** dargestellt. In dieser Stellung bil-

bet der Arm CB' den Winkel B'CK = α mit der Horizontalen JK, der Schwerpunkt G' liegt senkrecht unter dem Unterstützungspunkte C, und daher ist GCG' = BCB' die durch die Belastung Q herbeigeführte Winkelbewegung, welche mit φ bezeichnet werden mag. Setzt man nun außerdem die Längen CB = CB' = a; CG = CG' = b, so hat man CJ = b Sinφ und CK = a Cos$(\varphi-\alpha)$; also nach Maßgabe der vorigen Grundgleichung

$$W\,b\,\mathrm{Sin}\varphi = Q\,a\,\mathrm{Cos}(\varphi-\alpha).$$

Hieraus findet man für die Winkelbewegung φ den Ausdruck

$$\mathrm{Tang}\,\varphi = \frac{a\,Q\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{b\,W - a\,Q\,\mathrm{Sin}\,\alpha}.$$

Um nun den Abschnitt DE = x zu bestimmen, denke man die Linie BD gezogen, bezeichne die Länge derselben mit c, die unveränderlichen Winkel CBD und BDE bezüglich mit β und γ, und den veränderlichen Winkel DBE mit δ, so hat man im Dreieck BDE:

$$x : c = \mathrm{Sin}\,\delta : \mathrm{Sin}(\gamma+\delta);$$

also

$$x\,\mathrm{Sin}(\gamma+\delta) = c\,\mathrm{Sin}\,\delta.$$

Aus der Figur folgt aber leicht $\delta = 90-(\alpha+\beta-\varphi)$; daher ist

$$x\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta-\gamma-\varphi) = c\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta-\varphi),$$

oder, wenn hieraus x entwickelt und dabei gehörig reducirt wird:

$$x = c\cdot\frac{\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)+\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)\,\mathrm{Tang}\,\varphi}{\mathrm{Cos}(\alpha+\beta-\gamma)+\mathrm{Sin}(\alpha+\beta-\gamma)\,\mathrm{Tang}\,\varphi}.$$

Setzt man hierin für Tang φ den obigen Ausdruck, schafft dann im Zähler und Nenner die Brüche fort, so entsteht nach gehöriger Reduction:

$$x = c\cdot\frac{b\,W\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)+a\,Q\,\mathrm{Sin}\,\beta}{b\,W\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta-\gamma)+a\,Q\,\mathrm{Sin}(\beta-\gamma)}.$$

In dieser Formel ist nur Q veränderlich, alle übrigen Größen aber für eine bestimmte Wiegevorrichtung konstant.

Da nun die Veränderliche Q im Zähler und Nenner vorkommt, so erhellet leicht, daß für gleiche Zunahmen von Q die entsprechenden Werthe von x nicht in demselben Verhältniß wachsen. Wollte man daher auf dem Schenkel DE eine Skale anbringen, um aus der Coincidenz des Fadens BH mit einem der Theilstriche sofort das Gewicht der am Faden hängenden Last ablesen zu können, so würde die Theilung dieser Skale im Allgemeinen nicht gleichmäßig ausfallen können, sondern die Intervalle werden sich von D nach E zu verjüngen. Eine gleichmäßige Theilung entsteht aber, sobald man den die Skale enthaltenden Schenkel DE dem Arme CB genau parallel stellt; denn dann wird $\gamma = \beta$, und der vorige Ausdruck reducirt sich auf folgenden:

$$x = c \cdot \frac{b\,W\,\mathrm{Cos}\,(\alpha+\beta) + a\,Q\,\mathrm{Sin}\,\beta}{b\,W\,\mathrm{Cos}\,\alpha}.$$

Die mechanische Eintheilung der Skale kann nun auf dieselbe Art erfolgen, wie solches bei der römischen Waage angegeben worden ist; nur dürfte es im vorliegenden Falle zweckmäßig sein, die Theilstriche nicht parallel, sondern so zu stellen, daß sie verlängert im Punkte B zusammen laufen.

Anmerk. Eine nach den obigen Grundsätzen konstruirte Vorrichtung befindet sich in der Sammlung des Königl. Gewerbe-Instituts, die jedoch nur zum Wiegen von Lasten bis zu 8 halben Kilogr. dient. Genaue Gewichtsermittelungen sind jedoch damit nicht zu erreichen.

§. 215.

Die Sortirwaage, zum Sortiren der baumwollenen Strähnen nach der Feinheit der Fäden bestimmt, gehört ebenfalls zu den sogenannten Zeigerwaagen. Fig. 155 zeigt diese Vorrichtung nach einem in der Sammlung des Gewerbe-Instituts befindlichen Exemplar abgebildet. Darin ist ACB die Stellung des Waagebalkens, wenn die bei B hängende Schale unbelastet, A'CB' aber die Stellung desselben, wenn diese Schale mit dem Gewicht Q belastet ist. Der mit dem

Waagebalken feſt verbundene Zeiger, welcher an dem eingetheilten Grabbogen DH die Größe jenes Gewichtes angiebt, hat bei der unbelaſteten Vorrichtung die vertikale Stellung CD, wird aber durch die angebrachte Belaſtung Q in die ſchräge Lage CD′ gebracht, wobei der Schwerpunkt der ganzen Vorrichtung von G nach G′ rückt. In dieſer Lage ſtellt ſich ein Gleichgewicht her zwiſchen dem eigenen Gewicht W der unbelaſteten Vorrichtung, welches in G′ als eine vertikale Kraft vereinigt zu denken iſt, und der Laſt Q, die auf gleiche Weiſe in B′ wirkt. Die Hebelsarme CE, CF beider Kräfte ſind die Projectionen von CG′, CB′ auf die durch den Drehpunkt C gelegte Horizontale, und man hat daher die Momentengleichung

$$W \cdot CE = Q \cdot CF.$$

Bezeichnet α den Winkel BCF, den die gerade Verbindungslinie BC in der erſten Stellung des Waagebalkens mit der Horizontalen macht, a die Länge dieſer Linie; iſt ferner b die Entfernung $CG = CG'$ des Schwerpunktes vom Drehpunkte und φ die durch die Belaſtung Q herbeigeführte Winkelbewegung, ſo ergiebt ſich ſofort $CE = b \operatorname{Sin} \varphi$, $CF = a \operatorname{Cos}(\varphi - \alpha)$. Mit Rückſicht auf obige Gleichung hat man daher

$$W b \operatorname{Sin} \varphi = Q a \operatorname{Cos}(\varphi - \alpha);$$

alſo I. $$\operatorname{Tang} \varphi = \frac{a Q \operatorname{Cos} \alpha}{b W - a Q \operatorname{Sin} \alpha}.$$

Da nach Ausweis dieſer Formel die Tangente des Drehungswinkels der zugehörigen Laſt nicht proportional iſt, ſo läßt ſich daraus kein Geſetz ableiten, nach welchem die Eintheilung der Skale DH ausgeführt werden kann. Dies pflegt daher nur auf empiriſchem Wege zu geſchehen, indem man für verſchiedene, in die Waagſchale gelegte, Gewichte die Punkte anmerkt, wo die Zeigerſpitze jedesmal ſtehen bleibt, und dann zwiſchen je zwei ſolcher Punkte die kleineren Abthei-

lungen näherungsweise einschaltet. Daß aber bei einem solchen Verfahren auf keine große Genauigkeit zu rechnen ist, bedarf kaum der Erwähnung.

Sofern es sich nun um wirkliche Gewichtsermittelungen handelte, so würde darin ein großer Übelstand liegen, dessen Beseitigung zu wünschen übrig bliebe. Hiezu bedarf es nur einer kleinen Änderung in der Konstruction der Vorrichtung, darin bestehend, daß der Aufhängepunkt **B** der Waagschale, wenn dieselbe unbelastet ist, nach Fig. 156, in die durch **C** gehende Horizontallinie zu liegen kömmt; denn alsdann ist der Winkel α gleich Null, und die vorige Formel giebt

II. $$\text{Tang } \varphi = \frac{aQ}{bW},$$

welcher Ausdruck nunmehr der Größe **Q** proportional ist. Die Eintheilung des Kreisbogens **DH** kann aber jetzt folgendergestalt geschehen: Man ziehe am untersten Punkte **D** desselben eine horizontale Tangente **DX**, trage darauf von **D** aus gleiche Stücke ab, entsprechend der Größe der zum Grunde liegenden Gewichtseinheit, und ziehe aus den Theilpunkten dieser Tangente gerade Linien nach **C**, so bewirken diese die verlangte Eintheilung des Bogens **DH**. Ist z. B. **CD'** die Stellung des Zeigers für die Belastung **Q = m** Loth und **D'J** die Verlängerung von **CD'**, so müssen von **D** bis **J m** von jenen gleichen Stücken enthalten sein, u. s. f.

Aber die in Fig. 155 dargestellte Vorrichtung soll nicht zu eigentlichen Gewichtsermittelungen, sondern zum Sortiren der Baumwollgarne nach ihrer Feinheitsnummer dienen, und das führt andere Verhältnisse herbei. — Sowohl in den englischen wie in den deutschen Baumwollspinnereien werden nämlich die Garne in Strähnen gehaspelt, die aus 7 Gebinden zu 80 Fäden, also aus 560 Fäden bestehen. Die Länge eines solchen Fadens ist gleich dem Umfang der Weife, welcher in allen Spinnereien zu $1\frac{1}{2}$ Yards (= 4,37 Fß. Preuß.)

angenommen wird, und daher enthält jede Strähne einen Faden von 840 Yards Länge, so daß man also aus dem Gewicht der Strähne auf die Stärke des darin enthaltenen Garnes schließen kann. Man ist nun überein gekommen, die Anzahl der Strähnen, welche zusammen ein englisches Handelspfund, (0,9693 Pfd. Preuß.) wiegen, als Feinheitsnummer des Garnes anzunehmen, dergestalt, daß beispielsweise die Nummern 10, 20, 50, 80 u. s. f. Garne bezeichnen, von welchen je eine gleiche Anzahl von Strähnen auf das engl. Pfund gehen.

Dies vorausgesetzt, so bezeichne nun q das zuletzt genannte Gewicht, n die Feinheitsnummer irgend eines Gespinnstes, so ist $Q = \frac{q}{n}$ das Gewicht einer Strähne, und wenn dies in Formel I eingesetzt wird, entsteht:

$$\text{Tang } \varphi = \frac{a\,q\,\text{Cos}\,\alpha}{n\,b\,W - a\,q\,\text{Sin}\,\alpha};\ \text{also}$$

$$\text{III.}\quad \text{Cotg}\,\varphi = \frac{n\,b\,W - a\,q\,\text{Sin}\,\alpha}{a\,q\,\text{Cos}\,\alpha} = \frac{n\,b\,W}{a\,q}\,\text{Sec}\,\alpha - \text{Tg}\,\alpha.$$

Hiernach wächst die Cotangente des Drehungswinkels im geraden Verhältnisse mit der Garnnummer der auf die Waagschale gelegten Strähnen, und darauf gründet sich in Absicht auf die Eintheilung der Kreisskala DH (Fig. 155) die folgende Konstruction:

Soll etwa die Vorrichtung dazu dienen, Baumwollgarne von Nr. 10 bis Nr. 100, die am häufigsten gesponnen werden, zu sortiren, so lege man zuerst $\frac{1}{10}$ sodann $\frac{1}{100}$ Pfund auf die Waagschale, und bemerke am Kreisbogen die jedesmal von der Zeigerspitze angezeigten Punkte, welche die Nummern 10 und 100 enthalten. Nächstdem lege man am äußern Kreisbogen eine vertikale Tangente HY, ziehe vom Drehpunkte C aus durch jene Punkte gerade Linien bis an diese Tangente und theile das dadurch abgeschnittene Stück der-

selben in 90 gleiche Theile. Die aus den Theilungspunkten nach C gezogenen Geraden bestimmen dann die Theilstriche des Kreisbogens, welche mit fortlaufenden Nummern von 10 bis 100 zu bezeichnen sind.

Hiebei wurde vorausgesetzt, daß die anfängliche Stellung des Zeigers vertikal sei, was aber nicht durchaus nöthig ist. Für eine andere Stellung ändert sich weiter nichts, als daß die Tangente HY, von welcher die Theilung auf den Kreisbogen übertragen wird, mit der anfänglichen Stellung des Zeigers parallel gelegt werden muß.

§. 216.

Zeigerwaagen mit geraden Skalen. Es sei ACD Fig. 157, ein Winkelhebel, der um den Punkt C in einer vertikalen Ebene frei drehbar und mit der, an ihrem unteren Ende beschwerten, Stange CB zu einem unveränderlichen System verbunden ist. An dem Arme CA ist bei A ein Haken zum Aufhängen der zu wiegenden Körper angebracht; der andere Arm CD dient als Zeiger, um das fragliche Gewicht jenes Körpers auf einer geraden Skale MN, die in einer beliebigen Lage zur Seite der Vorrichtung angebracht ist, zu bestimmen. Die stark ausgezogenen Linien stellen die Vorrichtung im unbelasteten Zustande vor, wo dann ihr Schwerpunkt senkrecht unter C in G liegt und der Zeiger auf dem Nullpunkte D der Skale steht. In dieser Lage ist der Arm CA unter dem Winkel α gegen den Horizont, der Zeiger CD unter dem Winkel β gegen den vom Drehpunkte auf die Skale gefällten Perpendikel CO geneigt. Die punktirten Linien stellen die Vorrichtung in der Lage vor, die sie annimmt, sobald bei A eine Last Q aufgehängt worden ist, in Folge dessen sie sich um den Winkel φ aus der ersten Gleichgewichtslage entfernt. Der Zeiger ist dabei längs der Skale von D nach D', der Schwerpunkt aber seit-

wärts von G nach G′ fortgerückt, und das hier vereinigte Gewicht W der unbelaſteten Vorrichtung muß dann mit dem in A′ wirkenden Gewicht Q ein gleiches Moment in Bezug auf den Punkt C haben. Setzt man alſo wie früher $CA = CA' = a$, $CG = CG' = b$; ſo hat man wieder

$$\text{Tang } \varphi = \frac{a\,Q\,\text{Cos}\,\alpha}{b\,W - a\,Q\,\text{Sin}\,\alpha}.$$

Zur Beſtimmung des Abſchnittes DD′, der für die Größe von Q maaßgebend ſein ſoll, ſetze man $CO = d$, ſo hat man

$$DD' = d\,(\text{Tang}\,\beta - \text{Tang}\,(\beta - \varphi)) = \frac{d\,\text{Sec}\,\beta\,\text{Tang}\,\varphi}{\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta\,\text{Tg}\,\varphi};$$

oder, wenn für Tang φ der vorige Werth eingeſetzt wird:

$$DD' = \frac{a\,d\,Q\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sec}\,\beta}{b\,W\,\text{Cos}\,\beta + a\,Q\,\text{Sin}\,(\beta - \alpha)}.$$

Soll nun DD′ der Größe Q proportional, die Theilung der Skale alſo gleichmäßig ſein, ſo muß die Einrichtung ſo getroffen werden, daß die Winkel α und β einander gleich ſind. Alsdann fällt das zweite Glied im Nenner fort und der Ausdruck reducirt ſich auf

$$DD' = \frac{a\,d\,\text{Cos}\,\alpha}{b\,W\,\text{Cos}\,\beta^2} \cdot Q.$$

Dem Obigen zufolge liegt alſo die Bedingung für eine gleichmäßige Eintheilung der Skale darin, daß bei der unbelaſteten Wiegevorrichtung der Zeiger mit der aus dem Drehpunkte auf die Skale gefällten Perpendikel denſelben Winkel bildet, wie der Laſtarm mit dem Horizonte, wobei unter Letzterem die gerade Linie zu verſtehen iſt, welche den Aufhängepunkt des zu wiegenden Körpers mit dem Drehpunkte des Waagebalkens verbindet. Iſt alſo dieſe Linie horizontal, ſo muß der anfängliche Stand des Zeigers auf der Skale ſenkrecht ſein, und umgekehrt.

In der Ausübung bringt man die gerade Skale am häufigſten in horizontaler oder in vertikaler Lage an; im

ersten Falle muß dann der Zeiger auf dem Lastarme senkrecht stehen, im letzten Falle aber mit Letzterem in einer geraden Linie liegen.

Anmerk. Das Prinzip der Zeigerwaagen findet in der Praxis nicht bloß zum Sortiren der Garne, wovon schon die Rede war, sondern auch zu direkten Gewichtsbestimmungen eine vielfache Anwendung. So benutzt man es mit Vortheil in den Postanstalten zum Wiegen der Briefe, auf manchen Eisenbahnhöfen zum Wiegen der Passagier- und anderer Güter, u. dgl. m.

§. 217.

Kraftmesser (Dynamometer). In §. 208 ist schon bemerkt worden, daß Waagen und Kraftmesser im statischen Sinne genommen eigentlich identisch sind, da beide Vorrichtungen nur in Hinsicht ihrer technischen Anwendung gewisse Verschiedenheiten darbieten. Von den im Vorhergehenden behandelten Wiegevorrichtungen sind es namentlich die Zeigerwaagen, in manchen Fällen auch die römische Schnellwaage, welche am häufigsten zu Kraftmessungen benutzt werden, wozu folgende Beispiele als Beläge dienen mögen:

So benutzt man z. B. in den größeren Flachsspinnereien eine ähnliche Vorrichtung, wie sie die Fig. 156 darstellt, zur Prüfung der Festigkeit der Leinengarne, um sich ein Urtheil über die Gleichförmigkeit und Güte des Gespinnstes nach Maaßgabe der verschiedenen Feinheitsnummern zu bilden, so wie auch, um eine Vergleichung zwischen den Garnen, die durch Maschinen- und Handspinnerei gewonnen sind, in Absicht auf ihre Haltbarkeit anstellen zu können. — Man denke sich etwa die Waagschale abgenommen, durch die Öse an ihrem Gehänge den zu prüfenden Faden gesteckt und die beiden aufwärts geführten Enden desselben in B am Lastarme des Waagebalkens befestigt, so daß die noch leere Schale an einem Doppelfaden frei herabhängt. Belastet man nun die Schale allmählig immer mehr mit hinein gelegten schweren Körpern, etwa Schrotkörner, so giebt der Zeiger CD durch

seinen schrägen Stand am Grabbogen DH die Spannung des Doppelfadens an.*)

Mehr im Großen ist das Prinzip der Zeigerwaagen in England zur Anwendung gekommen, um die erforderliche Zugkraft für Eisenbahnwagen durch Versuche zu bestimmen. Die zu diesem Zweck konstruirte Vorrichtung bestand nach dem Berichte von Wood**) aus einem schweren Pendel AB, Fig. 158, an seinem unteren Ende mit einem eingetheilten Bogen CD versehen, der mit dem Pendel beweglich war und an einem feststehenden Index F den Winkel anzeigte, um welchen die Vorrichtung durch die zu messende Kraft aus ihrer Lage gebracht wurde. An der äußeren Peripherie des Bogens war nämlich eine vertiefte Rinne eingearbeitet, um ein Seil aufzunehmen, welches mit dem einen Ende bei C befestigt, mit dem andern Ende aber nach der Richtung der horizontalen Tangente BE von der zu messenden Kraft gespannt wurde.

Denkt man sich den obigen Apparat auf einem besondern Wagen angebracht, und denjenigen Eisenbahnwagen, dessen Widerstand auf den Schienen ermittelt werden soll, an dem Seilende BF befestigt, so daß er bei der Fortbewegung des ersten Wagens diesem folgen muß, so giebt der Index F un-

---

*) Auf ähnliche Weise hat man gefunden, daß bei Maschinengespinnsten ein Doppelfaden durchschnittlich unter einer Spannung zerreißt, die gleich dem Gewicht von 12½ Strähnen oder von 125 Stück (Leas) seiner Feinheitsnummer ist, während Handgespinnste nur etwa ⅔ von dieser Festigkeit zu haben pflegen. — Dabei muß erwähnt werden, daß in den englischen Flachsspinnereien die Garnnummer durch die Anzahl Leas auf das Pfund bestimmt wird, und daß die Fadenlänge eines Lea 300 Yards beträgt. In Schlesien bilden 10 Leas eine Strähne, die also eine Fadenlänge = 3000 Yards enthält, und danach würde ein Leinenfaden von 18 bis 19000 Yards Länge durch sein eigenes Gewicht zerreißen.

**) Handbuch der Eisenbahnkunde ꝛc., S. 249 der deutschen Übersetzung von Hermann Köhler, Braunschw. 1839.

mittelbar den geſuchten Widerſtand an. Bezeichnet φ den durch irgend eine horizontale Kraft Q herbeigeführten Drehungswinkel, a den Halbmeſſer des Bogens CD, W das Gewicht des Pendelapparates und b die Entfernung ſeines Schwerpunktes von der Drehachſe A, ſo hat man:

$$bW \operatorname{Sin}\varphi = aQ; \text{ alſo } \operatorname{Sin}\varphi = \frac{aQ}{bW};$$

demgemäß iſt alſo der Sinus des Drehungswinkels der Kraft Q proportional, wonach ſich leicht die Eintheilung des Bogens BC bewirken läßt.

Man könnte dieſen Apparat auch bequem dazu benutzen, um, wie zuerſt erwähnt, die Feſtigkeiten verſchiedener Fäden zu prüfen, indem man dieſelben ſtatt des Seiles mit dem einen Ende bei C am Bogen, mit dem andern Ende aber auf dem Mantel einer bei E horizontal gelagerten Trommel befeſtigt Durch langſame Drehung dieſer Trommel vermittelſt einer mit ihr verbundenen Kurbel wird der Faden aufgewickelt und das Pendel aus ſeiner ſenkrechten Lage gebracht. Auf eine ähnliche Weiſe hat der Profeſſor W. Weber in Göttingen die Spannkraft und Dehnbarkeit der Seidenfäden beſtimmt, worüber das Nähere in Poggendorf's Annalen der Phyſik ꝛc. 1835, S. 247, nachzuſehen iſt.

Siebentes Kapitel.

Vom Gleichgewicht der Kräfte an vollkommen biegſamen und elaſtiſchen Körpern.

I. Von den Seilmaſchinen.

§. 218.

Die Seile ſollen hier als vollkommen biegſame und unzerreißbare materielle Linien ohne Dicke vorausgeſetzt werden. Auch das eigene Gewicht der Seile bleibt vorläufig außer Betracht.

Denkt man ſich das eine Ende eines Seiles befeſtigt, während an dem andern Ende eine beliebige Kraft wirkſam iſt, ſo heißt die Wirkung dieſer Kraft auf das Seil die Spannung deſſelben, und die gerade Linie, die das ausgeſpannte Seil bildet, ſtellt die Richtung der Kraft vor.

Wenn zwei gleiche Kräfte nach entgegengeſetzten Richtungen an den Enden eines Seiles wirken, ſo daß ſie mit einander im Gleichgewichte ſind, dann iſt die Spannung des Seiles gleich einer der beiden Kräfte, weil man das eine Ende als befeſtigt anſehen kann, ohne das Gleichgewicht zu ſtören. Sind aber die beiden Kräfte ungleich, in welchem Falle kein Gleichgewicht Statt finden kann, ſo iſt die Spannung des Seiles gleich der kleineren Kraft; denn der Ueberſchuß der größeren Kraft über die kleinere wirkt nicht mehr

auf Spannung des Seiles, ſondern nur allein auf fortgehende Bewegung im Sinne ihrer eigenen Richtung.

Iſt ein Seil mit dem einen Ende an einem anderen Seile befeſtigt, ſo nennt man den Verbindungspunkt einen Knoten. Ein feſter Knoten iſt ein ſolcher, deſſen Lage auf dem Seile durch keine Gewalt geändert werden kann; dagegen heißt derjenige ein loſer Knoten, der ſich wie ein Ring durch jede noch ſo kleine Kraft über dem Seile hin und her ſchieben läßt.

Eine Verbindung mehrerer Seile vermittelſt feſter oder loſer Knoten, woran ein Syſtem von Kräften, welche die einzelnen Seilenden ausſpannen, im Gleichgewichte iſt, heißt Seilmaſchine oder auch Funicularmaſchine.

§. 219.

Folgende Aufgaben, die Seilmaſchinen betreffend, ſind nach früheren Lehren leicht zu löſen:

1.) Werden drei Seile, welche mittelſt eines einzigen feſten Knotens zuſammen verbunden ſind, von gegebenen Kräften geſpannt, und ſollen letztere mit einander im Gleichgewichte ſein, ſo iſt zuvörderſt einleuchtend, daß dieſes nur dann ſtattfinden kann, wenn jedes Seil nach der Richtung der daran wirkenden Kraft geradlinig ausgeſpannt wird. Da nun die Seile als unzerreißbar betrachtet werden, ſo wirken die Kräfte vermittelſt der Seile ebenſo auf den feſten Knoten, als wenn ſie unmittelbar daran angebracht wären. Im Falle des Gleichgewichts müſſen alſo die ausgeſpannten Seile in eine Ebene fallen, und zwar nach ſolchen Richtungen, daß die Spannung eines jeden Seiles dem Sinus des von den beiden andern Seilen gebildeten Winkels proportional iſt.

Überhaupt finden alle Geſetze, welche früher in Bezug auf das Gleichgewicht dreier Kräfte an einem materiellen Punkte bewieſen ſind, und wozu namentlich auch die in §. 42

aufgestellten Sätze gehören, auf den jetzt vorliegenden Fall eine unbedingte Anwendung.

2.) Drei durch einen festen Knoten mit einander verbundene Seile werden von den an ihren freien Endpunkten angebrachten Gewichten P, Q und R ausgespannt, und zwar so, daß zwei von diesen Seilen über feste Rollen geleitet sind, während das dritte Seil frei herabhängt. Man soll den Ort des Knotens für den Zustand des Gleichgewichtes bestimmen. Die Auflösung geht unmittelbar aus §. 43. 1) hervor.

3.) An den Enden dreier, mittelst eines festen Knotens verbundener Seile sind, wie zuvor, die Gewichte P, Q und R befestigt, und jedes dieser Seile ist über eine feste Rolle geleitet. Die Lage des festen Knotens für den Zustand des Gleichgewichtes zu bestimmen.

Die Auflösung ergiebt sich leicht nach §. 43, 2).

§. 220.

Aufgaben: 1.) Von den drei Seilen KA, KB und KC, die durch den festen Knoten K (Fig. 159) mit einander verbunden sind, ist das eine im Punkte A befestigt und die beiden andern werden von Gewichten P und Q gespannt. Das mit dem Gewicht P belastete Seil KB ist über die feste Rolle B geleitet, während das Seil KC, an welchem das Gewicht Q wirkt, frei herabhängt. Wenn nun unter diesen Voraussetzungen ein Gleichgewicht stattfinden soll, so kommt es darauf an, den Ort des festen Knotens zu bestimmen.

Zu diesem Ende ziehe man die lothrechte Linie AD von beliebiger Länge, so wie aus dem Punkte D nach willkürlicher Richtung eine Linie DE, letztere von solcher Länge, daß sich verhält

$$AD : DE = Q : P.$$

Alsdann lege man durch A und E eine gerade Linie, und ziehe aus den beliebigen Punkten D', D'' ꝛc. der Lothrechten

AD, die Linien D'E', D''E'' ꝛc. ſämmtlich parallel mit DE, ſo findet immer die Proportion ſtatt

$$AD : DE = AD' : D'E' = AD'' : D''E'' \text{ ꝛc.} = P : Q.$$

Ferner ziehe man aus denſelben Punkten D, D', D'' ꝛc. die geraden Berührungslinien DB, D'B, D''B ꝛc. an den Umfang der feſten Rolle B, und nehme darauf die Stücke De = DE, D'e' = D'E', D''e'' = D''E'' u. ſ. w. Verbindet man nun die ſo erhaltenen Punkte e, e', e'' ꝛc. durch eine ſtetige Curve AeF, und beſchreibt mit der Länge des befeſtigten Seiles AK aus A als Mittelpunkt einen Kreisbogen VW, welcher jene Curve im Punkte K ſchneidet, ſo iſt dieſer Durchſchnittspunkt der Ort des Knotens für den Zuſtand des Gleichgewichtes.

Denn, wenn BK nach L verlängert und LM parallel mit DE gezogen wird, ſo verhält ſich, weil nach der Conſtruction LK = LM iſt,

$$AL : LK = AL : LM = Q : P.$$

Im Dreieck ALK verhält ſich aber auch

$$AL : LK = \text{Sin}AKL : \text{Sin}LAK,$$
$$= \text{Sin}AKB : \text{Sin}AKC;$$

weil nämlich, wie leicht einzuſehen, SinAKL = SinAKB, und SinLAK = SinAKC iſt. Demnach hat man auch

$$Q : P = \text{Sin}AKB : AKC,$$

eine Proportion, die nach 1) des vor. §. das Gleichgewicht in der gegebenen Seilmaſchine bedingt.

Es iſt einleuchtend, daß, von welcher Länge auch das befeſtigte Seil AK ſein mag, der Knoten K ſich doch ſtets auf der Curve AeKF befinden muß, wofern unter den gegebenen Kräften P, Q ein Gleichgewicht ſtattfinden ſoll. Denkt man ſich nun K als einen loſen Knoten, der auf dem Seile AKBP frei hin und her gleiten kann, und ſtellt man dann die Frage nach dem Ort deſſelben für den Zuſtand des Gleichgewichtes, ſo dient zur Antwort, daß die auf die vorige

Art conſtruirte Curve der geometriſche Ort für alle die Punkte iſt, wo der bewegliche Knoten unter zweien Kräften, die ſich wie P : Q verhalten, im Gleichgewichte bleiben kann; denn jene Curve hängt nur allein von dem Verhältniß der beiden Gewichte P und Q ab, nicht aber von der Länge des befeſtigten Seilendes AK. Die Aufgabe iſt daher in Bezug auf einen beweglichen Knoten unbeſtimmt, weil es unendlich viele Punkte giebt, wo derſelbe von den gegebenen Kräften im Gleichgewichte gehalten werden kann.

Anmerk. Die obige Aufgabe mit der zugehörigen Konſtruction iſt aus Varignon's nouvelle mécanique ou statique entlehnt, wo ſie T. II. p. 314—316 vorgetragen wird. Es mag noch erwähnt werden, daß Huber in Genf die fragliche Seilmaſchine zur Benutzung als Wiegevorrichtung empfohlen hat. (Vergl. Gehler's phyſ. Wörterb. Bd. X. S. 50.)

2.) Die vorige Aufgabe werde dahin abgeändert, daß beide mit den Gewichten P und Q belaſteten Seile über die feſten Rollen B und C (Fig. 160) gehen, während das dritte Seil, mit welchem die beiden erſten durch einen feſten Knoten K verbunden ſind, in A befeſtigt ſein mag. Dieſer Punkt und die beiden feſten Rollen liegen in einer vertikalen Ebene.

Offenbar muß ſich auch hier der Knoten auf der Peripherie desjenigen Kreiſes VKW befinden, der die Länge des befeſtigten Seiles AK zum Halbmeſſer und den Befeſtigungspunkt A zum Mittelpunkte hat. Außerdem muß die Lage des Knotens auf dieſer Peripherie ſo beſchaffen ſein, daß, wenn man aus ihm nach A, B und C gerade Linien zieht, ſich alsdann verhält

$$\text{Sin}\,AKB : \text{Sin}\,AKC = Q : P.$$

Um den Punkt K dieſer Bedingung gemäß zu finden, verbinde man B und C mit A durch die geraden Linien BA, CA, und beſchreibe darüber Kreisabſchnitte, wie z. B. ADB und ADC, welche Winkel faſſen, deren Sinus ſich wie

Q : P verhalten. Indem man nun die Punkte (wie z. B. D), in welchen sich die Bogen von je zwei zusammengehörigen Kreisabschnitten durchschneiden, mit einander verbindet, erhält man eine stetige Curve AKD, die sich mit dem Kreisbogen VKW in dem gesuchten Punkte K schneidet.

Der Beweis der Richtigkeit dieses Verfahrens ist in die Augen springend.

§. 221.

Aufgaben: 1.) An den beiden Punkten A und B (Fig. 161) sind die Enden eines Seiles AKB befestigt, welches länger als die Entfernung AB ist. Mit diesem Seile ist ein anderes KC durch einen losen Knoten K verbunden, welches letztere von einem daran hangenden Gewichte P vertikal gespannt wird. Es sei unsere Aufgabe, den Ort des losen Knotens für den Zustand des Gleichgewichtes anzugeben.

Offenbar muß der Knoten K, so lange das Gleichgewicht noch nicht eingetreten ist, auf dem Umfange einer vertikalen, aus den Punkten A und B beschriebenen Ellipse hin und her schwanken, und er kann daher nur im tiefsten Punkte dieser Curve zum Gleichgewichte kommen. Denn in jedem andern Punkte verhält er sich wie ein schwerer Körper auf einer schiefen Ebene, deren Neigung durch die Tangente an jenem Curvenpunkte bestimmt wird, und nach den in §. 172 entwickelten Grundsätzen kann ein solcher Körper nur in demjenigen Punkte, dessen Tangente eine horizontale Lage hat, in Ruhe bleiben.

Dies vorausgesetzt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Nr. 45 des Anh. folgendes Verfahren zur konstructiven Bestimmung des Ortes, wo der lose Knoten im Gleichgewichte bleibt.

Man ziehe durch A eine lothrechte Linie AD, durch-

schneide dieselbe aus B mit der Länge des Seiles AKB = BD in D und halbire die Linie AD in E. Errichtet man nun in E den Perpendikel EK auf AD, so ist dessen Durchschnittspunkt K mit BD der Ort des Knotens und AKB die Figur des aufgehängten Seiles im Zustande des Gleichgewichtes.

Um den Ort des Knotens durch Rechnung zu bestimmen, ziehe man durch den höchsten Aufhängepunkt B eine horizontale Linie BG, welche sich mit der Verlängerung der Lothrechten AD in G schneidet, setze BG = a, AG = b, AE = DE = x, EK = y, und bezeichne die Länge des Seiles AKB = BD mit l; alsdann ist $GD = \sqrt{l^2 - a^2}$; $AD = -b + \sqrt{l^2 - a^2}$; folglich

$$x = \tfrac{1}{2}BD = \tfrac{1}{2}(-b + \sqrt{l^2 - a^2}).$$

Da EK mit GB parallel ist, so verhält sich DE : EK = DG : GB, oder $x : y = \sqrt{l^2 - a^2} : a$; daher hat man:

$$y = \frac{ax}{\sqrt{l^2 - a^2}} = \frac{a(-b + \sqrt{l^2 - a^2})}{2\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Will man die Spannungen S, S wissen, die in den Seilenden KA und KB stattfinden, so ergeben sich diese leicht nach §. 38, wenn man die Winkel AKF = BKF mit α bezeichnet, wo sich dann $S = \tfrac{1}{2}P\,\mathrm{Sec}\,\alpha$ ergiebt. Berücksichtigt man nun, daß $\angle BDG = \angle BKF = \alpha$ ist, so hat man $\mathrm{Sec}\,\alpha = \frac{BD}{DG} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - a^2}}$; und folglich

$$S = \frac{\frac{1}{2}Pl}{\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

2.) Mit dem in den Punkten A und B befestigten Seile AKB, Fig. 162, stehen vermittelst eines losen Knotens zwei andere, durch die Gewichte P, Q beschwerten, Seile in Verbindung. Wenn nun das eine dieser Seile, KP, an dem Knoten frei herab hängt, während das andere KCQ über

eine feſte Rolle C geleitet iſt, ſo ſoll der Ort des Knotens für den Zuſtand des Gleichgewichtes zwiſchen beiden Gewichten unter der Vorausſetzung beſtimmt werden, daß die Rolle mit den beiden Befeſtigungspunkten in einer vertikalen Ebene liegt.

Da der loſe Knoten auf gleiche Weiſe, wie bei der vorigen Aufgabe, fortwährend auf der Peripherie einer, aus den Brennpunkten A und B beſchriebenen, Ellipſe VKW bleiben muß, ſo kann für ihn nur dann ein Gleichgewicht ſtattfinden, wenn die Mittelkraft der vertikalen Kraft P und der nach der Tangente KC wirkenden Kraft Q in die Richtung der Normalen KL zur Ellipſe fällt. Um dieſem gemäß den Ort des Knotens zu finden, beſchreibe man über einer vertikalen Linie HJ von beliebiger Länge einen Halbkreis HNJ, und nehme auf dem Durchmeſſer deſſelben den Punkt M ſo an, daß ſich ſein Abſtand vom Mittelpunkte O zum Halbmeſſer des Kreiſes wie P zu Q verhält. Sodann konſtruire man auf bekannte Weiſe zu verſchiedenen Punkten D, F, ꝛc. der Ellipſe die zugehörigen Normalen DE, FG, ꝛc., ziehe parallel mit ihnen im Halbkreiſe die Sehnen MN′, MN″, ꝛc. und verbinde die Endpunkte der letztern mit dem Mittelpunkte O durch die Radien ON′, ON″, ꝛc. Legt man nun an den Umfang des die Rolle vorſtellenden Kreiſes C parallel zu den genannten Radien die Tangenten TX, UY, ꝛc., welche die Verlängerungen der Normalen DE, FG, ꝛc. in X, Y ꝛc. ſchneiden, ſo entſteht durch die ſtetige Verbindung aller dieſer Durchſchnittspunkte eine den Kreis C berührende Curve XKY, und der Punkt K, in welchem letztere die Ellipſe ſcheidet, iſt der Ort des Gleichgewichtes für den loſen Knoten.

Denn man ziehe aus K die Vertikale KP, ſo wie die Tangente KC zum Umfang der Rolle, und betrachte dieſe Linien als die Richtungen der Kräfte P und Q, deren ent-

gegengeſetzte Mittelkraft **R**, den Widerſtand des Seiles **AKB** vorſtellend, nach der Richtung der Normale **KL** wirkt, ſo müſſen die genannten drei Kräfte am Punkte **K** mit einander im Gleichgewichte ſein. Zieht man nun im Halbkreiſe **HNJ** den Radius **ON**, und verbindet deſſen Endpunkt mit **M** durch die Sehne **MN**, dann iſt dieſelbe mit der Normalen **KL** der Ellipſe parallel, weil **K** ein Punkt der Curve **XKY** iſt. Das im Halbkreis entſtandene Dreieck **MNO** iſt demnach ſo beſchaffen, daß die Seiten deſſelben den Richtungen der am Punkte **K** wirkenden Kräfte **P**, **Q** und **R** parallel, die Längen dieſer Seiten alſo (nach §. 42) den Intenſitäten der genannten Kräfte proportional ſind. In dem Maße alſo, wie die beiden Seiten **MO**, **ON** die Kräfte **P** und **Q** vorſtellen, iſt die dritte Seite **MN** der Repräſentant ihrer Mittelkraft **R**.

Durch Zerlegung der Kraft **R** nach den Richtungen **CA** und **CB**, erhält man die in dieſen Seilenden ſtattfindenden Spannungen, welche alſo gleich ſind, weil **R** den Winkel **AKB** halbirt. Will man die Größe dieſer Spannungen durch Linien darſtellen, ſo konſtruire man über der Sehne **MN** des Halbkreiſes das gleichſchenkliche Dreieck **MSN**, indem man die Geraden **MS** und **NS** bezüglich den Linien **BK** und **AK** parallel zieht. Dieſe Geraden geben dann die fraglichen Spannungen nach Maaßgabe, wie die Seiten des Dreiecks **MON** die Kräfte **P**, **Q** und **R** vorſtellen.

Anmerk. Das zur Löſung obiger Aufgabe mitgetheilte Verfahren findet ganz in derſelben Weiſe Anwendung, wenn ſtatt der Ellipſe **VKW** irgend eine ebene feſte Curve gegeben iſt, die durch ihren Widerſtand einen aufgeſchobenen Ring unter den in der Aufgabe ausgeſprochenen Bedingungen im Gleichgewicht erhält. Statt der Gewichte P, Q können auch zwei gegebene Kräfte an dem Ringe wirken, deren eine mit einer gegebenen Geraden parallel ſein, deren andere aber einen gegebenen Kreis berühren, oder durch einen gegebenen Punkt gehen ſoll.

Auch die erste Aufgabe des vor. §. läßt sich nach dieser Methode behandeln, was aber weniger einfach als die von Varignon angegebene Konstruction ausfallen würde.

3.) Ein mit seinen beiden Enden in den Punkten **A** und **B** befestigtes Seil **ACDB** (Fig. 163) ist vermittelst zweier fester Knoten durch die Gewichte **P** und **Q** belastet, die an besondern Seilen frei herabhangen. Es wird verlangt, die Bedingungen des Gleichgewichtes anzugeben.

Man verlängere die befestigten Seilenden **AC**, **BD** bis sie sich mit den Lothrechten **CP**, **DQ** in **F** und **E** schneiden, und zerlege die Gewichte **P**, **Q** nach diesen Verlängerungen und den von **CD** in die Seitenkräfte **P′**, **P″**, **Q′** und **Q″**. Zur Bestimmung der letztern hat man die Vergleichungen:

$$P : P' : P'' = DF : CD : CF;$$

$$\text{also } P' = \frac{CD}{DF}P;\quad P'' = \frac{CF}{DF}P.$$

$$Q : Q' : Q'' = CE : CD : DE;$$

$$\text{also } Q' = \frac{CD}{CE}Q;\quad Q'' = \frac{DE}{CE}Q.$$

Als Bedingung des Gleichgewichtes müssen nun zuvörderst die entgegengesetzten Spannungen **P′** und **Q′** einander gleich sein, was auf die Proportion führt:

$$P : Q = DF : CE.$$

Die Spannungen der befestigten Seilenden ergeben sich demnächst durch die obigen Ausdrücke von **P″** und **Q″**, welche, mit Rücksicht auf vorstehende Proportion, sich folgendermaßen mit einander vergleichen lassen:

$$P'' : Q'' = CF : DE.$$

Anmerk. Auch diese Seilmaschine hat man zur Benutzung als Wiegevorrichtung (Seilwaage genannt) empfohlen, indem nämlich vermöge der obigen Proportion, nach welcher die Längen der Stücke **CE** und **DF** sich umgekehrt wie die daran hängenden Gewichte verhalten, das eine der letztern bestimmt werden kann, wenn man das andere als bekannt voraussetzt. Daß der Vorschlag ohne praktischen Werth ist, bedarf kaum der Erwähnung.

§. 222.

Allgemeinere Unterſuchung über das Gleichgewicht der Seilmaſchinen. Seilpolygon in einer Ebene. Eine beliebige Anzahl von Kräften wirkt an einem Seile $MA'B'...E'N$ (Fig. 164), welches mit den beiden Endpunkten M und N befeſtigt iſt und das, ſeiner Form wegen, ein **Seilpolygon** genannt wird. Um die Bedingungen des Gleichgewichtes zu finden, mögen A, B, C,... ꝛc. die Kräfte bezeichnen, welche an den Seilenden AA', BB', CC',... ꝛc. wirken, und A', B', C',... ꝛc. ſtellen feſte Knoten vor, wodurch die eben genannten Seilenden mit dem Seile $MA'B'..E'N$ verbunden ſind. Setzt man voraus, daß ſich alle Seile in einer und derſelben vertikalen Ebene befinden, die von der Figurentafel vorgeſtellt werden mag, ſo ſollen die Winkel, welche die gegebenen Kräfte mit dem Horizonte bilden, durch α, β, γ,... bezeichnet und in demſelben Sinne von 0 bis 360 Graden gezählt werden. Ferner ſeien P, S, T,...Q die Spannungen in den Enden MA', $A'B'$, $B'C'$,...$E'N$ des befeſtigten Seiles und μ', α', β',... ꝛc. die Winkel, welche dieſe Seilenden dann mit dem Horizonte bilden, wenn das Syſtem im Gleichgewicht iſt.

Damit nun letzteres im ganzen Syſteme ſtattfinde, ſo muß jeder einzelne Theil deſſelben unter den daran wirkenden Kräften für ſich im Gleichgewichte ſein. Betrachtet man demnach zuerſt den Knoten A', an welchem die drei Kräfte A, S und P nach den Richtungen $A'A$, $A'B'$ und $A'M$ wirken, ſo ſind α, α' und $180^\circ + \mu'$ die Winkel, welche dieſe Richtungslinien mit der durch den gemeinſchaftlichen Angriffspunkt A' gezogenen Horizontallinie in demſelben Sinne bilden. Nach §. 47 hat man für das Gleichgewicht dieſes Knotens die folgenden zwei Bedingungsgleichungen:

$$P\,\mathrm{Cos}(180+\mu') + A\,\mathrm{Cos}\,\alpha + S\,\mathrm{Cos}\,\alpha' = 0,$$
$$P\,\mathrm{Sin}(180+\mu') + A\,\mathrm{Sin}\,\alpha + S\,\mathrm{Sin}\,\alpha' = 0;$$

welche ſich auch folgendergeſtalt darſtellen laſſen:

$$(1)\quad \begin{cases} -P\,\mathrm{Cos}\,\mu' + A\,\mathrm{Cos}\,\alpha + S\,\mathrm{Cos}\,\alpha' = 0, \\ -P\,\mathrm{Sin}\,\mu' + A\,\mathrm{Sin}\,\alpha + S\,\mathrm{Sin}\,\alpha' = 0. \end{cases}$$

Eben ſo ergeben ſich für das Gleichgewicht der übrigen Knoten die Bedingungsgleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} -S\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + B\,\mathrm{Cos}\,\beta + T\,\mathrm{Cos}\,\beta' = 0, \\ -S\,\mathrm{Sin}\,\alpha' + B\,\mathrm{Sin}\,\beta + T\,\mathrm{Sin}\,\beta' = 0; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} -T\,\mathrm{Cos}\,\beta' + C\,\mathrm{Cos}\,\gamma + U\,\mathrm{Cos}\,\gamma' = 0, \\ -T\,\mathrm{Cin}\,\beta' + C\,\mathrm{Sin}\,\gamma + U\,\mathrm{Sin}\,\gamma' = 0; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} -U\,\mathrm{Cos}\,\gamma' + D\,\mathrm{Cos}\,\delta + V\,\mathrm{Cos}\,\delta' = 0, \\ -U\,\mathrm{Sin}\,\gamma' + D\,\mathrm{Sin}\,\delta + V\,\mathrm{Sin}\,\delta' = 0; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} -V\,\mathrm{Cos}\,\delta' + E\,\mathrm{Cos}\,\eta + Q\,\mathrm{Cos}\,\eta' = 0, \\ -V\,\mathrm{Sin}\,\delta' + E\,\mathrm{Sin}\,\eta + Q\,\mathrm{Sin}\,\eta' = 0 \text{ u. ſ. w.} \end{cases}$$

Da für jeden Knoten zwei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes ſtattfinden, ſo iſt die Anzahl dieſer Gleichungen doppelt ſo groß als die der Knoten. Sind $n+1$ Seilenden im Polygon $MA'B'\ldots E'N$ und alſo n Knoten vorhanden, ſo iſt die Anzahl der obigen Gleichungen $= 2n$. Bezeichnet man die Längen der einzelnen Seilenden zwiſchen den feſten Knoten nach der Reihe mit $m, a, b, c\ldots n$, die horizontale Entfernung ML der beiden Endpunkte M und N von einander mit h und ihre vertikale Entfernung LN mit k, ſo laſſen ſich noch folgende zwei polygonometriſche Gleichungen aufſtellen:

$$(6)\quad \begin{cases} m\,\mathrm{Cos}\,\mu' + a\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + b\,\mathrm{Cos}\,\beta' + \ldots + n\,\mathrm{Cos}\,\eta' = h, \\ m\,\mathrm{Sin}\,\mu' + a\,\mathrm{Sin}\,\alpha' + h\,\mathrm{Sin}\,\beta' + \ldots + n\,\mathrm{Sin}\,\eta' = k; \end{cases}$$

ſo daß man im Ganzen $2n+2$ Gleichungen hat. Gewöhnlich ſind die Spannungen in den $n+1$ Seilenden und ihre Richtungswinkel zu beſtimmen, welches zuſammen genommen $2n+2$ unbekannte Größen ſind, die durch eben ſo viele vorhandene Gleichungen beſtimmt werden können. Da dieſe Beſtimmung aber, wie leicht zu ermeſſen iſt, auf große Weitläufigkeiten führen würde, ſo laſſen wir uns hier

nicht weiter darauf ein, ſondern beſchränken uns einfach nur auf die Betrachtung des Gleichgewichtes der am Seilpolygon wirkenden Kräfte.

Addirt man nämlich alle erſten und alle zweiten Gleichungen der obigen Gruppen, und ſetzt zugleich ſtatt der Winkel μ' und η' die zugehörigen innern Nebenwinkel μ und ν, ſo entſteht

$$+P\,\mathrm{Cos}\,\mu - Q\,\mathrm{Cos}\,\nu + A\,\mathrm{Cos}\,\alpha + B\,\mathrm{Cos}\,\beta + C\,\mathrm{Cos}\,\gamma + \ldots = 0,$$
$$-P\,\mathrm{Sin}\,\mu - Q\,\mathrm{Sin}\,\nu + A\,\mathrm{Sin}\,\alpha + B\,\mathrm{Sin}\,\beta + C\,\mathrm{Sin}\,\gamma + \ldots = 0.$$

Dieſe beiden Gleichungen ſind als Bedingungen des Gleichgewichtes hinreichend, und umgekehrt iſt im Syſtem allemal ein Gleichgewicht vorhanden, ſo oft ihnen Genüge geſchieht. Sie geben überdies noch zu erkennen, daß die Kräfte am Seilpolygon daſſelbe Gleichgewicht bedingen, als wenn ſie, ihren Richtungen parallel, ſämmtlich an demſelben materiellen Punkte angebracht werden.

§. 223.

Anwendung auf einen beſondern Fall. Wirken alle gegebenen Kräfte A, B, C,...ꝛc. nach lothrechten Richtungen (Fig. 165), ſo können ſie als Gewichte betrachtet werden, welche die Seilenden, woran ſie befeſtigt ſind, lothrecht ausſpannen. Für dieſen beſondern Fall findet man die Bedingungen des Gleichgewichtes, wenn man in den beiden zuletzt entwickelten Gleichungen jeden der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ꝛc. gleich einem Rechten ſetzt; dadurch erhält man

(1) $$P\,\mathrm{Cos}\,\mu - Q\,\mathrm{Cos}\,\nu = 0,$$

(2) $$P\,\mathrm{Sin}\,\mu + Q\,\mathrm{Sin}\,\nu = A+B+C+\ldots = R;$$

wo R die Summe der Gewichte A, B, C...ꝛc. bezeichnet. Die Producte $P\,\mathrm{Cos}\,\mu$, $P\,\mathrm{Sin}\,\mu$ und $Q\,\mathrm{Cos}\,\nu$, $Q\,\mathrm{Sin}\,\nu$ geben bekanntlich die Seitenkräfte von P und Q bezüglich nach horizontaler und vertikaler Richtung. Aus den obigen Gleichungen folgt daher, daß die horizontalen Seitenkräfte der

Spannungen in den befeſtigten Endſeilen einander gleich, die vertikalen Seitenkräfte dieſer Spannungen aber zuſammen genommen der Summe aller aufgehängten Gewichte gleich ſind.

Offenbar wird das Gleichgewicht im Seilpolygon nicht geſtört, wenn man irgend einen Punkt deſſelben, z. B. den Eckpunkt A', befeſtigt und dafür das Ende A'M entfernt denkt. Bezeichnet S die Spannung in A'B', ſo gelten für dieſelbe gleiche Geſetze, wie ſie ſo eben für P ausgeſprochen wurden. Namentlich iſt, wenn S nach horizontaler und vertikaler Richtung zerlegt wird, die Seitenkraft nach der erſten Richtung dem Ausdrucke $Q\,\mathrm{Cos}\,\nu$ gleich. Da dies nun von allen übrigen Polygonſeiten ebenſo gilt, ſo folgt das allgemeine Geſetz: Die horizontale Seitenkraft der Spannung einer jeden Polygonſeite iſt konſtant und dem Coſinus ihres Neigungswinkels gegen den Horizont umgekehrt, oder der Sekante dieſes Winkels direct proportional.

Da nun, wie ein Blick auf die Figur lehrt, die Polygonſeiten vom tiefſten Eckpunkte an aufwärts nach den Aufhängepunkten M und N zu immer größere Neigungswinkel mit dem Horizonte bilden, ſo werden dem entſprechend auch die Spannungen immer größer, ſo daß in der am tiefſten gelegenen Polygonſeite die kleinſte, in der am höchſten gelegenen Seite A'M hingegen die größte Spannung ſtattfindet. Wäre alſo eine Polygonſeite vorhanden, die eine horizontale Lage hat, ſo würde hier überhaupt die kleinſtmögliche Spannung ſtattfinden.

Multiplicirt man die erſte Gleichung mit $\mathrm{Sin}\,\nu$, die zweite mit $\mathrm{Cos}\,\nu$ und addirt dann beide Reſultate, ſo wird Q eliminirt und man erhält

$$P(\mathrm{Sin}\,\mu\,\mathrm{Cos}\,\nu + \mathrm{Cos}\,\mu\,\mathrm{Sin}\,\nu) = R\,\mathrm{Cos}\,\nu;$$

Kraft P, welche am Knoten A' nach der Richtung A'M wirkt, als die entgegengesetzte Mittelkraft der beiden Kräfte A und S zu betrachten, von denen die eine lothrecht, die andere aber nach der Richtung der Polygonseite A'B' wirkt. Eben so ist der Knoten B' zu betrachten als im Gleichgewicht unter den Kräften S, B und T, die nach den Richtungen B'A', B'B und B'C' wirken; der Knoten C als im Gleichgewicht unter den Kräften T, C und U, u. s. f. Dies vorausgesetzt, stelle man die lothrechten, am Seilpolygon wirksamen Kräfte A, B, C, D, E, ꝛc. durch die ihnen proportionalen Stücke ab, bc, cd, de, ꝛc. dar, welche auf der geraden Horizontallinie mn (Fig. 166) nach einander abgetragen werden. Zieht man nun aus den Punkten a und b die Linien ao, bo normal auf den Richtungen der Polygonseiten MA', A'B' der vorigen Figur, so entsteht ein Dreieck abo, dessen Seiten den Kräften P, A und S, auf deren Richtungen sie normal stehen, proportional sind. Die beiden Linien ao und bo stellen also ebenso die Spannungen P und S in den Polygonseiten MA', A'B' vor, wie das Stück ab das in A' aufgehängte Gewicht A vorstellt.

Man verbinde ferner in Fig. 166 den Punkt c mit o durch die Gerade co, so entsteht ein zweites Dreieck bco, von welchem zwei Seiten bo, bc auf den am Knoten B' wirkenden Kräften S und B normal und deren Intensitäten proportional sind. Nach § 42, 3) muß also auch die dritte Seite co normal auf B'C' und der in dieser Richtung wirkenden Kraft T proportional sein.

Diese Schlüsse kann man weiter auf die Verbindungslinien do, eo, fo, u. s. w. fortsetzen, und es ergiebt sich dann leicht, daß die genannten Linien auf den Polygonseiten C'D', D'E', E'N normal sind und die Spannungen darstellen, welche diese im Zustande des Gleichgewichtes zu erleiden haben.

Aus dieser Darstellung folgt also, daß, wenn man auf einer horizontalen Linie eine Reihefolge von geradlinigen Stücken abtheilt, die den am Seilpolygon im Gleichgewicht befindlichen Gewichten proportional sind, und aus den Theilungspunkten gerade Linien normal auf die Richtungen der einzelnen Polygonseiten zieht, alsdann diese Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden, und ihre Längen den Spannungen derjenigen Seiten des Polygons proportional sind, auf deren Richtungen sie perpendikulär gezogen wurden. Hiernach läßt sich nun leicht beurtheilen, wie die Spannungen in den einzelnen Polygonseiten zu beiden Seiten des tiefsten Eckpunktes nach den Aufhängepunkten zu wachsend fortschreiten. Auch ergiebt sich sofort, daß das aus dem Punkte o auf die Horizontale af (Fig. 166) gezogene Loth ox den konstanten Werth der horizontalen Seitenkräfte aller Spannungen vorstellt; denn die Winkel, welche die den Spannungen proportionalen Linien ao, bo, co, ... ꝛc. mit dem Lothe ox bilden, sind nach der Reihe denjenigen Winkeln gleich, unter welchen die Polygonseiten MA', A'B', B'C',... ꝛc. gegen den Horizont geneigt sind.

§. 225.

Kettenpolygon. Bei den vorhergehenden Untersuchungen dachten wir uns das Polygon MA'B'...N (Fig. 165) als aus lauter vollkommen biegsamen Seilenden bestehend, in deren Verbindungsknoten A', B', C',... ꝛc. die Gewichte A, B, C,... ꝛc. aufgehängt waren. Man wird leicht einsehen, daß die vorgetragenen Lehren keine Änderung erleiden, wenn man sich die Polygonseiten MA', A'B', B'C', ꝛc. als schwere Stäbe vorstellt, die in den Punkten A', B', C',... ꝛc. (Fig. 167) durch Ringe so mit einander verbunden sind, daß das System dadurch vollkommen beweglich ist, und ungehindert jede Form annehmen kann, die der Zustand des Gleich-

gewichtes erfordert. Statt des gewichtsloſen Seiles hat man dann eine ſchwere Kette mit geradlinigen Stäben, und die Figur, welche dieſelbe im Zuſtande des Gleichgewichtes bildet, heißt ein **Kettenpolygon**.

Bezeichnet man nämlich die Gewichte der genannten Stäbe nach der Reihe mit q_1, q_2, q_3,... ꝛc., ſo kann man jedes derſelben in zwei parallele Seitenkräfte zerlegen, welche durch die Endpunkte der zugehörigen Stäbe gehen. So entſtehen z. B., wenn man der Einfachheit wegen jene Stäbe als prismatiſch vorausſetzt, aus q_1 zwei lothrechte Seitenkräfte, jede $= \frac{1}{2}q_1$, deren Angriffspunkte in **M** und **A'** liegen; aus q_2 entſtehen zwei lothrechte Seitenkräfte, deren Intenſitäten $\frac{1}{2}q_2$, $\frac{1}{2}q_2$ und von welchen **A'**, **B'** die Angriffspunkte ſind; eben ſo zerlegt ſich q_3 in zwei Seitenkräfte, jede $= \frac{1}{2}q_3$, deren vertikale Richtungen durch **B'** und **C'** gehen, u. ſ. w. Dieſem gemäß ſind die Verbindungspunkte **A'**, **B'**, **C'**,... ꝛc. den Wirkungen der lothrechten Kräfte $\frac{1}{2}(q_1 + q_2)$, $\frac{1}{2}(q_2 + q_3)$, $\frac{1}{2}(q_3 + q_4)$, u. ſ. w. unterworfen, von denen jede gleich der halben Summe der Gewichte zweier Kettenſtäbe iſt, die in einem jener Punkte zuſammen treffen. Bezeichnet man dieſe lothrechten Kräfte nach der Reihe mit **A**, **B**, **C**... ꝛc., ſo kann man ſich das Polygon ſelbſt als gewichtslos vorſtellen, und dann hat man wieder den im vorigen Paragraphen betrachteten Fall.

Es gelten alſo für das Kettenpolygon dieſelben Geſetze, die im Vorhergehenden für das Seilpolygon gefunden wurden. Dahin gehören vornehmlich: daß die horizontale Seitenkraft der Spannung in jeder Polygonſeite konſtant iſt, und daß der Schwerpunkt der ganzen Kette **MA'B'...N** in der Vertikalen **OX** liegt, die durch den Durchſchnittspunkt **O** der verlängerten Endſtäbe **MA'**, **NE'** geht. Eben ſo liegt der Schwerpunkt eines beliebigen Theils **A'B'C'...N** der Kette lothrecht über dem Punkte **O'**, in welchem ſich die

Verlängerungen der Endſtäbe A'B', NE' dieſes Kettenſtücks ſchneiden.

Will man die Spannungen in den Seiten des Kettenpolygons beſtimmen, unter der Vorausſetzung, daß daſſelbe von gleichmäßig ſchweren Stäben gebildet wird, ſo nehme man auf der geraden Horizontallinie mn (Fig. 166) die Stücke ma', a'b', b'c',...c'n den Gewichten der Polygonſeiten MA', A'B', B'C',...E'N (Fig. 167) proportional und ziehe aus den Mitten a, b, c...f dieſer Stücke die Linien ao, bo, co,... fo nach Richtungen, welche auf den correſpondirenden Polygonſeiten ſenkrecht ſind. Alle dieſe Linien werden dann, eben ſo wie vorhin, in einem und demſelben Punkte o zuſammenlaufen und durch ihre Längen p, s, t,...q die Größen der geſuchten Spannungen P, S, T,... Q darſtellen. Denn es iſt offenbar $ab = \frac{1}{2}(ma' + a'b') = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$; $bc = \frac{1}{2}(a'b' + b'c') = \frac{1}{2}(q_2 + q_3)$; $cd = \frac{1}{2}(b'c' + c'd') = \frac{1}{2}(q_3 + q_4)$; u. ſ. w.; folglich ſtellen die Stücke ab, bc, cd..ꝛc. die Gewichte A, B, C...ꝛc. vor, welche in den Punkten A', B', C'...ꝛc. des Polygons als wirkſam gedacht werden können. Der übrige Theil des Beweiſes iſt nun genau eben ſo, wie im vorigen Paragraphen.

Man denke ſich den Punkt c' (Fig. 166), in welchem die beiden, den Gewichten der unterſten Stäbe B'C' und C'D' proportionalen Linien b'c' und c'd' zuſammenſtoßen, mit dem Punkte o durch eine Gerade oc' verbunden. Steht dieſe Verbindungslinie ſenkrecht auf mn, ſo ſind die Winkel c'oc; c'ob, c'oa, u. ſ. w. denjenigen gleich, die von den Polygonſeiten B'C', A'B', MA', u. ſ. w. mit dem Horizonte gebildet werden, was ſehr leicht bewieſen werden kann, und die Stücke c'c, c'b, c'a u. ſ. w. ſtellen dann die trigonometriſchen Tangenten dieſer Winkel vor, wenn oc' als Radius betrachtet wird. Sind nun die Gewichte q_1, q_2, q_3... ꝛc. der genannten Polygonſeiten alle einander gleich, ſo müſſen

auch die sie darstellenden Linien ma', $a'b'$, $b'c'$... ꝛc. und mithin auch die Stücke ab, bc, cd... ꝛc. gleiche Längen haben. Der Punkt c' wird daher die Mitte von cd sein, und es wird sich verhalten $c'c : c'b : c'a : ꝛc. = 1 : 3 : 5 : ꝛc.$ Die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel, welche die Polygonseiten $B'C'$, $A'B'$, MA', ꝛc. mit dem Horizonte bilden, verhalten sich demnach wie die ungeraden Zahlen.

II. Von der Kettenlinie.

§. 226.

Erklärung und Grundgleichungen der Kettenlinie. Die in den vorhergehenden Parapraphen für ein Seil- oder Kettenpolygon gefundenen Gesetze müssen offenbar jedesmal stattfinden, wie groß auch die Anzahl der Polygonseiten, und wie klein auch die Längen derselben sein mögen. Denkt man sich nun jene unendlich groß und diese unendlich klein, so geht das vorhin betrachtete Polygon in eine stetige Curve über, welche **Kettenlinie** (Catenaria) heißt. Diesen Namen führt die Curve deswegen, weil die Krümmung einer schweren, mit ihren Enden an zwei festen Punkten aufgehängten, Kette — etwa einer feinen goldenen Damenkette — die erste Veranlassung gab, die geometrische Natur dieser krummen Linie zu erforschen.*)

Es stelle nun MCN, Fig. 168, die Gestalt einer in den Punkten M und N aufgehängten Kettenlinie vor, deren tiefster oder Scheitelpunkt sich in C befindet. Die Tangente

*) Die erste Anregung hiezu ging von Galilei aus, worauf sich die beiden Brüder Jacob und Johann Bernoulli mit der Untersuchung dieser Curve beschäftigten, bis Leibnitz, Huygens und später Gregori ihre Eigenschaften entdeckten.

CT an dieſem Punkte hat dann eine horizontale Lage, und wenn man außerdem noch an dem beliebigen Curvenpunkte D eine Tangente DS zieht, die ſich mit der vorigen in O ſchneidet, ſo liegt dieſer Punkt, dem Vorhergehenden gemäß, lothrecht unter dem Schwerpunkte des Curvenſtücks CD, deſſen Gewicht = R ſein mag. Bezeichnen S und T die Spannungen in den Curvenpunkten D und C, ſo kann man dieſelben als Kräfte betrachten, die nach den Richtungen der Tangenten OS, OT wirken und mit der vertikalen Kraft R am Punkte O im Gleichgewichte ſind. Nach §. 223 (5) finden nun, wenn $\varkappa$ und λ die Winkel bezeichnen, welche die genannten Tangenten mit der Vertikalen OX bilden, folgende Gleichungen ſtatt:

$$S = \frac{R \cdot \operatorname{Sin}\lambda}{\operatorname{Sin}(\varkappa+\lambda)}; \quad T = \frac{R \cdot \operatorname{Sin}\varkappa}{\operatorname{Sin}(\varkappa+\lambda)}.$$

Da aber $\angle\lambda = 90^0$ und alſo $\operatorname{Sin}\lambda = 1$, $\operatorname{Sin}(\varkappa+\lambda) = \operatorname{Cos}\varkappa$ iſt, ſo hat man auch

$$S = \frac{R}{\operatorname{Cos}\varkappa}; \quad T = R \cdot \operatorname{Tang}\varkappa$$

oder, wenn φ den Winkel bezeichnet, den die Tangente OS mit dem Horizonte bildet, und welcher $\varkappa$ zu einem Rechten ergänzt,

$$(1) \qquad S = \frac{R}{\operatorname{Sin}\varphi}; \quad T = \frac{R}{\operatorname{Tang}\varphi}.$$

Aus dieſen Gleichungen ergeben ſich, wenn man R und S als Functionen von T darſtellt, die Ausdrücke

$$(2) \qquad R = T \cdot \operatorname{Tang}\varphi; \quad S = T \cdot \operatorname{Sec}\varphi.$$

Da nun T konſtant iſt, ſo lehrt der erſte Ausdruck, daß die Gewichte beliebiger Curvenſtücke, die auf der Kettenlinie von deren Scheitelpunkt an abgetheilt werden, ſich wie die trigonometriſchen Tangenten der Winkel verhalten, welche die geraden Berührungslinien an den

Endpunkten jener Curvenstücke mit dem Horizonte bilden.

Der zweite Ausdruck zeigt, daß die Spannungen in den verschiedenen Punkten der Kettenlinie vom Scheitel nach den Aufhängepunkten zu stetig wachsen, so daß in C die kleinste, in M die größte Spannung stattfindet. Denn die tangentiale Spannung S im Punkte D ist der Sekante des daselbst stattfindenden Neigungswinkels φ proportional, und dieser Winkel wird augenscheinlich desto größer, je mehr sich der genannte Punkt dem Aufhängepunkte M nähert.

Zerlegt man die Kraft S im Punkte D nach horizontaler und vertikaler Richtung in die Seitenkräfte S′ und S″, so erhält man dafür:

(3) $S' = S\,\mathrm{Cos}\varphi = T, \quad S'' = S\,\mathrm{Sin}\varphi = R.$

Für jeden beliebigen Punkt der Kettenlinie ist also die horizontale Seitenkraft der Spannung eine constante Größe, und zwar jedesmal gleich der Spannung, die im tiefsten Punkte oder im Scheitel der Curve stattfindet.

Die vertikale Seitenkraft der Spannung eines beliebigen Punktes ist allemal gleich dem Gewichte des Seilstückes, welches zwischen diesem Punkte und dem Scheitel enthalten ist.

Obige Gesetze sind unabhängig von der Art und Weise, wie die Schwere über die Länge der Kettenlinie vertheilt ist, und in dieser Beziehung sind unendlich verschiedene Annahmen möglich, deren jede einer andern Form der Curve entspricht. Gewöhnlich setzt man eine gleichmäßige Vertheilung der Schwere voraus, so daß gleiche Curvenstücke auch gleiche Gewichte haben; die dieser Annahme entsprechende Curve heißt dann die gemeine Kettenlinie, von welcher hier zunächst die Rede ist. Weiterhin werden wir eine Kettenlinie, die einer andern Vertheilung der Schwere entspricht, kennen lernen.

§. 227.

Konstructive Behandlung der gemeinen Kettenlinie. Die gemeine Kettenlinie kann als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden, deren unendlich kleine Längen gleiche Gewichte haben. Man denke sich daher die Curve **MCN** (Fig. 168) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und auf einer horizontalen Linie **mn**, welche dem Gewicht der ganzen Kettenlinie proportional ist, eben so viele gleiche Theile genommen. Zieht man nun aus den Mitten der auf **mn** abgetheilten Stücke gerade Linien, die auf den correspondirenden Stücken der Curve **MCN** normal sind, so laufen alle diese Linien in einem und demselben Punkte **o** zusammen, und ihre, zwischen diesem Vereinigungspunkte und der Geraden **mn** enthaltenen, Längen stellen eben so die Spannungen in den zugehörigen Elementen der Kettenlinie vor, wie die Länge **mn** das ganze Gewicht dieser Curve. Die auf **mn** perpendikuläre Linie **oc** ist demnach das Maaß der Spannung **T** im Scheitelpunkte **C**, und es leuchtet sofort ein, daß die Spannung in diesem Punkte kleiner sein muß, als in jedem andern Punkte der Curve, weil die Vertikale **oc** die kleinste von allen denjenigen Linien ist, die von **o** nach **mn** gezogen werden können.

Ist die gerade Linie **od** normal auf das Element **D** der Kettenlinie, so stellt **doc** den Winkel φ vor, der von der Tangente am Punkte **D** mit dem Horizonte gebildet wird. In dem rechtwinklichen Dreieck **doc** hat man daher

$$cd = oc \cdot \mathrm{Tang}\varphi; \quad od = oc \cdot \mathrm{Sec}\varphi,$$

oder, weil sich $cd : do : oc = R : S : T$ verhält,

$$R = T \cdot \mathrm{Tang}\varphi; \quad S = T \cdot \mathrm{Sec}\varphi,$$

welches die im vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen (2) sind.

Haben die auf der Horizontallinie mn liegenden Punkte d und e gleiche Entfernungen von der Vertikalen oc, so sind die Spannungen do und eo einander gleich und die correspondirenden Curvenelemente, von welchen D und E die Mittelpunkte bedeuten, haben eine gleiche Lage auf der Kettenlinie. D. h. die spitzen Winkel, welche diese Elemente mit dem Horizonte bilden, und die Längen der Seilenden CD und CE sind einander gleich; denn jene werden von den gleichen Winkeln doc, eoc, und diese von den ebenfalls gleichen Längen cd und ce vorgestellt. Da dies nun von allen übrigen Elementen der Curve, die paarweise zu zwei homologen Linien wie od und oe gehören, eben so gilt, so folgt, daß je zwei Curvenelemente, die wie D und E gleiche Entfernungen vom Scheitel C haben, sich mit ihren Mitten auf einer und derselben Horizontallinie DE befinden, und letztere wird von der durch den Scheitel gehenden Vertikalen halbirt. Die Kettenlinie ist folglich in Bezug auf diese Vertikale eine symmetrische Curve.

Es seien ca und cd zwei geraden auf der Horizontalen mn vom Punkte c aus genommenen Linien, die den Gewichten, und also auch den Längen, der Bogen CA und CD proportional sind, und ao, do die Normalen auf den Tangenten, welche an den Endpunkten jener Bogen gezogen werden, so stellen aoc und doc die von den genannten Tangenten mit dem Horizont gebildeten Winkel α und φ vor. Offenbar verhält sich nun $ca : cd = \text{Tang}\, aoc : \text{Tang}\, doc$; folglich auch $CA : CD = \text{Tang}\,\alpha : \text{Tang}\,\varphi$.

D. h. Die Längen zweier Bogen der Kettenlinie, von derem Scheitelpunkte aus genommen, verhalten sich zu einander, wie die trigonometrischen Tangenten der spitzen Winkel, welche die durch die Endpunkte der Bogen gezogenen geraden Berührungslinien mit dem Horizonte bilden.

Wenn man alſo den Zweig CM der Kettenlinie, welcher zwiſchen dem Scheitel C und dem Aufhängepunkte M enthalten iſt, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilt, und durch die Theilpunkte gerade Berührungslinien legt, ſo ſchließen letztere mit dem Horizonte Winkel ein, deren trigonometriſche Tangenten ſich wie die natürlichen Zahlen verhalten. Zieht man aber die geraden Berührungslinien durch die Mitten der gleichen Bogenſtücke, ſo verhalten ſich die trigonometriſchen Tangenten der von ihnen mit dem Horizont gebildeten Winkel wie die ungeraden Zahlen.

Dieſe Sätze gelten allgemein, wie groß oder klein man auch die Bogenſtücke der Kettenlinie annehmen mag.

§. 228.

Ähnliche Kettenlinien. Zwei Kettenlinien MCN und M′C′N′ (Fig. 168 u. 169) ſind einander ähnlich, wenn ſich ihre Aufhängepunkte M, N und M′, N′ entweder auf einer und derſelben, oder auf zwei parallelen Linien befinden, und wenn überdies die rectificirten Längen der Curven MCN und M′C′N′ daſſelbe Verhältniß zu einander haben, wie die Entfernungen MN und M′N′ zwiſchen ihren Aufhängepunkten.

Denn das Gleichgewicht, welches für die Kettenlinie MCN ſtattfindet, wird nicht geſtört, wenn man die einzelnen Elemente dieſer Curve und die Entfernung zwiſchen ihren Aufhängepunkten, ohne etwas an den Richtungen dieſer Gegenſtände zu ändern, gleichzeitig um proportionale Stücke verkürzt, ſo daß ſich immer MCN : M′C′N′ = MN : M′N′ verhält. Daher wird das Gleichgewicht auch noch ſtattfinden, wenn die Curve MCN ſich auf die ihr ähnliche M′C′N′ reducirt hat, und es werden die Elemente der letzteren Curve mit den gleichliegenden der erſteren bezüglich parallel ſein. Hieraus folgt ferner, daß die convergirenden Linien ao, do,

co, eo, u. ſ. w., welche die Spannungen in den Punkten A, D, C, E der Kettenlinie MCN darſtellen und in dieſen Punkten auf den Elementen der genannten Curve normal ſind, auch zugleich für die ähnlich liegenden Punkte A', D', C', E' der Kettenlinie M'C'N' die Normalen, der Richtung nach, ſein werden. Zieht man daher die Linie m'n' parallel mit der Horizontalen mn und in einem ſolchen Abſtande von ihr, daß ſich m'n' : mn = M'N' : MN oder = M'C'N' : MCN verhält, ſo ſtellen die zwiſchen dem Punkte o und der Horizontalen m'n' enthaltenen Linien a'o, d'o, c'o, e'o die Spannungen dar, welche in den Punkten A', D', C', E' der zweiten Kettenlinie ſtattfinden.

Zwei Spannungen do und d'o, welche zu parallelen Elementen D und D' der beiden ähnlichen Kettenlinien gehören, ſollen homologe Spannungen genannt werden. Es iſt leicht zu beweiſen, daß ſich do : d'o = mn : m'n', alſo auch = MCN : M'C'N' verhält; d. h. in zwei ähnlichen Kettenlinien ſind die homologen Spannungen in demſelben Verhältniſſe, wie die Gewichte oder Längen der beiden Curven. Dieſer Satz bietet ein einfaches Mittel dar, zwiſchen einer im kleinen Maaßſtabe ausgeführten Modellkette und der Ausführung im Großen Vergleichungen anzuſtellen. Hat man z. B. durch Verſuche mit dem Modell das Verhältniß der Spannungen in den Aufhängepunkten zu dem ganzen Gewichte der Kette beſtimmt, ſo findet daſſelbe Verhältniß bei der Ausführung im Großen ſtatt. Von dieſer Vergleichung wird weiterhin Gebrauch gemacht.

§. 229.

Geometriſche Konſtruction der Kettenlinie. Dieſelbe iſt leicht auszuführen, wenn man die Länge und das Verhältniß des Gewichts der Kettenlinie zu den in ihren Aufhängepunkten ſtattfindenden Spannungen kennt.

Sind nämlich diese Stücke gegeben, so beschreibe man über eine beliebige Horizontallinie mn ein Dreieck mon (Fig. 170), dessen Seiten mn, mo und no dem Gewichte der Kettenlinie und den Spannungen im linken und rechten Aufhängepunkte proportional sind. Alsdann theile man die Länge der Curve und die horizontale Grundlinie mn dieses Dreiecks in dieselbe Anzahl gleicher Theile und verbinde die Mitten der auf mn abgetheilten Stücke ma, ab, bc, ... kn mit dem Punkte o durch die geraden Linien o1, o2, o3, ... o10, so repräsentiren diese, der Richtung nach, die Normalen für die correspondirenden Elemente der Kettenlinie. Man ziehe nun aus einem beliebigen Punkte M, der als Aufhängepunkt angenommen wird, die Linie MA normal auf die Richtung von o1 und mache die Länge dieser Linie gleich einem der gleichen Stücke, in welche die Kettenlinie getheilt wurde. Aus dem Endpunkte A ziehe man die Linie AB, von derselben Länge, normal auf die Richtung von o2; aus B die Linie BC nach einer auf o3 normalen Richtung, welche Linie wieder dieselbe Länge erhält, wie die beiden vorigen, und so wird fortgefahren, bis man endlich zum zweiten Aufhängepunkte N gelangt, wo dann die letzte Linie KN, mit den vorigen MA, AB, BC, u. s. w. von derselben Länge, normal auf die Richtung von o10 ist. Auf diesem Wege gelangt man zu einem Polygon MABC...KN, welches sich der stetigen Kettenlinie desto mehr nähert, je kleiner die Polygonseiten oder je größer die Anzahl der gleichen Theile auf der gegebenen Länge dieser Curve angenommen werden.

Das obige Verfahren setzt voraus, daß das Verhältniß des Gewichts der Kettenlinie zu den Spannungen in ihren Aufhängepunkten bekannt sei; denn auf diesem Verhältnisse beruht zunächst die Konstruction des Dreiecks mno. Um also jenes Verfahren in Ausübung zu bringen, müssen wir

uns zuvörderſt nach Mittel umſehen, durch deren Hülfe die fraglichen Spannungen gefunden werden können.

Iſt die Senkung des Scheitels der Kettenlinie unter der geraden Linie, welche ihre Aufhängepunkte verbindet, nur unbedeutend, ſo kann man die genannte Curve näherungsweiſe als eine gewöhnliche Parabel anſehen, und unter dieſer Vorausſetzung laſſen ſich die Spannungen in den Aufhängepunkten leicht berechnen, wie ſolches weiterhin (§. 231) gezeigt werden wird. Dieſes Näherungsverfahren kann in Anwendung gebracht werden, ſo lange die Senkung des Scheitels nicht mehr als $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{18}$ der Entfernung zwiſchen den Aufhängepunkten der Kettenlinie beträgt. Bei verhältnißmäßig größeren Senkungen weicht aber die Parabel von der hier in Rede befindlichen gemeinen Kettenlinie zu ſehr ab, als daß die eine Curve ohne merklichen Fehler die andere vertreten könnte. In dieſem Falle laſſen ſich die verlangten Spannungen in den Aufhängepunkten nicht wohl anders als durch ein praktiſches Abwiegen ausmitteln.

Zu dieſem Ende bringe man eine Kette von beliebiger Länge in eine ſolche Lage, daß ſie die Form MCN, Fig. 171, annimmt, die mit der zu konſtruirenden Curve ähnlich iſt (§. 228). Anſtatt aber die Kette an feſte Punkte zu hängen, verbinde man ihre Enden mit dünnen, vollkommen biegſamen Schnüren, die bei M und N über frei bewegliche feſte Rollen geleitet werden und deren lothrecht herabhangende Enden mit Waagſchalen verſehen ſind. Legt man nun in dieſe Waagſchalen ſo lange Gewichte, bis die Kette die verlangte Form angenommen hat und darin im Gleichgewichte bleibt, ſo geben dieſe Gewichte unmittelbar die Spannungen an, welche die Endpunkte M und N zu erleiden haben. Außerdem muß das Gewicht der Kette ſelbſt ſo genau als möglich ausgemittelt ſein, um deſſen Verhältniß zu den beiden Gegengewichten beſtimmen, und demnächſt das Dreieck

mno (Fig. 170) so konstruiren zu können, daß sich seine drei Seiten wie jene Gewichte verhalten.

Das erwähnte Abwiegen geschieht am besten mit Hülfe einer Modellkette, braucht aber natürlich nicht an beiden Enden zugleich vorgenommen zu werden. Es ist sogar zweckmäßiger, die Spannungen an den Enden der Kette nach einander zu bestimmen, so nämlich, daß während man diese Operation an dem einen Ende vornimmt, das andere Ende an einem festen Punkte hängt. Dabei ist nur darauf zu sehen, daß die Kette ihre Lage unverändert beibehält.

§. 230.

Parabolische Kettenlinie. Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich nur auf die gemeine Kettenlinie, bei welcher die Belastung über die ganze Länge der Curve gleichmäßig vertheilt ist, so daß gleiche Bogenstücke mit gleichen Gewichten beschwert sind. Wir wollen jetzt noch den besondern Fall betrachten, wo die Gewichte der verschiedenen Bogenstücke sich wie ihre horizontale Projectionen verhalten, eine Voraussetzung, welche der Theorie der Hängebrücken zur Grundlage dient.

Demgemäß sei **MVN** (Fig. 172) die geometrische Form der in den festen Punkten **M** und **N** aufgehängten Kette für den Zustand des Gleichgewichtes, **V** deren tiefster Punkt und **M'N'** eine Horizontallinie durch denselben. Zufolge der Voraussetzung sind die Belastungen der verschiedenen Theile der Curve ihren Projectionen auf die Horizontale **M'N'** proportional; daher werden Bogenstücke, deren Projectionen gleich sind, auch gleiche Gewichte haben. Man kann folglich die Belastung der ganzen Curve **MVN** als über die Horizontallinie **M'N'** gleichmäßig vertheilt annehmen, und unter dieser Voraussetzung sei q das Gewicht, welches auf jede Längeneinheit dieser Linie kömmt, also die Belastung eines Bo-

gens der Kettenlinie, deſſen horizontale Projection der Längeneinheit gleich iſt.

Um nun die Gleichung der fraglichen Curve zu finden, nehmen wir die durch den Scheitel V gezogene Vertikale VB zur Abſciſſenachſe und V ſelbſt zum Anfangspunkt der Coordinaten an; die dem beliebigen Curvenpunkte K entſprechende Abſciſſe ſei VJ = x, und die zugehörige Ordinate JK = y. Fällt man nun aus K den Perpendikel KK′ auf die Horizontale M′N′, ſo iſt VK′ = y die Projection des Bogens VK, deſſen Gewicht alſo durch qy ausgedrückt wird. Die Länge dieſer Projection werde in eine ſehr große Anzahl gleicher Theile getheilt, ſo daß, wenn n jene Anzahl und t die Länge eines jeden Theiles bezeichnet, nt = y iſt. Ferner ziehe man aus den Theilpunkten der Horizontalen VK′ vertikale Linien aufwärts bis an die Curve, ſo wird dadurch der Bogen VK in n ungleiche Elemente zerlegt, deren jedes eins der gleichen Theilchen t zur Projection hat.

Es ſtelle vw das mte dieſer Curvenelemente vor, von V nach K hin gezählt, v′w′ ſei die horizontale, v″w″ die vertikale Projection dieſes Elementes. Um letztere zu beſtimmen, ziehe man an der Mitte u von vw die Tangente uo, welche die Horizontale M′N′ in o ſchneidet. Nach den früher entwickelten Eigenſchaften aller Kettenlinien liegt dieſer Durchſchnittspunkt lothrecht unter dem Schwerpunkte des Bogens Vu, und man kann ihn als den gemeinſchaftlichen Angriffspunkt dreier Kräfte S_m, T und R_m betrachten, bezüglich die tangentialen Spannungen in den Curvenpunkten u, V, und das Gewicht des Bogens Vu vorſtellend, welche mit einander im Gleichgewichte ſind. Die Richtungen dieſer Kräfte ſind parallel mit den Seiten des kleinen Dreiecks vwr, welches ſich durch die projicirenden Linien von vw gebildet hat, und daher hat man die Vergleichung:

$$vr : wr = T : R_m = v'w' : v''w''.$$

Hierin ist $v'w' = t$ und $R_m = q \cdot Vu'$, oder, weil $Vu' = \frac{1}{2}(Vv' + Vw') = \frac{1}{2}t(2m-1)$ ist, $R_m = \frac{1}{2}qt(2m-1)$. Substituirt man diese Werthe und entwickelt $v''w''$ aus obiger Proportion, so kömmt

$$v''w'' = \frac{tq^2}{2T}(2m-1),$$

als Ausdruck für die vertikale Projection des mten Curvenelementes. Setzt man darin für m nach einander die Zahlen 1, 2, 3, ... n, so ergeben sich die Projectionen der von V bis K auf einander folgenden Elemente des Bogens VK, deren Summe augenscheinlich die Abscisse $KK' = x$ giebt. Also hat man

$$x = \frac{qt^2}{2T} \cdot \Sigma_1^n (2m-1) = \frac{qt^2n^2}{2T},$$

woraus sich ergiebt, weil $nt = y$ ist,

$$y^2 = \frac{2T}{q} \cdot x.$$

Zufolge dieser Gleichung ist die Kettenlinie unter der anfänglich gemachten besondern Voraussetzung eine gewöhnliche Parabel, da T und q unveränderlich sind. Setzt man den Quotienten aus diesen beiden Größen, der größeren Einfachheit wegen, gleich c, so daß also $T = qc$ ist, dann bedeutet c die horizontale Projection eines Bogens der Kettenlinie, dessen Belastung gleich der Spannung im Scheitel dieser Curve ist. Die obige Gleichung gestaltet sich demnächst also:

$$y^2 = 2cx.$$

Aus vorstehender Darstellung erhellet, wie die Gleichung der Kettenlinie wesentlich bedingt wird durch das Gesetz, nach welchem die Belastung der Curve über deren Länge stetig vertheilt ist, was bereits früher angedeutet worden ist. Wie also bei der vorhin angenommenen Vertheilung der Last eine Parabel entstand, so kann die Belastung nach einem solchen

Geſetze vertheilt gedacht werden, daß jede gegebene Curve als Kettenlinie entſteht; indeß können wir die darauf bezügliche Unterſuchung hier nicht weiter verfolgen.

§. 231.

Zuſätze und Folgerungen. Mit Hülfe der im vor. Paragraphen gefundenen Gleichung iſt es nunmehr leicht, alle Fragen zu beantworten, welche in Bezug auf die paraboliſche Kettenlinie von Intereſſe ſind. Dahin gehören vornehmlich folgende Aufgaben:

1) Wenn die Lage der Aufhängepunkte **M** und **N**, Fig. 172, gegeben iſt, durch $MM' = a$, $NN' = b$ und $M'N' = d$, die Lage des Scheitelpunktes **V** zu beſtimmen.

Man fälle aus **M** und **N** auf die Achſe der Parabel die Perpendikel **MA** und **MB**, bezeichne $M'V = MA$ mit **m**, $N'V = NB$ mit **n**, ſo ſind **m** und **n** zwei Ordinaten, die zu den Abſciſſen $VA = MM' = a$ und $VB = NN' = b$ gehören. Daher verhält ſich

$$m : n = \sqrt{a} : \sqrt{b},$$

und außerdem iſt $m + n = d$.

Aus der Verbindung dieſer beiden Gleichungen folgt

$$m = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; \quad n = \frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

wodurch die Lage des Scheitels **V** beſtimmt iſt.

2) Um die paraboliſche Kettenlinie konſtruiren zu können, iſt die Kenntniß der Konſtanten **c** nöthig, die ſich leicht auf folgende Art finden läßt. Für den Punkt **M** hat man nämlich die Gleichung $m^2 = 2ca$, aus welcher ſich ſofort ergiebt

$$c = \frac{m^2}{2a} = \frac{\frac{1}{4}d^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

3) Mit Hülfe dieſer Größe läßt ſich ferner die horizontale Spannung **T** im tiefſten Punkte der Curve beſtimmen. Dieſelbe iſt nämlich

$$T = qc = \frac{\frac{1}{2}qd^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2};$$

ein Ausdruck, der zugleich die horizontale Seitenkraft der Spannung in jedem andern Curvenpunkte darſtellt.

4) Verlangt man die tangentiale Spannung S für den durch die Coordinaten x, y gegebenen Curvenpunkt L zu beſtimmen, ſo denke man S nach horizontaler und vertikaler Richtung in die Seitenkräfte S', S'' zerlegt, dann iſt

$$S' = T = qc; \quad S'' = R = qy;$$

wo R die der Ordinate y proportionale Belaſtung des Bogens VL bedeutet. Die fragliche Spannung ergiebt ſich nun als Mittelkraft von S' und S'' wie folgt:

$$S = \sqrt{S'^2+S''^2} = q\sqrt{c^2+y^2},$$

oder, wenn für y^2 der Werth $2cx$ eingeſetzt wird,

$$S = q\sqrt{c^2+2cx}.$$

Die Spannungen in den Aufhängepunkten M und N erhält man hiernach leicht, indem man für x nacheinander die Werthe a und b einſetzt.

5) In der Praxis finden die obigen Formeln Anwendung beim Bau der Hängebrücken, um die Abmeſſungen der einzelnen Verbandſtücke zu berechnen. In den meiſten Fällen liegen die Aufhängepunkte in einer und derſelben Horizontallinie MN, Fig. 173, der Scheitel V der Curve fällt dann in die Mitte zwiſchen jenen Punkten, und ſeine Senkung VW unter der genannten Horizontallinie wird die Pfeilhöhe genannt. Bezeichnet man letztere mit h, die wagerechte Entfernung der Aufhängepunkte von einander wie früher mit d, ſo iſt h die Abſciſſe zu $\frac{1}{2}d$ als Ordinate; daher

$$\frac{1}{4}d^2 = 2ch; \text{ alſo } c = \frac{d^2}{8h}.$$

Setzt man dies in den obigen Ausdruck von S ein, ſo kömmt

$$S = \frac{qd}{4h}\sqrt{\frac{1}{4}d^2+4hx} = \frac{Q}{4h}\sqrt{\frac{1}{4}d^2+4hx};$$

wo $Q = qd$ die ganze Belastung der Kettenlinie bedeutet. Für $x = h$ erhält man hiernach die tangentiale Spannung in den Aufhängepunkten, nämlich

$$S = \frac{Q}{4h}\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + 4h^2}.$$

Beispiel. Bei der im Jahre 1832 von dem französischen Ingenieur Chaley zu Freiburg in der Schweiz erbauten Hängebrücke beträgt die Entfernung zwischen den Aufhängepunkten $d = 273$ Meter, die Pfeilhöhe $h = 19{,}28$ Meter und das ganze Gewicht der Brücke einschließlich des Hängesystems, die sogenannte beständige Belastung, 300000 Kilog. Für die größte zufällige Belastung, wenn die Brückenbahn ganz mit Menschen besetzt ist, hat man 160000 Kilog. — etwa 300 Kil. auf den Quadratmeter — angenommen, und die für den nachtheiligsten Fall in Rechnung zu bringende Gesammtbelastung würde daher gleich 460000 Kil. sein. Die Brückenbahn ist an jeder Seite mittelst vertikaler Hängestäbe an zwei neben einander liegenden Drahtseilen aufgehangen, so daß also die oben angegebene Belastung sich auf vier Drahtseile vertheilt. Jedes von diesen Seilen bildet für sich eine Kettenlinie, welche demnach mit $Q = 115000$ Kil. belastet ist. Nach der obigen Formel ergiebt sich nun das Maximum der Spannung in runder Zahl

$$S = 211500 \text{ Kilog.}$$

Jedes Drahtseil ist 13 bis 14 Centim. dick und besteht aus 1056 Eisendrähten von 3 Millim. im Durchmesser. Die größte Spannung, welche ein einzelner Draht im nachtheiligsten Falle auszuhalten hat, beträgt daher

$$\frac{211500}{1056} = 200 \text{ Kilog.}$$

und da die Drähte bei den angestellten Festigkeitsproben eine nach ihrer Länge wirkende Kraft = 610 Kil. erforderten, um zerrissen zu werden, so bieten sie einen Widerstand dar, welcher über dreimal so groß ist, als die sie spannende Kraft. Ohne Rücksicht auf die zufällige Belastung ist dieser Widerstand etwa fünfmal so groß als die Spannung.

III. Von der elastischen Linie.

§. 232.

In dem Vorhergehenden betrachteten wir das Gleichgewicht der Körper nur unter der Voraussetzung, daß dieselben

entweder absolut fest und starr, oder daß sie vollkommen biegsam seien, ohne auf ihre mehr oder mindere Elasticität Rücksicht zu nehmen. Es bleibt uns nunmehr noch übrig, die Bedingungen des Gleichgewichtes derjenigen Körper zu untersuchen, die der Biegung durch äußere Kräfte einen gewissen Widerstand, den man die Elasticität oder Federkraft nennt, entgegensetzen, und die ihre ursprüngliche Gestalt ganz wieder annehmen, sobald die Einwirkung der äußern Kräfte aufgehoben wird. Solche Körper nennt man vollkommen elastisch, im Gegensatze zu den unvollkommen elastischen Körpern, die nach einer stattgehabten Biegung ihre ursprüngliche Gestalt nur theilweise wieder annehmen. Die Körper der letzten Art müssen hier außer Betracht bleiben.

Wird ein vollkommen elastischer Körper, den wir als ein gerades Prisma voraussetzen wollen, durch äußere Kräfte gebogen, so erleiden die Längenfasern an der convexen Seite der Krümmung eine Ausdehnung, die an der concaven Seite aber eine Zusammendrückung oder Verkürzung; zwischen beiden Theilen liegt daher eine Faserschicht, die ihre ursprüngliche Länge unverändert beibehalten hat. Die Curve, welche diese Faserschicht im gekrümmten Zustande des Prismas bildet, heißt die elastische Linie (Elastica); sie ist maaßgebend für die Beurtheilung der Biegung des ganzen Körpers, und die Untersuchung der geometrischen Natur dieser Curve bildet daher die Aufgabe, deren Lösung uns hier zunächst vorliegt.

Anstatt jener Faserschicht des elastischen Prismas, die bei der Biegung desselben weder Ausdehnung noch Zusammendrückung erleidet, kann man sich auch ein vollkommen elastisches Blech denken, durchgängig von einerlei Breite, ohne Dicke und in seinem natürlichen Zustande ganz eben, welches jeder Biegung denselben Widerstand wie das Prisma entgegen setzt. Die Fläche dieses Bleches denken wir uns normal auf die

Ebene der Figurentafel und die äußeren Kräfte, welche daſſelbe zu biegen ſtreben, mit der genannten Ebene parallel. Auf das eigne Gewicht des Bleches ſoll vorläufig keine Rückſicht genommen werden, was aber weiterhin geſchehen wird.

§. 233.

Grundeigenſchaften der elaſtiſchen Linie. Man denke ſich ein elaſtiſches Blech von gegebener Länge, auf welches beliebig viele äußere Kräfte P, Q, R, S, T, ꝛc. wirken und dadurch die urſprünglich gerade Geſtalt deſſelben ſo verändern, wie es in Fig. 174 die krumme Linie ABCDE darſtellt. Iſt das Blech in dieſer gekrümmten Geſtalt zum Gleichgewichte gekommen, ſo wird letzteres nicht geſtört, wenn man annimmt, es ſei das ganze Blech oder irgend ein Theil deſſelben ſtarr und unelaſtiſch geworden. Das fragliche Gleichgewicht findet daher in zwiefacher Weiſe ſtatt: einmal zwiſchen den äußeren Kräften, als ein Syſtem für ſich, auf welches die in §. 82 aufgeſtellten Bedingungsgleichungen eine unmittelbare Anwendung finden; nächſtdem aber muß jeder Theil des Bleches, z. B. der Theil ABC, unter den daran wirkenden äußern und innern Kräften im Gleichgewichte ſein, wobei man den übrigen Theil CDE nöthigenfalls als feſt und unbiegſam betrachten kann.

Was die erwähnten innern Kräfte betrifft, ſo ſind darunter die Elaſticitätswiderſtände zu verſtehen, welche in den verſchiedenen Punkten des Bleches durch die ſtatthabende Biegung deſſelben hervorgerufen werden. Man muß ſich dieſelben als Kräfte denken, die nicht bloß einer ſtärkeren Biegung widerſtehen, ſondern welche das gebogene Blechſtück ABC wieder in die urſprüngliche, durch die Tangente A'C vorgeſtellte, gerade Lage zurückführen, ſobald die äußern Kräfte P, Q beſeitigt werden. — Um hievon eine klare Vorſtellung zu geben, ſei vw ein unendlich kleines Curvenelement,

an deſſen Endpunkten die Tangenten vv', ww', den Winkel φ mit einander bildend, gezogen ſind. Dieſes Element bildete urſprünglich mit den zunächſt anliegenden Elementen eine gerade Linie, iſt alſo bei der ſtattgehabten Biegung um den Winkel φ aus der Richtung des an v grenzenden Elementes gedreht worden, und die Elaſticität in v hat nun das Beſtreben, es in jene Richtung wieder zurück zu drehen. Demgemäß kann man die Elaſticität des Punktes v durch eine Kraft F erſetzen, deren Richtung fF auf der tangentialen Verlängerung von vw normal ſteht, und die das Beſtreben hat, das in Rede befindliche Element um den Punkt v hebelartig aufwärts zu drehen.

Denkt man ſich dieſe Kraft in der bezeichneten Art wirklich angebracht, die in v zuſammenſtoßenden Blechſtücke ABv und $EDCv$ als vollkommen unbiegſame feſte Körper, letzteres außerdem als unwandelbar befeſtigt, was alles unbeſchadet des vorausgeſetzten Gleichgewichtes im ganzen Bleche zuläſſig iſt, ſo verhält ſich das Blechſtück ABv wie ein einarmiger Hebel, an welchem die Kräfte P, Q und F in Bezug auf Drehung um den Punkt v mit einander im Gleichgewichte ſind. — Für die Kraft F ſtellt vf den Hebelsarm vor, während vp und vq die Hebelsarme der Kräfte P und Q ſein mögen. Mit Rückſicht auf die in der Figur angenommenen Richtungen der genannten Kräfte hat man daher die Momentengleichung

$$(1) \qquad P \cdot vp - Q \cdot vq = F \cdot vf = M,$$

indem man nämlich die algebraiſche Summe der Momente aller äußern Kräfte, die auf Biegung des Blechſtückes ABv wirken, der Kürze wegen mit M bezeichnet.

Für die Länge von vf kann nun ein beliebiger Werth angenommen werden, und mit Hülfe der obigen Gleichung läßt ſich dann die Elaſticität F beſtimmen. Um aber die Kräfte, welche die Elaſticitäten in den verſchiedenen Curven-

punkten vertreten, bequemer mit einander vergleichen zu können, ist es zweckmäßig, die Hebelsarme aller dieser Kräfte gleich groß anzunehmen; und da ihre Länge willkürlich ist, so kann man sie auch gleich 1 setzen. Man hat dann

$$F = M, \tag{2}$$

so daß also die Größe F zu gleicher Zeit die Elasticität im Punkte v und das Moment dieses Widerstandes ausdrückt.

Die Erfahrung lehrt nun, daß der Widerstand eines elastischen Stabes desto mehr zunimmt, je stärker derselbe gebogen wird. Mit Rücksicht darauf geht man bei der Untersuchung der elastischen Linie von der Annahme aus, daß die Elasticität in irgend einem Punkte dieser Curve, dem zugehörigen Krümmungsmaaße, als welches in dem vorliegenden Falle der Winkel $v'vw' = \varphi$ gelten kann, direct proportional sei. Dieser Winkel steht aber, nach Anh. IV, Nr. 36, im umgekehrten Verhältniß des zum Element uv gehörigen Krümmungshalbmessers, den man bekanntlich erhält, indem man in v und w auf den Tangenten vv', ww' Normalen errichtet, welche sich in o schneiden. Bezeichnet ϱ die Länge dieses Halbmessers, so ist dieselbe der Elasticität F umgekehrt proportional, so daß, wenn F' und ϱ' eine gleiche Bedeutung für irgend einen andern Punkt der elast. Linie haben, sich $F : F' = \varrho' : \varrho$ verhält. Daraus ergiebt sich $F\varrho = F'\varrho'$, woraus hervorgeht, daß das Produkt aus der Elasticität irgend eines Curvenpunktes in dem zugehörigen Krümmungshalbmesser eine konstante Größe ist, welche mit E bezeichnet werden soll. Man hat demnach

$$F\varrho = E; \quad \text{also } F = \frac{E}{\varrho},$$

und wenn dies in Gleichung (2) eingesetzt wird, entsteht

$$M = \frac{E}{\varrho}, \text{ und } M\varrho = E. \tag{3}$$

Die Constante E pflegt man nach dem Vorgange von

Eytelwein die relative Elasticität zu nennen. Sie hat für jeden prismatischen Körper einen von seinem Querschnitt und seiner physischen Beschaffenheit abhängigen Werth, der nur durch Versuche bestimmt werden kann, und daher hier als bekannt vorausgesetzt werden muß.

Die Gleichung $M\varrho = E$ drückt nun ein allgemeines Grundgesetz der elast. Linie aus, welches für die folgende Entwicklung von Wichtigkeit ist. Nennt man nämlich die durch M dargestellte Momentensumme kurzweg das Biegungsmoment, so ist das Produkt aus dem Biegungsmoment in Bezug auf einen beliebigen Curvenpunkt und dem zu diesem Punkte gehörigen Krümmungshalbmesser konstant und der relativen Elasticität gleich.

In den meisten Fällen der Anwendung ist das Biegungsmoment M gegeben, oder doch nach Richtung und Größe der äußeren Kräfte, welche die Gestalt der elast. Linie bedingen, leicht zu berechnen. Die obige Gleichung giebt dann

$$\varrho = \frac{E}{M}, \tag{4}$$

so daß also der Krümmungshalbmesser für jeden Punkt der elast. Linie erhalten wird, indem man die relative Elasticität durch das auf jenen Curvenpunkt bezogene Biegungsmoment dividirt. — Für den Endpunkt A ist, wie leicht erhellet, das Moment $M = 0$, und daher ergiebt sich für diesen Punkt $\varrho = \infty$. Das elast. Blech läuft also an seinen äußersten Enden jedesmal geradlinigt aus.

Schließlich verdient noch bemerkt zu werden, daß die obigen Gesetze, obgleich sie zunächst nur für den Theil ABv der elast. Linie hergeleitet wurden, doch in ganz gleicher Weise auch für den andern Theil vCDE gültig sind. Denn da alle äußeren Kräfte, wie bereits früher erwähnt, ein Gleich-

gewicht unter sich bedingen, so geben die Kräfte P, Q, welche auf der einen Seite des Punktes v wirken, dasselbe Biegungsmoment in Bezug auf v als Momentenpunkt, wie die auf der andern Seite dieses Punktes wirkenden Kräfte R, S, T. Die Größe M ist daher als der gemeinsame Ausdruck für die Momentensummen beider Systeme von Kräften zu betrachten.

§. 234.

Gleichung der elastischen Linie. Die im vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze gelten ganz allgemein für jede Biegung des elastischen Bleches, verursacht durch eine beliebige Anzahl äußerer Kräfte, in Bezug auf welche keine andere Voraussetzung gemacht wurde, als daß ihre Richtungen parallel mit der Ebene sind, auf der die krumme Fläche des Bleches normal steht. Sofern es sich nun darum handelt, die Gleichung der fraglichen Curve zu finden, müssen wir, von jener allgemeinen Auffassung abstehend, unsere Betrachtungen hinfort auf den besondern Fall beschränken, wo die ursprüngliche Lage des Bleches horizontal ist, die äußern Kräfte aber nach vertikalen Richtungen wirken und vermöge ihrer Größe nur eine sehr geringe Biegung herbei führen.

Dies vorausgesetzt, so stelle DCAE, Fig. 175, das ursprünglich gerade Blech in seinem gekrümmten Zustande vor; bei A stütze sich dasselbe auf einen festen Widerstand, an dessen Stelle man sich auch eine vertikal aufwärts wirkende Kraft T denken kann; bei C, D, E sind die Gewichte P, R, W aufgehangen, bei B wirkt eine Kraft S vertikal aufwärts, und außerdem sei über ACB eine Last Q gleichmäßig vertheilt, was durch die stärker ausgezogene Linie angedeutet sein mag. Die im Punkte A der Curve gezogene Tangente D'E' habe eine horizontale Lage und stelle die des Bleches in seinem natürlichen Zustande vor. Die Abweichung

des gekrümmten Bleches von dieser ursprünglichen Lage desselben sei so gering, daß man die Längen der Curvenstücke AB, AC, AD, ꝛc. ohne merklichen Fehler als gleich annehmen kann, mit den Längen ihrer horizontalen Projectionen AB′, AC′, AD′, ꝛc., und diese wie jene sollen bezüglich mit a, b, c bezeichnet werden.

Indem wir nun zur näheren Untersuchung der Curve ACB übergehen, ist die Vorbemerkung von Wichtigkeit, daß die beiden Theile AC und BC sich nicht durch eine und dieselbe Gleichung darstellen lassen, weil die Stetigkeit durch das bei C angehängte Gewicht P unterbrochen wird. Es soll daher zunächst die Gleichung für den Theil AC der Curve gesucht werden, zu welchem Ende wir A zum Coordinaten-Anfang, AB′ zur Abscissenachse wählen, und für einen beliebigen Curvenpunkt J zwischen A und C die horizontale Abscisse AH = x, die vertikale Ordinate HJ = y setzen.

Man denke sich den Bogen AJ, dessen Länge seiner Projection AH gleich angenommen wird, in n gleiche Theile t getheilt, so daß nt = x ist, und in den Theilpunkten gerade Berührungslinien gezogen, die bis zur Ordinate HJ verlängert werden. Letztere wird dadurch in n ungleiche Theile zerlegt, die von H bis J stetig abnehmen, und wenn man die Längen dieser Theile berechnet, so giebt die Summe derselben offenbar die Ordinate y. — Es stelle vw das mte Theilchen des Bogens AJ vor, das bei A als das erste gezählt, vv′ und ww′ seien die an seinen Endpunkten gezogenen Tangenten, welche den Winkel φ mit einander bilden und auf der Ordinate HJ das Theilchen v′w′ abschneiden, dessen Länge folgendermaßen bestimmt werden kann:

Denkt man sich vw als ein unendlich kleines Curvenelement, so erscheint ww′ als die Verlängerung desselben und der Berührungswinkel φ ist dann um so mehr als unendlich

klein zu betrachten. Innerhalb der Schenkel des letztern beschreibe man aus v als Mittelpunkt mit den Halbmessern vv', ww' zwei Kreisbögen, deren Längen sich bezüglich mit $vv' \cdot \varphi$ und $vw' \cdot \varphi$ ausdrücken lassen, dann ist offenbar der eine kleiner, der andere aber größer als v'w'. Dieses Theilchen kann daher, vorläufig näherungsweise, als das arithmetische Mittel jener Kreisbögen berechnet werden, so daß $v'w' = \frac{1}{2}\varphi(vv' + vw')$ ist. Da aber nach der Voraussetzung der Bogen vJ seiner horizontalen Projection uH gleich angenommen wird, so gilt dasselbe auch für die Tangenten vv' und vw', weil sie ebenfalls uH zur Projection haben, und demgemäß ist $\frac{1}{2}(vv' + vw') = uH$; also

$$v'w' = \varphi \cdot uH = \varphi(AH - Au) = \varphi(x - (m-1)t).$$

In den Punkten v und w errichte man auf den daselbst gezogenen Tangenten die Normalen vo, wo, die sich in o schneiden, so stellen sie die Krümmungshalbmesser ϱ des Elements vw vor, und der von ihnen gebildete Winkel vow ist dem Berührungswinkel φ gleich. Man hat daher $\varrho\varphi = vw = t$; also $\varphi = \frac{t}{\varrho}$, und mithin

$$v'w' = \frac{t}{\varrho}(x - (m-1)t) = \frac{Mt}{E}(x - (m-1)t),$$

weil nach (4) des vor. §. $\varrho = \frac{E}{M}$, also $\frac{t}{\varrho} = \frac{Mt}{E}$ ist.

In dieser Gleichung bedeutet E die relative Elasticität, M aber das den Kräften P, Q, R und S entsprechende Biegungsmoment, welches letztere in Bezug auf den Punkt v berechnet werden muß. — Zu dem Ende dient $uC' = AC' - Au = b - (m-1)t$ als Hebelsarm von P, während $uD' = AD' - Au = c - (m-1)t$ und $uB' = AB' - Au = a - (m-1)t$ als Hebelsarme von R und S zu nehmen sind. Von der Belastung Q, welche über die Länge $AB = a$ gleichmäßig vertheilt ist, darf hier nur der auf Bv

ruhende Theil in Rechnung kommen, und die Größe deſſelben ergiebt ſich leicht gleich $\frac{Q}{a} \cdot Bv = \frac{Q}{a}(a-(m-1)t)$; der zugehörige Hebelsarm iſt $\frac{1}{2}uB' = \frac{1}{2}(a-(m-1)t)$, da die Projection des Schwerpunktes von Bv, wo man die über dieſe Linie gleichmäßig vertheilte Laſt vereinigt denken kann, in die Mitte von B'u trifft. Demnach iſt nun

$$M = P(b-(m-1)t) + R(c-(m-1)t) - S(a-(m-1)t) + \frac{Q}{2a}(a-(m-1)t)^2,$$

oder, wenn nach Potenzen von $(m-1)$ geordnet wird,

$$M = \frac{1}{2a}\left[\begin{matrix}2a(bP+cR-aS+\frac{1}{2}aQ) - \\ 2at(P+R-S+Q)(m-1) + Qt^2(m-1)^2\end{matrix}\right].$$

Setzt man zur Abkürzung der Rechnung

$$P+R-S+Q = U,$$
$$bP+cR-aS+\tfrac{1}{2}aQ = V,$$

ſo drückt U die algebraiſche aller auf ACD wirkenden Kräfte, und V die algebraiſche Summe ihrer Momente in Bezug auf den Unterſtützungspunkt A aus. Das obige Biegungsmoment geſtaltet ſich dann alſo:

$$M = \frac{t}{2a}\left[2aV - 2atU(m-1) + Qt^2(m-1)^2\right],$$

und wenn dies in dem obigen Ausdrucke von v'w' eingeſetzt wird, ſo entſteht

$$v'w' = \frac{t}{2aE}\left[\begin{matrix}2aVx - 2at(Ux+V)(m-1) + \\ (Qx+2aU)t^2(m-1)^2 - Qt^3(m-1)^3\end{matrix}\right].$$

Nach dieſer Formel erhält man die von H bis J aufeinander folgenden Elemente der Ordinate y, indem man für m die Werthe der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3,... n einſetzt, und wenn dann ſummirt wird, ſo kömmt

$$y = \frac{t}{2aE}\left[\begin{matrix}2aVx\cdot n - 2at(Ux+V)\cdot\Sigma(n-1) + \\ (Qx+2aU)t^2\cdot\Sigma(n-1)^2 - Qt^3\cdot\Sigma(n-1)^3\end{matrix}\right].$$

Für ein unendlich großes n hat man aber $\Sigma(n-1)^\mu = \frac{(n-1)^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{n^{\mu+1}}{\mu+1}$; folglich entſteht

$$y = \frac{t}{2aE}\left[\begin{matrix}2aVx\cdot nt - a(Ux+V)\cdot n^2t^2 + \\ \frac{1}{3}(Qx+2aU)\cdot n^3t^3 - \frac{1}{4}Q\cdot n^4t^4\end{matrix}\right]$$

und wenn darin für nt der entſprechende Werth x geſetzt wird, ſo kömmt:

$$\text{(I.)} \qquad y = \frac{1}{24aE}\left(12aVx^2 - 4aUx^3 + Qx^4\right).$$

Dies iſt nun zwar die geſuchte Gleichung der elaſt. Curve; allein es muß nochmals erinnert werden, daß dieſelbe, wegen der bei C angebrachten Belaſtung P, nur für den Bogen AC gilt. Dagegen erweitert ſich die Grenze ihrer Gültigkeit nach Beſeitigung dieſer Belaſtung ſofort bis zum Punkte B, und nach fernerer Beſeitigung der hier angebrachten Kraft S bis zum Endpunkte D. In allen dieſen Fällen bleibt die Gleichung der Form nach ganz unverändert; nur dem Werthe nach erleidet ſie in ſofern eine Änderung, als man in den durch U und V dargeſtellten Ausdrücken für die erſte Annahme die Größe P, für die zweite aber außerdem noch die Größe S gleich Null ſetzen muß.

Zum Schluſſe dieſer allgemeinen Unterſuchung wollen wir noch den Krümmungshalbmeſſer eines beliebigen Curvenpunktes beſtimmen, der nach (4) des vor. §. gefunden wird, indem man die relative Elaſticität durch das auf jenen Punkt bezogene Biegungsmoment dividirt. Dabei dürfen aber ebenfalls nur diejenigen Kräfte, welche auf das von dem fraglichen Curvenpunkte bis zum Ende A reichende Blechſtück wirken, in Rechnung gebracht werden. — Für den zwiſchen A und C liegenden Punkt K, deſſen Abſciſſe AJ = x iſt, hat man demgemäß:

$$M = P(b-x) + R(c-x) - S(a-x) + \frac{Q}{2a}(a-x)^2,$$

oder, wenn nach x geordnet und die vorhin gewählte abgekürzte Bezeichnung eingeführt wird,

$$M = \frac{1}{2a}\left(2aV - 2aUx + Qx^2\right).$$

Dividirt man damit in E, so kömmt

$$\text{(II)} \qquad \varrho = \frac{2aE}{2aV - 2aUx + Qx^2}.$$

Nach der den Ausdrücken U und V beigelegten Bedeutung gilt diese Formel zunächst nur von $x = o$ bis $x = b$. Man kann sie aber auch zur Berechnung der Krümmungshalbmesser solcher Punkte anwenden, die zu größeren Abscissen gehören, nur müssen dann die Werthe von U und V der obigen Bemerkung gemäß geändert werden. In dieser Hinsicht findet ein wohl zu beachtender Unterschied statt, zwischen der Gültigkeit obiger Formel und der Curvengleichung (I), da letztere nur dann bis zum Punkte B gültig ist, wenn außer der über AB vertheilten Last Q durchaus keine anderen Kräfte zwischen A und B wirken.

§. 235.

Anwendung vorstehender Gesetze auf besondere Fälle. Ein gleichmäßig schweres, vollkommen elast. Blech ACB von der Länge a (Fig. 176) sei in horizontaler Lage mit dem einen Ende A unwandelbar befestigt (eingeklemmt), während am andern Ende B eine vertikale Kraft S angebracht ist, die sowohl aufwärts als abwärts gerichtet sein kann. Hier soll zunächst der erste Fall vorausgesetzt werden.

Da außer dem eigenen Gewichte Q des Bleches zwischen A und B keine andern Kräfte auf dasselbe wirken, so wird die Curve ACB durch eine einzige Gleichung bestimmt, die sich aus der des vor. §. leicht herleiten läßt. Hiezu ist nur nöthig, $U = Q - S$ und $V = \frac{1}{2}aQ - aS$ zu setzen, wonach man sofort erhält:

$$(1)\quad y = \frac{1}{24aE}\left[6a^2(Q-2S)x^2 - 4a(Q-S)x^3 + Qx^4\right].$$

Auf gleiche Weiſe ergiebt ſich für den Krümmungshalbmeſſer

$$(2)\quad \varrho = \frac{2aE}{a^2(Q-2S) - 2a(Q-S)x + Qx^2}$$
$$= \frac{2aE}{(a-x)\,[a(Q-2S) - Qx]}.$$

Dieſer Ausdruck läßt erſehen, daß der Krümmungshalbmeſſer ſeinen kleinſten Werth für $x = o$ erhält, nämlich

$$(3)\quad \varrho = \frac{2E}{a(Q-2S)},$$

woraus hervorgeht, daß die ſtärkſte Krümmung im Befeſtigungspunkte ſtattfindet, da ſie jedesmal dem Werthe von ϱ umgekehrt proportional iſt.

Ferner liefert die Gleichung (2) für $x = a$ und $x = a\frac{Q-2S}{Q}$ jedesmal $\varrho = \infty$. Demnach läuft die elaſtiſche Curve bei **B** geradlinigt aus und hat außerdem noch einen ſogenannten Wendepunkt, wo nämlich die concave Krümmung in eine convexe übergeht, oder umgekehrt. Die durch den letzten Werth von x ausgedrückte Entfernung des fraglichen Punktes vom Unterſtützungspunkte **A** wird immer kleiner, jemehr die Intenſität von **S** ſich dem Werthe $\frac{1}{2}Q$ nähert, bis er für $S = \frac{1}{2}Q$ gänzlich mit **A** zuſammenfällt. Für dieſen Werth von **S** giebt die Formel (3) einen unendlichen Krümmungshalbmeſſer, während derſelbe negativ ausfällt, ſobald $S > \frac{1}{2}Q$ geworden iſt. Die bis dahin abwärts gekehrte concave Krümmung in dem zunächſt bei **A** liegenden Theile des Bleches iſt alſo in die entgegengeſetzte verwandelt worden, was offenbar nicht anders möglich iſt, als daß das ganze Blech ſich über die Horizontale **AB'**, derſelben eine durchgängig convexe Krümmung zuwendend, erhoben hat.

Aus der Gleichung (1) erhält man für $x = a$ die

Ordinate des Endpunktes, welche δ heißen mag, folgendergestalt:

$$(4) \qquad \delta = \frac{a^3}{24E}(3Q - 8)S.$$

Ergiebt sich dieselbe für bestimmte Werthe von S positiv, so liegt der Punkt B unterhalb, im andern Falle aber oberhalb der Horizontalen AB'; jener Fall tritt ein, wenn die Kraft S kleiner, dieser wenn sie größer als $\frac{3}{8}Q$ ist, während $\delta = 0$ wird, sobald man $S = \frac{3}{8}Q$ annimmt. Demnach ist $\frac{3}{8}Q$ der größte Werth von S, bei welchem das ganze Blech noch unter der Horizontalen AB' bleibt, wogegen nach dem Vorhergehenden $S = \frac{1}{2}Q$ die kleinste Kraft ausdrückt, welche dasselbe ganz über diese Horizontale erhebt.

Da also für $S = \frac{3}{8}Q$ der Endpunkt B in die Horizontale durch A zu liegen kömmt, so kann man bei B eine Unterstützung anbringen (Fig. 177), und dieselbe erleidet dann einen vertikalen Druck gleich $\frac{3}{8}Q$. Setzt man dies für S in (1) und (2), so ergeben sich für die Curve des so unterstützten Bleches die Gleichungen:

$$(5) \qquad y = \frac{Q}{48aE}\left[3a^2x^2 - 5ax^3 + 2x^4\right];$$

$$(6) \qquad \varrho = \frac{8aE}{(a-x)(a-4x)Q}.$$

Um die größte Ordinate, also den tiefsten Punkt der Curve zu finden, muß derjenige Werth von x gesucht werden, der den Ausdruck (5) zu einem Maximum macht. Man bilde also die Ableitung dieses Ausdruckes nach x und vergleiche dieselbe mit Null, so entsteht

$x^2 - \frac{15}{8}ax + \frac{3}{4}a^2 = 0$; also $x = \frac{1}{16}(15 \pm \sqrt{33})a$.

Hiebei kann aber nur das untere Zeichen gelten, da offenbar $x < a$ sein muß, und demnach ist $x = \frac{1}{16}(15 - \sqrt{33})a = 0{,}5785a$, so daß also die größte Ordinate nur wenig von

der Mitte des Bleches entfernt nach B zu liegt. Ihre Größe erhält man durch Substitution des gefundenen Werthes von x in (5), nämlich $y = 0{,}26\,\frac{a^3 Q}{48 E}$, während man für $x = \frac{1}{2}a$ nach derselben Gleichung $y = 0{,}25\,\frac{a^3 Q}{48 E}$ findet.

Übrigens ist in dem vorliegenden Falle ein Viertheil des Bleches nach unten concav, drei Viertheile desselben aber convex gekrümmt; denn für $x = \frac{1}{4}a$ ergiebt sich nach (6) $\varrho = \infty$, und demnach liegt der Wendepunkt der Curve auf dem vierten Theil ihrer Länge vom Befestigungspunkte entfernt.

Nach dem Obigen liegen für $S > \frac{1}{2}Q$ alle Punkte des elast. Bleches ganz oberhalb der durch den Befestigungspunkt gezogenen Horizontallinie AB'; die zugehörigen Ordinaten und Krümmungshalbmesser sind daher durchgängig negativ. Will man diesen Fall, der in Fig. 176 durch AB_2 dargestellt ist, als einen besondern für sich betrachten und demgemäß die Werthe von y und ϱ positiv nehmen, so braucht man nur in den ersten zwei Gleichungen dieses Paragraphen alle Vorzeichen umzukehren, wonach man erhält:

$$(7)\quad y = \frac{1}{24aE}\left[6a^2(2S-Q)x^2 - 4a(S-Q)x^3 - Qx^4\right];$$

$$(8)\quad \varrho = \frac{2aE}{(a-x)\left[a(2S-Q)+Qx\right]}.$$

Die weiteren Folgerungen, wozu diese Gleichungen Anlaß geben, bleiben dem Leser anheim gestellt. Dagegen mag hier noch des besondern Falles gedacht werden, wo das mit dem einen Ende befestigte Blech außer seinem eignen Gewichte Q noch durch ein am andern Ende aufgehängtes Gewicht S belastet ist (Fig. 178). Die diesem Falle entsprechenden Gleichungen ergeben sich aus (1) und (2), indem man darin

das Vorzeichen von S in das entgegengeſetzte verwandelt. Alsdann entſteht:

$$(9)\quad y = \frac{1}{24aE}\left[6a^2(Q+2S)x^2 - 4a(Q+S)x^3 + Qx^4\right];$$

$$(10)\quad \varrho = \frac{2aE}{(a-x)\,(a(Q+2S)-Qx)}.$$

Die erſte Gleichung giebt für $x = a$ die größte Ordinate oder die Senkung $BB' = \delta$ des mit dem Gewichte S belaſteten Endpunktes, während die zweite für $x = 0$ den kleinſten Krümmungshalbmeſſer, den des Befeſtigungspunktes A, liefert; nämlich

$$(11)\quad \delta = \frac{a^3(3Q+8S)}{24E};\quad \varrho = \frac{2E}{a(Q+2S)}.$$

Nimmt man den beſondern Fall an, das elaſt. Blech ſei ganz gewichtslos und nur an ſeinem freien Ende mit dem Gewichte S beſchwert, ſo iſt $Q = 0$ zu ſetzen; alsdann ergiebt ſich, indem man die dieſer Annahme entſprechenden Werthe mit δ_1 und ϱ_1 bezeichnet

$$\delta_1 = \frac{a^3S}{3E};\quad \varrho_1 = \frac{E}{aS}.$$

Wenn dagegen angenommen wird, das Blech werde ohne anderweitige Belaſtung bloß durch ſein eignes Gewicht herab gebogen, ſo iſt $S = 0$ zu ſetzen, und es entſteht:

$$\delta_2 = \frac{a^3Q}{8E};\quad \varrho_2 = \frac{2E}{aQ}.$$

Vergleicht man dieſe Ausdrücke unter der Vorausſetzung, daß $Q = S$ iſt, ſo ergiebt ſich $\delta_1 = \frac{8}{3}\delta_2$ und $\varrho_1 = \frac{1}{2}\varrho_2$. D. h. wenn ein gewichtsloſes Blech durch ein an ſeinem freien Ende aufgehängtes Gewicht beſchwert wird, dann iſt die größte Senkung $2\frac{2}{3}$ mal ſo groß, die Krümmung im Befeſtigungspunkte aber doppelt ſo ſtark, als wenn jenes Gewicht über die ganze Länge des Bleches gleichmäßig vertheilt wird. Daher bewirkt das eigene Gewicht des elaſt. Bleches dieſelbe

Krümmung im Befeſtigungspunkte, als wenn die Hälfte dieſes Gewichts als eine lothrechte Kraft im freien Endpunkte vereinigt gedacht wird.

§. 236.

Curve eines elaſtiſchen Bleches, das an beiden Enden unterſtützt iſt. Die krumme Linie **DACBE** (Fig. 179) ſtelle ein elaſt. Blech vor, welches in horizontaler Lage bei **A** und **B** auf Unterſtützungen ruht, in der Mitte **C** zwiſchen dieſen Punkten durch ein gegebenes Gewicht **P**, und an beiden Enden, welche um gleichen Längen (**AD=BE**) über die Unterſtützungen wegreichen, durch die gleichen Gewichte **R**, **R** belaſtet iſt. Es ſoll die Gleichung der Curve, welche durch dieſe Gewichte ſo wie durch eine über die ganze Länge **DACBE** gleichmäßig vertheilte Laſt erzeugt wird, hergeleitet werden.

Den gemachten Vorausſetzungen entſprechend ſetze man die Abſtände $C'D' = C'E' = a$, $C'A = C'B = b$ und bezeichne die über jede der Hälften **CAD**, **CBE** gleichmäßig vertheilte Laſt mit **Q**. Offenbar erleiden im vorliegenden Falle die Unterſtützungen **A** und **B** gleiche Preſſungen, welche ſich durch $S = \frac{1}{2}P + Q + R$ ausdrücken laſſen, und eben ſo erhellet leicht, daß **C** der tiefſte Punkt der Curve iſt, deſſen Tangente alſo eine horizontale Lage hat. Bekanntlich wird nun das Gleichgewicht im ganzen Bleche nicht geſtört, wenn man den Theil **CBE** deſſelben unwandelbar befeſtigt denkt und dann verhält ſich der andere Theil **CAD** wie ein für ſich beſtehendes Blech vom Gewichte **Q**, welches bei **C** horizontal eingeklemmt und durch eine bei **A** angebrachte Kraft **S** aufwärts gebogen wird.

Dies vorausgeſetzt, ſo ergiebt ſich die Gleichung der Curve **CA**, wenn die durch **C** gezogene horizontale Tangente zur Abſciſſenachſe genommen wird, unmittelbar nach

§. 234 (I), indem man für U und V die entſprechenden Werthe einſetzt. Dieſelben ergeben ſich wie folgt:

$$U = Q + R - S, \quad V = \tfrac{1}{2}aQ + aR - bS,$$

und nach Einſetzung des obigen Werthes von S:

$$U = -\tfrac{1}{2}P; \quad V = -\tfrac{1}{2}bP - \tfrac{1}{2}(2b-a)Q + (a-b)R.$$

Demnach iſt nun die verlangte Gleichung

$$y = \frac{1}{24aE}\left[\begin{matrix} -6a[bP + (2b-a)Q - 2(a-b)R]x^2 \\ +2aPx^3 + Qx^4 \end{matrix}\right].$$

Es ſpringt in die Augen, daß in dem vorliegenden Falle alle Punkte der Curve oberhalb der Abſciſſenachſe CA′ liegen, ihre Ordinaten daher negativ ausfallen müſſen, da in §. 234 bei Herleitung der Curven-Gleichung das Gegentheil von dieſem angenommen wurde. Um dieſen Umſtand von vorn herein zu erledigen, kann man in der obigen Gleichung die Vorzeichen auf der rechten Seite in die entgegengeſetzten verwandeln, wonach man erhält

$$\text{(I)} \quad y = \frac{1}{24aE}\left[\begin{matrix} 6a[bP + (2b-a)Q - 2(a-b)R]x^2 \\ -2aPx^3 - Qx^4 \end{matrix}\right].$$

Setzt man hierin $x = b$, ſo ergiebt ſich die Ordinate AA′, welche der Senkung CC′ der Mitte des Bleches gleich iſt. Bezeichnet man letztere mit δ, ſo entſteht:

$$\text{(II)} \quad \delta = \frac{b^2}{24aE}\left[\begin{matrix} 4abP + (12ab - 6a^2 - b^2)Q \\ -12a(a-b)R \end{matrix}\right].$$

Auf gleiche Weiſe findet man für den Krümmungshalbmeſſer des zu den Coordinaten x, y gehörigen Curvenpunktes den Ausdruck

$$\text{(III)} \quad \varrho = \frac{2aE}{a[bP + (2b-a)Q - 2(a-b)R] - aPx - Qx^2}.$$

Derſelbe liefert für $x = o$ und für $x = b$ die Krümmungshalbmeſſer des Mittelpunktes C und der Unterſtützungspunkte A, B, welche bezüglich ϱ' und ϱ'' heißen mögen. Es entſteht:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \varrho' = \dfrac{2E}{bP+(2b-a)Q-2(a-b)R}; \\ \varrho'' = \dfrac{-2aE}{(a-b)[(a-b)Q+2aR]}. \end{cases}$$

Giebt der erste von diesen Ausdrücken einen positiven Werth für ϱ', so ist das ein Zeichen, daß das Blech bei C concav aufwärts gekrümmt ist; doch kann auch das Gegentheil hievon stattfinden, was von dem Verhältnisse zwischen a und b abhängt. Dagegen liefert der zweite Ausdruck für ϱ'' stets negative Werthe, woraus man sieht, daß die hohle Seite der Krümmungen in den Unterstützungspunkten allemal abwärts gekehrt ist.

Verlangt man den Winkel zu kennen, den die gerade Berührungslinie an dem beliebigen Curvenpunkte x, y mit der Abscissenachse CA', oder mit der ihr parallelen Linie AB bildet, so muß man die erste Ableitung der obigen Curvengleichung bilden, welche nach Anh. IV, Nr. 34 der trigonometrischen Tangente jenes Winkels gleich ist. Dadurch findet man

$$\text{(V)} \quad \operatorname{Tg}\varphi = \frac{1}{12aE}\begin{bmatrix} 6a(bP+(2b-a)Q-2(a-b)R)x \\ -3aPx^2-2Qx^3 \end{bmatrix}.$$

Bezeichnet α den Winkel, den die Berührungslinie der Curve in den Unterstützungspunkten mit der Horizontalen AB bildet, so geht φ in α über, sobald man $x = b$ setzt. Also hat man

$$\text{(VI)} \quad \operatorname{Tang}\alpha = \frac{1}{12aE}\begin{bmatrix} 3abP+2(6ab-3a^2-b^2)Q \\ -12a(a-b)R \end{bmatrix}.$$

§. 237.

Anwendung vorstehender Formeln auf besondere Fälle. Wir wollen hier zunächst den besondern Fall betrachten, wo an den äußersten Enden des Bleches keine Kräfte wirken, das Blech also nur durch seine eigne Schwere

und durch das in der Mitte zwischen den Unterstützungen aufgehängte Gewicht P gebogen wird. Hierfür ergeben sich die entsprechenden Gleichungen, indem man in den ersten vier Formeln des vor. §. die Größe R gleich Null setzt; nämlich

$$\text{(I)}\quad y = \frac{1}{24aE}\Big[6a(bP+(2b-a)Q)x^2-2aPx^3-Qx^4\Big].$$

$$\text{(II)}\quad \delta = \frac{b^2}{24aE}\Big[4abP+(12ab-6a^2-b^2)Q\Big].$$

$$\text{(III)}\quad \varrho = \frac{2aE}{a(bP+(2b-a)Q)-aPx-Qx^2}.$$

$$\text{(IV)}\quad \varrho' = \frac{2E}{bP+(2b-a)Q};\ \varrho'' = \frac{-2aE}{(a-b)^2Q}.$$

In diesen Formeln bedeuten a die halbe Länge, Q das halbe Gewicht des Bleches und b die Entfernung der Unterstützungen von der mit dem Gewicht P belasteten Mitte desselben.

Mit Hinsicht auf die praktische Anwendung verdienen hier zwei verschiedene Fälle eine besondere Betrachtung.

A. Eine kleine Ueberlegung läßt sofort ersehen, daß der zwischen den Unterstützungen befindliche Theil **ACB** des elast. Bleches entweder unterhalb oder oberhalb der horizontalen Linie **AB** zu liegen kommen wird, jenachdem die Unterlagen **A** und **B** weiter nach den Enden oder weiter nach der Mitte zu gerückt werden. Der erste Fall ist in Fig. 179, der zweite in Fig. 180 angenommen; in dem einen kehrt die in der Mitte **C** stattfindende Krümmung ihre hohle Seite aufwärts, in dem andern dagegen abwärts. Es soll nun bestimmt werden, in welcher Entfernung b von der Mitte die Unterlagen angebracht werden müssen, damit die Punkte **A**, **C** und **B** in einer geraden Linie zu liegen kommen.

Zur Beantwortung dieser Frage muß der durch die Formel (II) gegebene Werth von δ gleich Null gesetzt und aus

der so entstandenen Gleichung der fragliche Abstand b entwickelt werden. Man findet dann:

$$(1)\quad b = \frac{a}{Q}\left[2(P+3Q) - \sqrt{4P^2+24PQ+30Q^2}\right].$$

Nach diesem Werthe von b würde sich nun mit Hülfe der Formel (IV) der Krümmungshalbmesser für die in der Horizontalen AB liegende Mitte des Bleches bestimmen lassen, und jenachdem für denselben ein positiver oder negativer Werth entsteht, ist die Höhlung dieser Krümmung auf- oder abwärts gekehrt. Denjenigen Werth von b, der einen unendlich großen Krümmungshalbmesser giebt, wofür also in C ein geradliniges Element stattfindet, erhält man nach Formel (IV), indem man den Nenner $bP+(2b-a)Q$ gleich Null setzt; nämlich:

$$(2)\quad b = \frac{aQ}{P+2Q}.$$

Setzt man in den so eben gefundenen Ausdrücken $P=0$, was also der Annahme entspricht, daß das Blech nur durch seine eigene Schwere, ohne anderweitige Belastung, gebogen wird, so kommt nach einander:

$$(3)\quad b = (6-\sqrt{30})a = 0{,}5228\cdot a;$$

$$(4)\quad b = \tfrac{1}{2}a = 0{,}5\cdot a.$$

Der erste von diesen Werthen bedingt also, daß die Mitte des Bleches mit den Unterstützungspunkten in einer geraden Linie liegt, während der zweite einen unendlich großen Krümmungshalbm. für die Mitte zur Folge hat. Um zu bestimmen, ob letzteres oberhalb oder unterhalb der Horizontalen AB der Fall ist, muß man in Formel (II), nachdem darin $P=0$ gesetzt worden, für b den zugehörigen Werth $\frac{1}{2}a$ einsetzen, wodurch man $\delta = \frac{-a^3Q}{384E}$ findet. Aus dem Vorzeichen dieses Ausdrucks schließen wir nun, daß die Mitte des Bleches in dem Augenblick, wo sein Krümmungshalbmesser un-

endlich ist, sich **oberhalb** der durch die Stützpunkte gehenden Horizontallinie befindet. Liegt sie also gemäß (3) in dieser Linie selbst, so findet in ihr eine abwärts convexe Krümmung statt.

Anmerk. Vorstehendes findet Anwendung bei der Vergleichung von Längenmaaßen, die gewöhnlich auf der oberen Seite eines prismatischen Stabes aus Eisen oder Stahl durch zwei parallele Striche so abgetragen werden, daß deren Entfernung von einander das fragliche Maaß richtig angiebt. Letzteres ist aber nur dann der Fall, wenn der Stab seiner ganzen Länge nach auf einer horizontalen Ebene liegt, wohingegen bei der Unterstützung des Stabes bloß an den Endpunkten eine Senkung seiner Mitte und in Folge dessen eine Verkürzung des abgetragenen Maaßes entstehen würde. Bessel hat gefunden, daß diese Verkürzung bei der eisernen Toise, deren er sich zur Festsetzung des Preußischen Längenmaaßes bediente, 0,051 Linien betragen würde, wollte man bei ihr eine solche unzweckmäßige Unterstützung in Anwendung bringen; dagegen soll die kleinste Verkürzung entstehen, wenn man die Unterstützungen der Toise auf 0,2203 ihrer ganzen Länge von den Endpunkten entfernt anbringt. Nach Baily findet bei jedem Maaßstabe die normale Auflegungsart auf zwei Punkten statt, die um den vierten Theil der ganzen Länge des Stabes von seinen Endpunkten entfernt sind, was also der Voraussetzung eines geradlinigen Elements in der Mitte desselben entsprechen würde.

B. Wenn die Unterstützungen des Bleches bis an die äußersten Endpunkte desselben gerückt werden, welcher Fall in Fig. 181 dargestellt ist, so muß man dem entsprechend in den obigen Gleichungen $b = a$ setzen. Mit Beibehaltung der übrigen Bezeichnung ergiebt sich dann:

$$(1)\quad y = \frac{1}{24aE}\left[6a^2(P+Q)x^2 - 2aPx^3 - Qx^4\right].$$

$$(2)\quad \delta = \frac{a^3}{24E}\left(4P+5Q\right).$$

$$(3)\quad \varrho = \frac{2aE}{a^2(P+Q) - aPx - Qx^2}.$$

$$(4)\quad \varrho' = \frac{2E}{a(P+Q)};\quad \varrho'' = \infty.$$

Um diese Formeln für den praktischen Gebrauch geschickter zu machen, wollen wir die horizontale Entfernung **AB** der Unterstützungen mit l, und die über diese Länge gleich-

mäßig vertheilte Laſt mit W bezeichnen; alsdann iſt $a = \frac{1}{2}l$; $Q = \frac{1}{2}W$, und es ergiebt ſich:

$$(5) \qquad y = \frac{1}{48EI}\left[3l^2(2P+W)x^2 - 4lPx^3 - 2Wx^4\right].$$

$$(6) \qquad \varrho = \frac{8EI}{l^2(2P+W) - 4Plx - 4Wx^2}.$$

$$(7) \qquad \delta = \frac{l^3(8P+5W)}{384E}; \quad \varrho' = \frac{8E}{l(2P+W)}.$$

Denkt man ſich die Belaſtung bei C beſeitigt, ſo daß alſo das Blech durch ſeine eigene Schwere gebogen wird, dann geben die obigen Formeln, indem man darin $P = 0$ ſetzt:

$$(8) \qquad \begin{cases} y = \frac{W}{48EI}\left(3l^2x^2 - 2x^4\right). \\ \delta = \frac{5l^3W}{384E}; \quad \varrho' = \frac{8E}{lW}. \end{cases}$$

Wenn dagegen $W = 0$ geſetzt, d. h. wenn angenommen wird, das Blech ſei gewichtslos und werde bloß durch die in ſeiner Mitte aufgehängte Laſt P gebogen, ſo entſteht:

$$(9) \qquad \begin{cases} y = \frac{P}{24E}\left(3lx^2 - 2x^3\right). \\ \delta = \frac{l^3P}{48E}; \quad \varrho' = \frac{4E}{lP}. \end{cases}$$

Eine Vergleichung der Werthe von δ und ϱ' für beide Fälle unter der Vorausſetzung $P = W$ ergiebt leicht, daß die Senkung der Mitte eines elaſtiſchen Stabes, über deſſen Länge eine Laſt gleichmäßig vertheilt iſt, nur $\frac{5}{8}$ der Senkung beträgt, welche dieſelbe Laſt hervorbringt, wenn ſie in der Mitte vereinigt gedacht wird. Die Krümmung der Mitte iſt im erſten Falle nur halb ſo ſtark als im zweiten Falle.

Schließlich iſt noch zu bemerken, daß die oben für δ gefundenen Formeln dazu benutzt werden können, die relative Elaſticität für prismatiſche feſte Körper verſchiedener Art durch Verſuche zu beſtimmen. Denkt man ſich nämlich einen ſolchen

Körper mit beiden Enden horizontal auf Unterſtützungen gelegt, und die in der Mitte deſſelben durch verſchiedene Belaſtungen hervorgebrachten Senkungen beobachtet, ſo läßt ſich die Conſtante E durch folgende Formel berechnen:

$$(10) \qquad E = \frac{l^3(8P + 5W)}{384\delta}.$$

Dieſer Ausdruck findet eine vielfache Anwendung in der Praxis; indeß gehört die weitere Ausführung nicht hieher.

§. 238.

Gleichungen eines elaſt. Bleches, das mit beiden Enden horizontal eingeklemmt iſt. Bei dem in §. 236 betrachteten Bleche haben die an den Endpunkten deſſelben angebrachten Kräfte R, R offenbar das Beſtreben, die Stücke AD und BE, welche über die Unterſtützungen vorragen, weiter herab zu drücken, was augenſcheinlich eine Erhebung des Theiles ACB zur Folge haben würde. Wir wollen uns dieſe Kräfte ſo groß denken, daß ſie jene vorragende Enden bis unter die Horizontale herabbiegen, aber nicht weiter, als bis beide Blechhälften CAD und CBE die Horizontale D'E' in A und B berühren, wie ſolches in Fig. 182 beſonders dargeſtellt iſt.

Die dieſer Bedingung entſprechende Größe von R findet man, indem man den Ausdruck (VI) des §. 236 gleich Null ſetzt, woraus ſich ergiebt

$$(1) \qquad R = \frac{3abP + 2(6ab - 3a^2 - b^2)Q}{12a(a-b)}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth von R in den Gleichungen des angezogenen §., ſo ergeben ſich folgende Formeln:

$$(2) \qquad y = \frac{1}{24aE}\left[b(3aP - 2bQ)x^2 - 2aPx^3 - Qx^4\right].$$

$$(3) \qquad \delta = \frac{b^3(aP + bQ)}{24aE}.$$

$$(4) \qquad \varrho = \frac{12aE}{b(3aP+2bQ)-6aPx-6Qx^2}.$$

$$(5) \qquad \varrho' = \frac{12aE}{b(3aP+2bQ)}; \quad \varrho'' = \frac{-12aE}{b(3aP+4bQ)}.$$

Der hier betrachtete besondere Fall kömmt in der Praxis vor, wenn ein horizontal liegender Balken mit beiden Enden unwandelbar befestigt ist, wie solches die Fig. 183 näher ersehen läßt. Die Einklemmung der Enden AD und BE muß aber in allen Punkten derselben so stark sein, daß von A bis D und von B bis E keine Biegungen stattfinden können. Unter dieser Voraussetzung kann man die Enden AD und BE als tangentiale, dabei aber unbiegsame, Fortsetzungen der Curve ACB betrachten, welche durch die an ihren äußersten Endpunkten wirksamen Kräfte R, R in horizontaler Lage erhalten werden.

In Bezug auf solche Balken ist es für den praktischen Gebrauch am bequemsten, statt der mit a bezeichneten Länge der gleichen Abstände C'D = C'E, und der darüber vertheilt angenommenen Last Q, die freiliegende Länge AB des Balkens und die gleichmäßige Belastung derselben in Rechnung zu bringen. Bezeichnet man erstere mit l, letztere mit W, so ist $b = \frac{1}{2}l$ und $Q = \frac{aW}{l}$; und wenn dies in den vorigen Formeln eingesetzt wird, entsteht:

$$(6) \qquad y = \frac{1}{48lE}\left[l^2(3P+W)x^2 - 4Plx^3 - 2Wx^4\right].$$

$$(7) \qquad \delta = \frac{l^3(P+\frac{1}{4}W)}{192 \cdot E} = \frac{l^3(2P+W)}{384E}.$$

$$(8) \qquad \varrho' = \frac{24E}{l(3P+W)}; \quad \varrho'' = \frac{-24E}{l(3P+2W)}.$$

Eine Vergleichung der beiden letzten Formeln läßt ersehen, daß in den Befestigungspunkten bei A und B stärkere Krümmungen stattfinden, als in der Mitte C des Balkens,

da, abgeſehen von den Vorzeichen, $\varrho'' < \varrho'$ iſt. Dies iſt um ſo mehr der Fall, je kleiner P im Vergleich zu W angenommen wird, wogegen für $W = 0$ die abſoluten Werthe beider Krümmungshalbmeſſer gleich ausfallen.

Setzt man $P = 0$, ſo verwandeln ſich die obigen Gleichungen in folgende:

$$(9) \qquad y = \frac{W}{48lE}\left(l^2x^2 - 2x^4\right).$$

$$(10) \qquad \delta = \frac{l^3 W}{384E};\ \varrho' = \frac{24E}{lW};\ \varrho'' = \frac{-12E}{lW}.$$

Dieſe Reſultate entſprechen alſo dem Falle, wo der mit ſeinen beiden Enden eingeklemmte Balken nur durch ſeine eigne Schwere, oder durch eine über die freiliegende Länge gleichmäßig vertheilte Laſt W gebogen wird, und in dieſem Falle erleidet er in den Befeſtigungspunkten doppelt ſo ſtarke Krümmungen, als in der Mitte zwiſchen den genannten Punkten.

Setzt man dagegen den Balken als gewichtslos und nur in der Mitte mit dem daſelbſt aufgehängten Gewichte P belaſtet voraus, ſo geben die allgemeinen Formeln für $W = 0$:

$$(11) \qquad y = \frac{P}{48E}\left(3x^2 - 4x^3\right).$$

$$(12) \qquad \delta = \frac{Pl^3}{192E};\ \varrho' = \frac{8E}{lP};\ \varrho'' = -\frac{8E}{lP}.$$

Wenn alſo ein gewichtsloſer Balken, der mit beiden Enden unwandelbar befeſtigt iſt, durch eine in ſeiner Mitte aufgehängte Laſt beſchwert wird, ſo finden in den Befeſtigungspunkten an den Enden gleiche Krümmungen wie in der Mitte ſtatt, nur daß die einen in Bezug auf die andern entgegengeſetzten Sinnes ſind.

§. 239.

Vergleichung vorſtehender Reſultate in Bezug auf ihre praktiſche Anwendung. Bei der Unterſuchung der Feſtigkeit horizontaler Balken, die zum Tragen

schwerer Lasten bestimmt sind, kömmt in jedem besondern Falle nicht bloß die Größe der Senkung in der Mitte des Balkens, sondern vornehmlich der kleinste Werth des Krümmungshalbmessers in Betracht. Denn es erhellet leicht, daß unter übrigens gleichen Umständen die Gefahr des Zerbrechens an irgend einer Stelle des Balkens desto mehr zunimmt, je stärker die Krümmung an dieser Stelle ist, und daher bestimmt der kleinste Krümmungshalbmesser allemal die schwächste Stelle, welche demnach bei der Beurtheilung der Festigkeit eben so, wie die Senkung der Mitte für die Steifheit des Balkens, maaßgebend ist. Mit Hinsicht auf die praktische Anwendung sind nun hier folgende drei Fälle zu unterscheiden, die wir schließlich noch einer vergleichenden Betrachtung unterwerfen wollen:

1) Ein Balken von gegebener Länge l ist in horizontaler Lage an beiden Enden frei unterstützt und durch ein, über seine ganze Länge gleichmäßig vertheiltes, Gewicht W belastet; oder

2) der eben so belastete Balken ist bei derselben Länge mit dem einen Ende unwandelbar befestigt (horizontal eingeklemmt), am andern Ende aber durch eine Unterlage frei unterstützt; oder endlich

3) der Balken ist mit beiden Enden unwandelbar befestigt, während alle übrigen Umstände dieselben bleiben.

Die diesen Voraussetzungen entsprechenden Senkungen der Mitte sollen bezüglich mit δ_1, δ_2, δ_3, und die kleinsten Werthe der Krümmungshalbmesser mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnet werden.

Der erste Fall ist in §. 237 mit Hinblick auf Fig. 181 untersucht worden, und es haben sich für denselben die Formeln ergeben:

$$\delta_1 = \frac{5 l^3 W}{384 \cdot E}; \quad \varrho_1 = \frac{8 E}{l W}.$$

wobei zu bemerken iſt, daß in dieſem Falle die ſtärkſte Krümmung, alſo die ſchwächſte Stelle des Balkens, in der Mitte deſſelben ſtattfindet.

Der zweite Fall wurde in §. 235 betrachtet. Für denſelben ergiebt ſich der kleinſte Krümmungshalbmeſſer, nicht in der Mitte des Balkens, ſondern an dem befeſtigten Ende bei A (Fig. 177), wo er nur halb ſo groß als in der Mitte iſt; an jenem Ende findet alſo die ſchwächſte Stelle ſtatt. Es iſt nun, wenn l die Länge AB, und W das über dieſe Länge gleichmäßig vertheilte Gewicht bezeichnet,

$$\delta_2 = \frac{2l^3 W}{384 E}; \quad \varrho_2 = \frac{8E}{lW}.$$

Eben ſo wurde in §. 238 für den dritten Fall gefunden, daß in den befeſtigten Endpunkten A und B (Fig. 183) die kleinſten Krümmungshalbmeſſer ſtattfinden, da ſie hier nur halb ſo groß als in der Mitte des Balkens ſind. Für dieſen Fall hat man

$$\delta_3 = \frac{l^3 W}{384 E}; \quad \varrho_3 = \frac{12E}{lW}.$$

Vergleicht man zunächſt die Werthe von δ unter der Vorausſetzung, daß in allen drei Fällen gleiche Belaſtungen W auf den Balken ruhen, ſo ergiebt ſich

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 5 : 2 : 1.$$

Unter übrigens gleichen Umſtänden iſt demnach die Senkung der Mitte bei einem an beiden Enden frei unterſtützten Balken fünfmal, bei einem Balken aber, der an einem Ende befeſtigt und am andern frei unterſtützt iſt, nur zweimal ſo groß, als bei einem Balken, deſſen beide Enden unwandelbar befeſtigt ſind.

Wenn alſo ein horizontal liegender Balken, der an drei gleich weit von einander entfernt liegenden Punkten A, B und C (Fig. 184) frei unterſtützt iſt, auf dem mittleren Stützpunkte B durchſchnitten wird, ſo ſenkt ſich die Mitte

einer jeden Hälfte $2\frac{1}{2}$ mal so tief herab als vorhin, da der Balken aus einem einzigen Stücke bestand.

Anmerk. In §. 72 wurde zu 1) die Bemerkung gemacht, daß bei einem unbiegsamen, mit Gewichten beschwerten Stabe, der an mehr als zwei Punkten unterstützt ist, die Pressungen auf die Stützpunkte nicht mehr bestimmt werden könnten. Diese Vertheilung des Druckes ist aber bei elastischen Balken keine unbestimmte Aufgabe, kann vielmehr für beliebig viele Unterstützungspunkte gelöst werden, wie zuerst von Eytelwein gezeigt worden ist. Bei dem in Fig. 184 dargestellten Falle beträgt z. B. der Druck auf jede der beiden äußersten Unterlagen A und C (nach §. 235) $\frac{3}{8}$ von der auf AB und BC ruhenden, also $\frac{3}{16}$ von der über die ganze Länge ABC gleichmäßig vertheilten Belastung; folglich ist der Druck auf die mittlere Unterlage B gleich $\frac{10}{16}$ oder $\frac{5}{8}$ der zuletzt genannten Last.

Das Weitere über diesen Gegenstand findet man in Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Band III, Abschn. 7.

Um die Tragfähigkeit eines horizontalen Balkens in den drei Eingangs erwähnten Fällen zu beurtheilen, müssen die Belastungen so bestimmt werden, daß dadurch die Festigkeit jedesmal auf gleiche Weise in Anspruch genommen wird. Zu dem Ende seien bezüglich W_1, W_2 und W_3 die Belastungen, für welche die kleinsten Krümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2, und ϱ_3 gleiche Werthe erhalten; alsdann ergiebt sich die Vergleichung:

$$\frac{8E}{lW_1} = \frac{8E}{lW_2} = \frac{12E}{lW_3};$$

also $$W_2 = W_1 \text{ und } W_3 = \tfrac{3}{2}W_1.$$

Hiernach wird die Tragfähigkeit eines an beiden Enden frei unterstützten Balkens durch die feste Einklemmung eines seiner Enden gar nicht, durch die Befestigung beider Enden aber um die Hälfte erhöht.

Setzt man die gefundenen Werthe von W in den Ausdrücken von δ ein, so hat man

$$\delta_1 = \frac{5l^3W_1}{384E};\quad \delta_2 = \frac{2l^3W_1}{384E};\quad \delta_3 = \frac{\frac{3}{2}l^3W_1}{384E};$$

also $$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 10 : 4 : 3.$$

Es folgt daraus, daß wenn alle drei Balken bis zu gleichen Graden ihrer reſpect. Feſtigkeiten belaſtet ſind, alsdann bei dem an beiden Enden frei unterſtützten Balken die Mitte ſich $2\frac{1}{2}$ mal ſo tief als bei dem an einem Ende befeſtigten, und $3\frac{1}{3}$ mal ſo tief als bei dem an beiden Enden befeſtigten Balken ſenken wird.

Druck von J. Petſch in Berlin.

Druckfehler.

Seite 24, Zeile 14 v. u. statt §. 4 lies §. 6.
" 30 " 1 v. o. " Nr. 9 " Nr. 8.
" — " 6 " " 9ten " 8ten.
" — " 9 " " 10ten " 9ten.
" 31 " 4 v. u. " 1 P Cos x lies 2 P Cos x.
" 38 " 12 v. o. hinter „materiellen" ist Punkt zu ergänzen.
" 50 " 11 " statt Verrichtung lies Vorrichtung.
" 53 " 10 v. u. " A', B', C' " A'B'C'.
" " " A'', B,'' C'' " A''B''C''
" 63 " 8 v. o. " −0,786 " +0,786.
" 67 " 2 v. u. am Ende der Zeile ist die- zu streichen.
" 79 " 2 v. o. statt $\frac{2p}{h^2}$ lies $\frac{2q}{h^2}$.
" — " 3 " " $\frac{2p}{h^2}$ " $\frac{2r}{h^2}$.
" 81 " 8 " " vorigen §. lies 51sten §.
" 83 " 6 " " (5) " (3).
" — " 2 v. u. " Nr. 23 " Nr. 32.
" 88 " 5 v. o. " (1) " (2).
" 95 " 13 " " vorigen §. " 60sten §.
" 96 " 10 " " $\frac{Aa - Bb}{A + B}$ " $\frac{Aa - Bb}{A - B}$.
" — " 9 v. u. " §. 12 " §. 13.
" 98 " 4 v. o. " B lies A.
" 100 " 15 " " Anfangspunkt lies Angriffspunkt.
" — " 17 " " (2) lies (3)
" 103 " 11 v. u. " v', w' lies V', W'.
" 128 " 12 v. o. " Cos φ " Cos ψ.
" 132 " 12 u. 14 v. u. statt Q lies Q'.
" 133 " 15 v. u. statt Q'P' " Q'R'.
" 155 " 6 " " $\Sigma a \cos \alpha'$ lies $\Sigma A \cos \alpha'$.
" 159 " 12 v. o. " Drehang " Drehung.
" 175 " 17 " " der " den.
" 190 " 3 v. u. in „voraussetzen" fehlt das s.
" 194 " 10 " statt $\frac{1}{2} 1 \sin \frac{1}{2} \varphi^2$ lies $2 1 \sin \frac{1}{2} \varphi^2$.

Seite 194 Zeile 16 v. u. statt OM_1 lies O_{m_1}.

" 204 " 7 " " Fig. 51 lies Fig. 71.

" 209 " 5 " " KG " KC.

" 224 " 10 v. o. " AB : AC lies AC : AB.

" 237 " 1 v. u. " $DG + \frac{1}{3}AD$ lies $DG = \frac{1}{3}AD$.

" 247 " 3 " " Abſchnittes " Ausſchnittes.

" 249 " 14 v. o. " ABDC lies ABB'A'.

" 260 " 6 " " HE lies KE.

" 268 " 7 v. u. " $\frac{1}{3}bh\pi$ lies $\frac{1}{3}bh\pi$.

" 276 " 3 v. o. " $\frac{FE}{AE}$ lies $\frac{FE}{AF}$.

" 281 " 10 v. u. fehlt in der Klammer: $+ ac$.

" 284 " 10 " in der Klammer, ſtatt $4b^2$ lies $3b^2$.

" — " 12 " desgl. " $3b^2$ " $4b^2$.

" 289 " 8 v. o. ſtatt x lies z.

" 312 " 4 " vor dem = Zeichen iſt l zu ergänzen.

" 313 " 14 " ſtatt $\frac{ar}{6}$ lies $\frac{ar^2}{6}$.

" 317 " 14 " " gegen der lies gegen den.

" 341 " 9 v. u. " $\frac{1}{3}\pi r^2 hq.r$ lies $\frac{1}{3}\pi r^2 hq.r$.

" 343 " 9 v. o. " GL lies GE.

" 352 " 14 " " BC " BD.

" 362 " 6 " " $\frac{2q}{q}Q$ lies $\frac{2a}{q}Q$.

" 368 " 10 v. u. " Fig. 131 lies Fig. 143.

" 402 " 4 " " enthalten " erhalten.

" 406 " 14 " " BF lies BE.

" 411 " 3 v. o. " P : Q lies Q : P.

" 445 " 16 " " uv lies vw.

" 449 " 3 " " ww' " vw'.

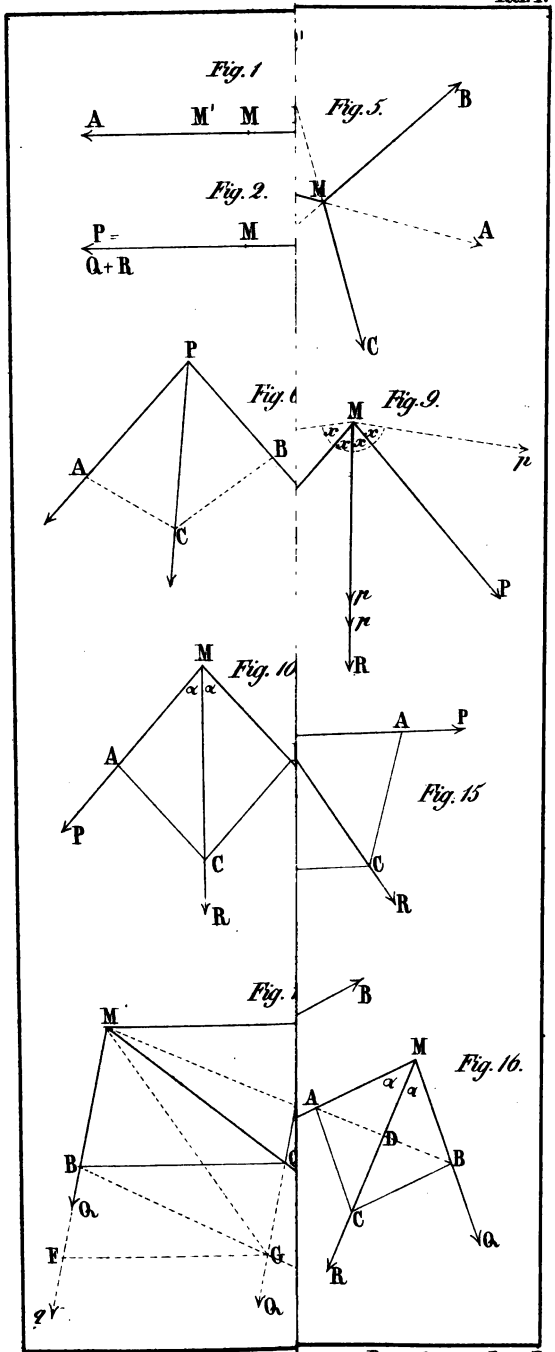


Fig. 1
A
M'
M
Fig. 2.
P =
Q + R
M
Fig. 5.
B
M
A
C
P
Fig. 6
A
B
C
Fig. 9.
M
x
x
x
p
P
p
p
R
M
Fig. 10
α
α
A
P
C
R
A
P
Fig. 15
C
R
Fig.
B
M
B
Q
F
G
q
Q
M
Fig. 16.
α
α
A
D
B
C
Q
R

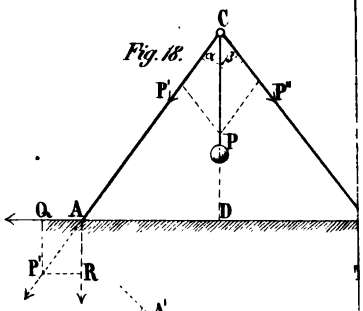


Fig. 18.
C
α
β
P'
P''
P
Q
A
D
P'
R

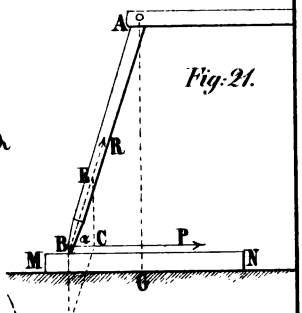


Fig. 21.
A
R
E
Q
B
α
C
P
M
N
Q
D
Q

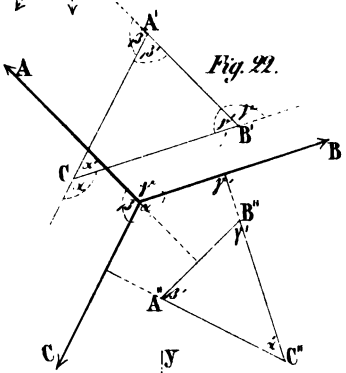


Fig. 22.
A'
A
B'
B
C
B''
A''
C''
C

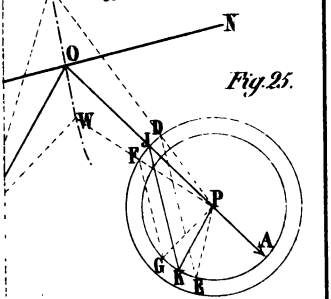


Fig. 25.
V
Q
N
O
W
D
F
P
A
G
K
E

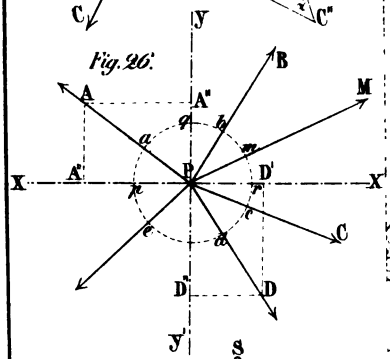


Fig. 26.
y
B
A
A''
M
X
A'
P
D'
X
C
D''
D
y'

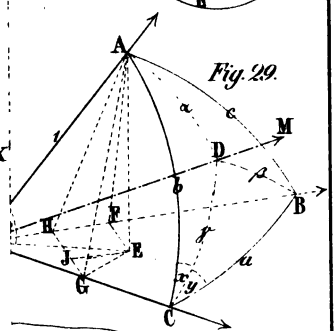


Fig. 29.
A
M
D
B
E
G
C

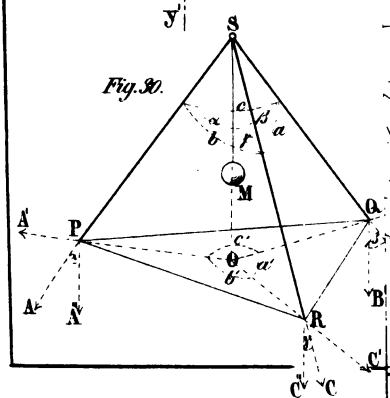
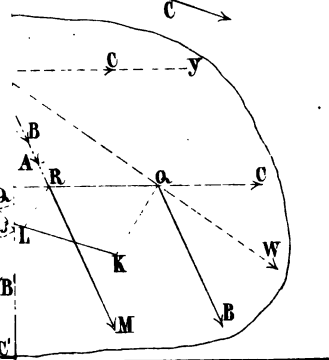


Fig. 30.
S
M
P
Q
A'
A''
R
C''
C


C
y
B
A
R
O
C
L
K
W
M
B
B
C'

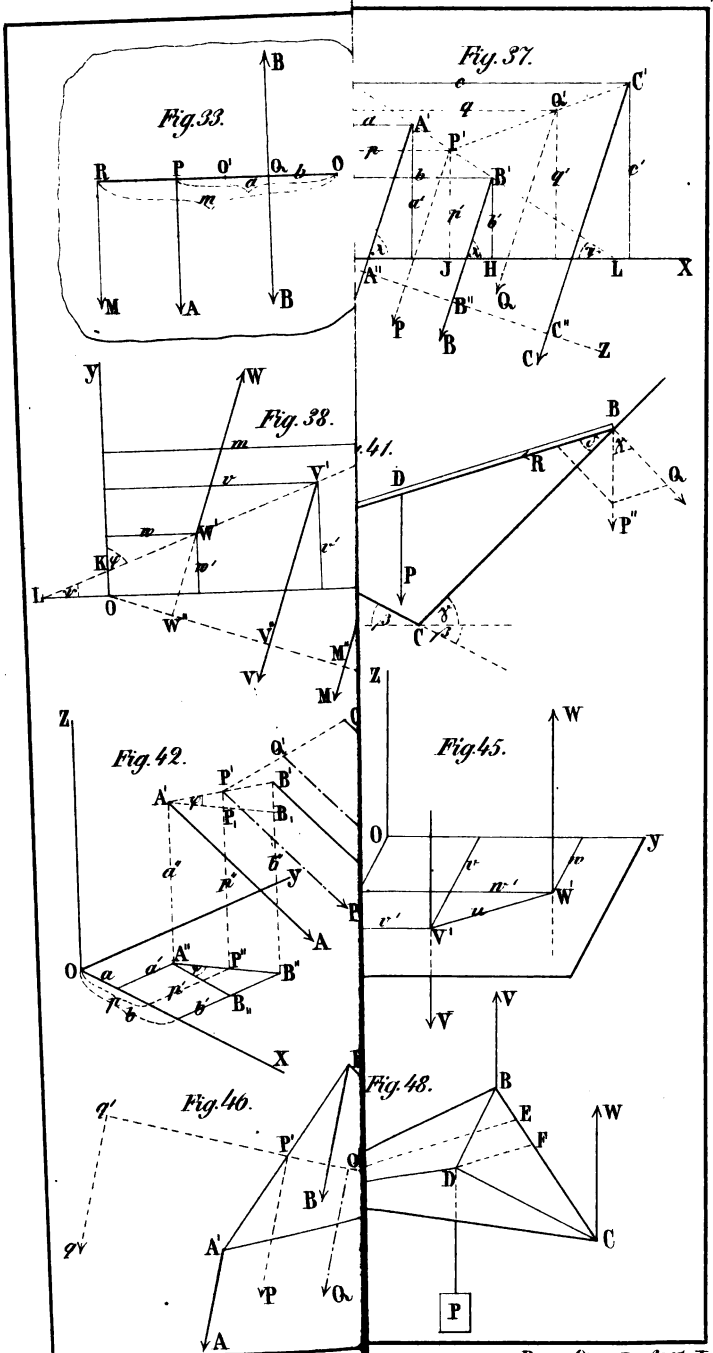


Fig. 33.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 48.

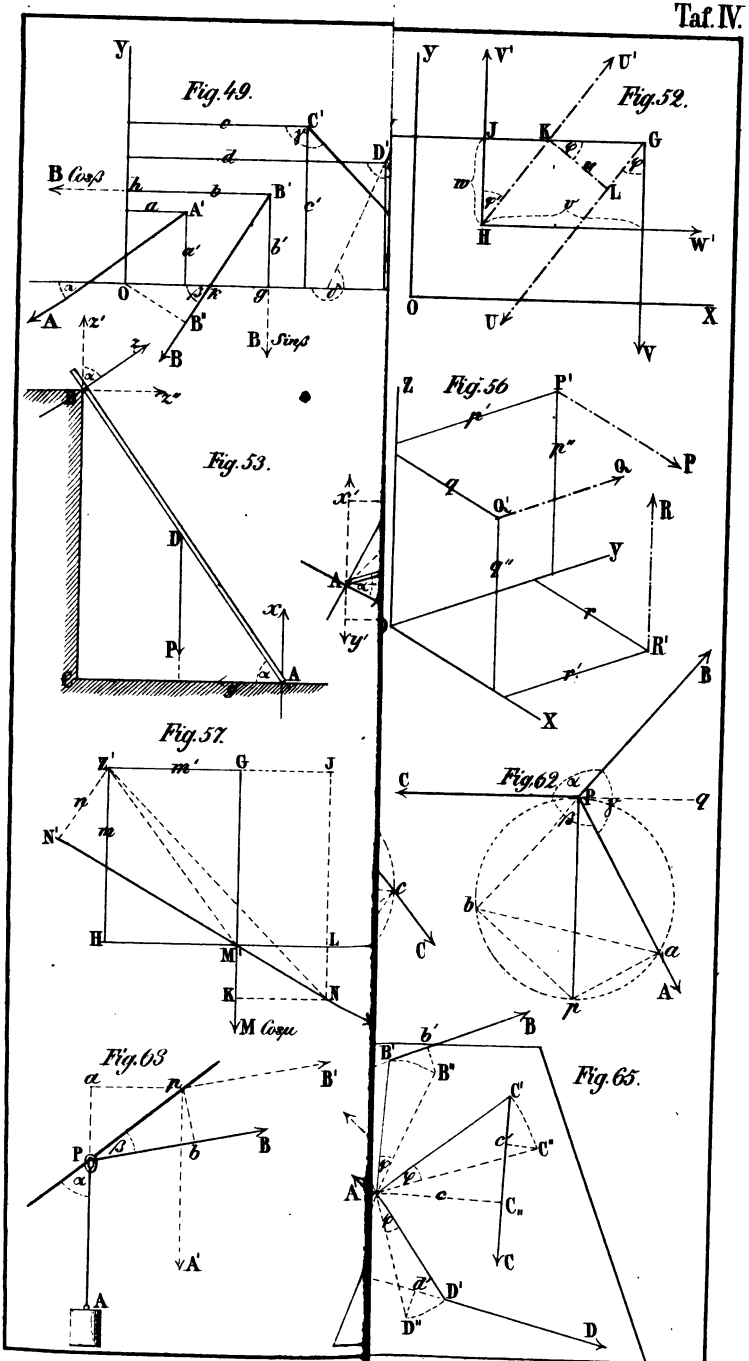
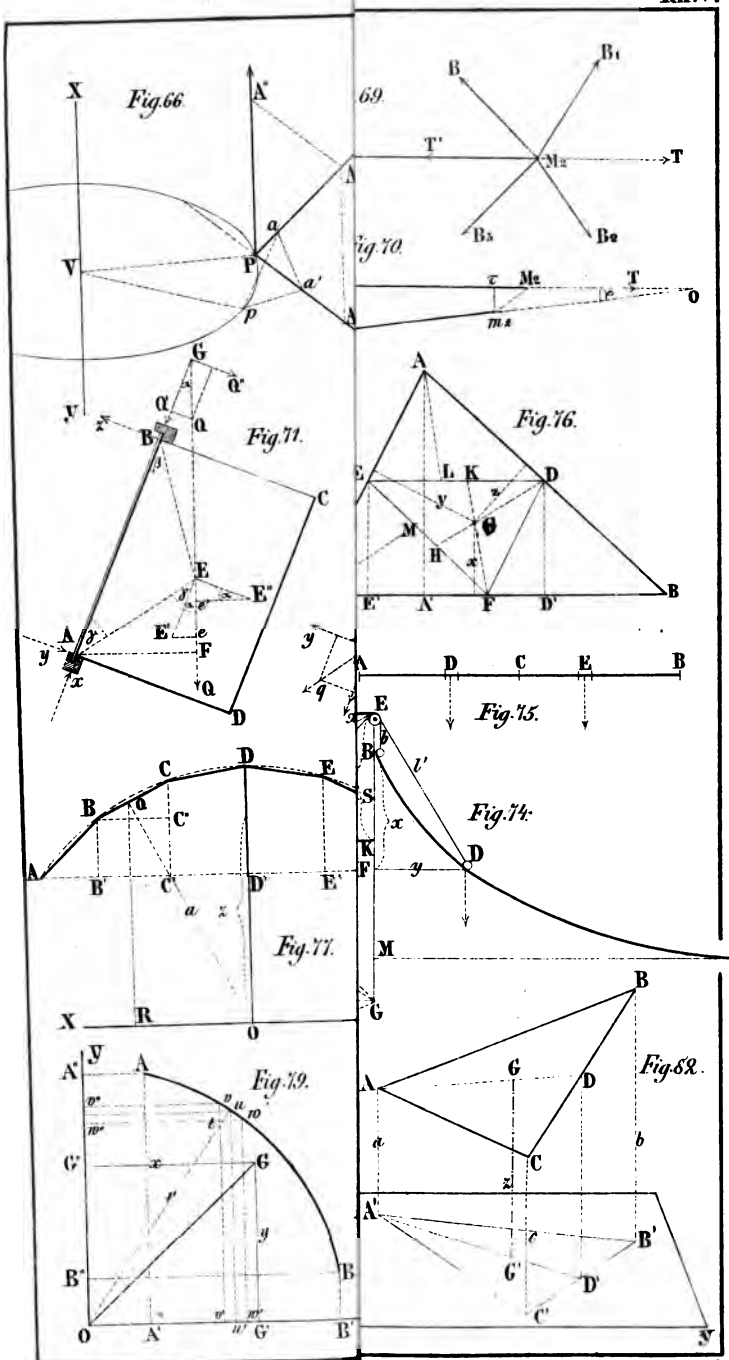


Fig. 49.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 56
Fig. 57.
Fig. 62.
Fig. 63
Fig. 65.



Brix. Statik, Abth. I.

Fig. 83.

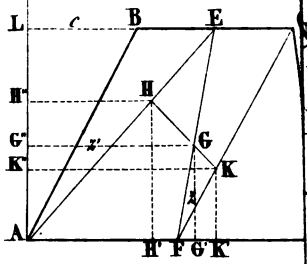


Fig. 86.

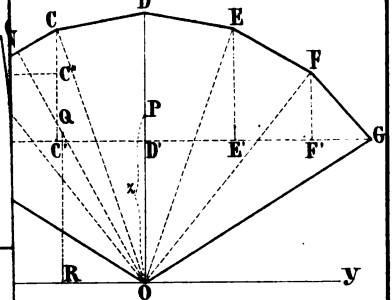


Fig. 87.

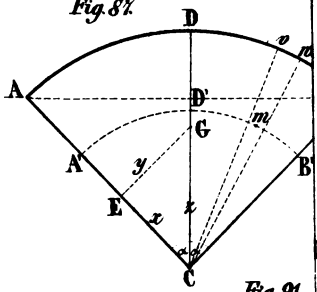


Fig. 90.

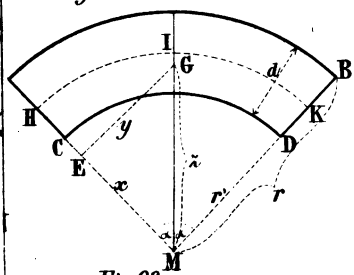


Fig. 91.

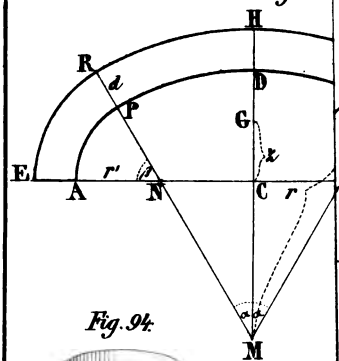


Fig. 93.

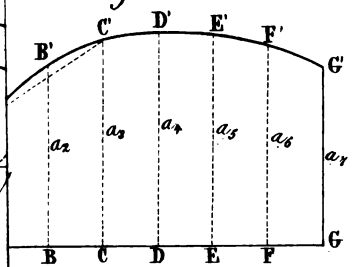


Fig. 94.

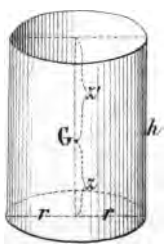
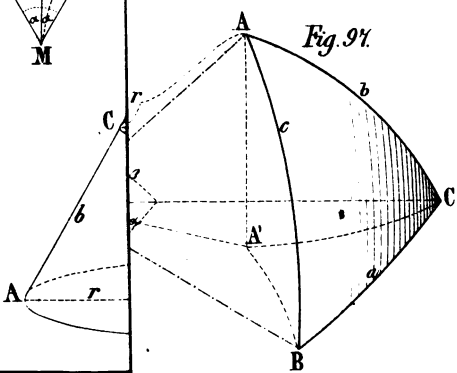
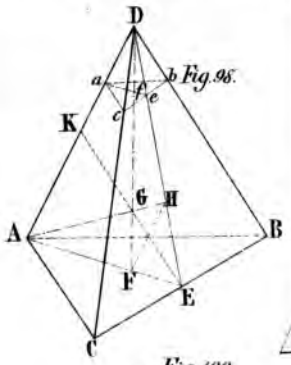
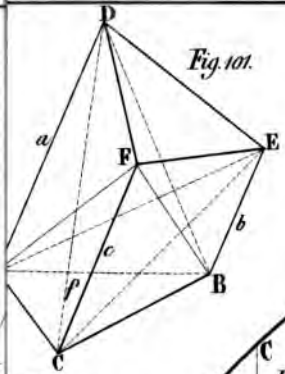


Fig. 97.




D
a
b
Fig. 98.
f
e
K
c
G
H
A
B
F
E
C


D
Fig. 101.
a
F
E
b
c
f
B
C

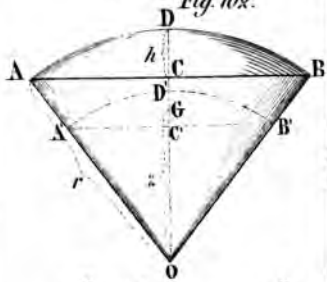
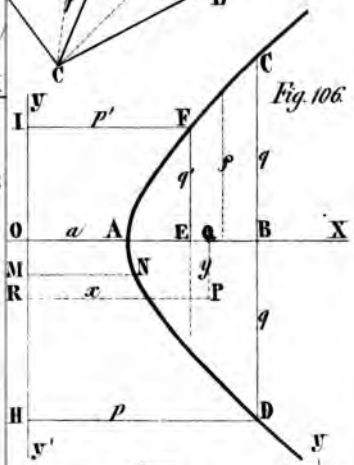


Fig. 102.
D
h
A
C
B
D'
G
X
C'
B'
r
O


C
Fig. 106.
y
I
p'
F
q'
ρ
q
O
a
A
E
Q
B
X
M
N
y
R
x
P
q
H
p
D
y'

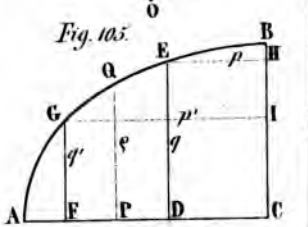
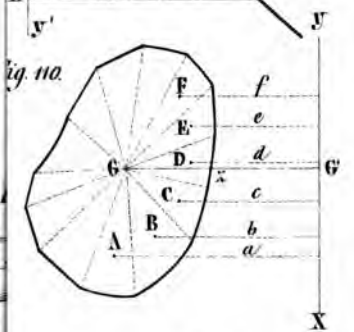
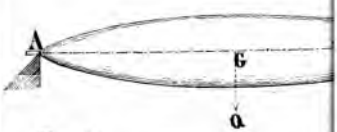


Fig. 105.
B
E
p
H
Q
G
p'
1
q'
ρ
q
A
F
P
D
C


ig. 110.
y
F
f
E
e
D
d
G
G
C
c
B
b
A
a
X


A
G
Q

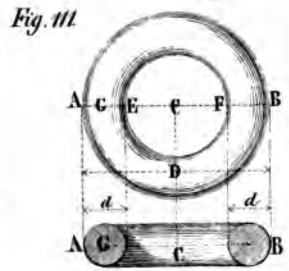


Fig. 111.
A
C
E
e
F
B
D
d
d
A
C
C
B

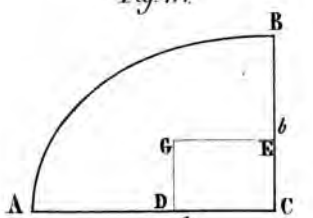


Fig. 114.
B
b
G
E
A
D
C
a

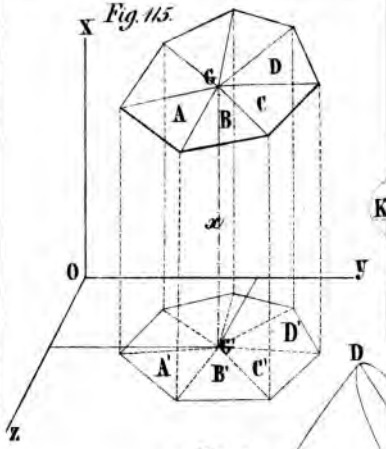


Fig. 115.
X
G
D
A
B
C
O
Y
Z
A'
B'
C'
D'

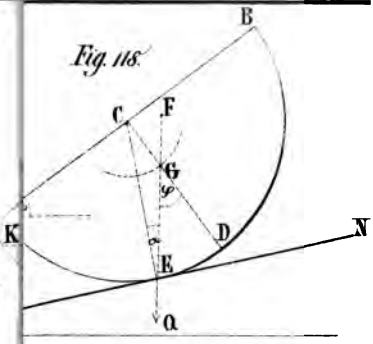


Fig. 118.
B
C
F
G
K
D
N
E
Q

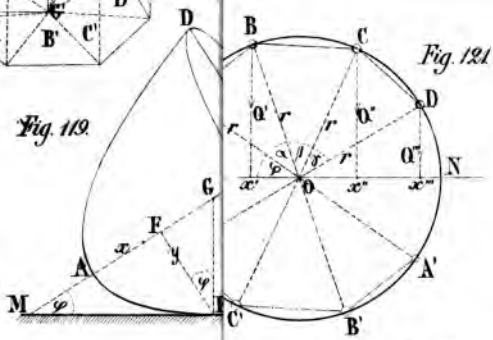


Fig. 119.
D
B
C
Fig. 121.
D
N
G
F
A
A'
M
C'
B'

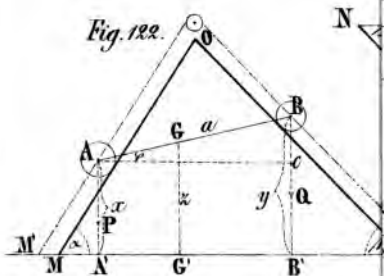
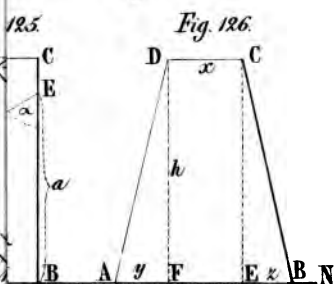


Fig. 122.
O
B
G
A
M'
P
M
A'
G'
B'
Q


125.
N
C
E
B
A
F
B
N
Fig. 126.
D
C
h
B

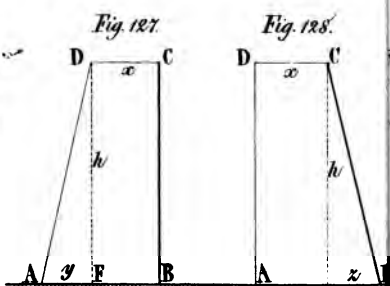


Fig. 127.
D
C
h
A
F
B
Fig. 128.
D
C
h
A

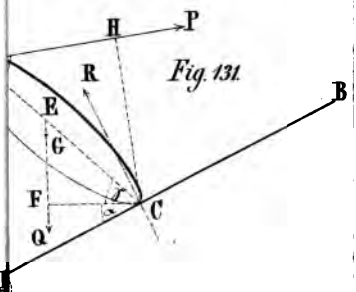

H
P
R
Fig. 131.
B
E
G
F
C
Q

Fig. 132.

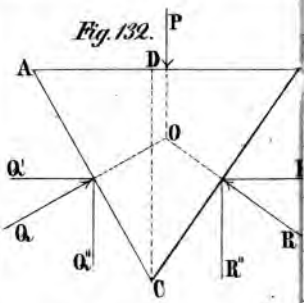
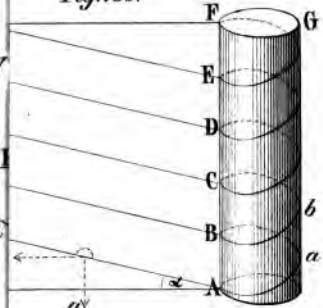


Fig. 135.



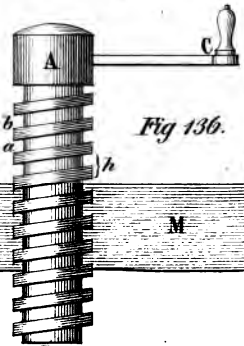


Fig. 136.

Fig. 139.

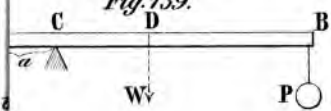


Fig. 140.

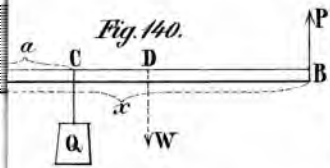
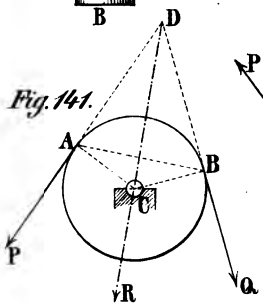


Fig. 144.

Fig. 141.



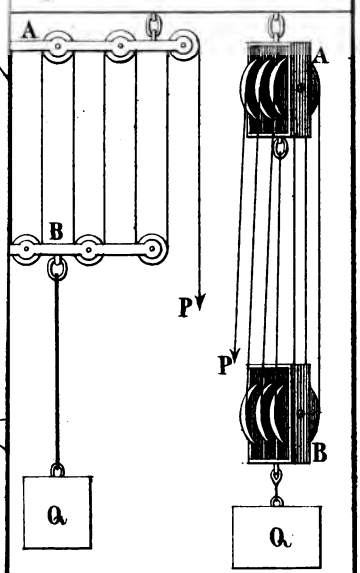
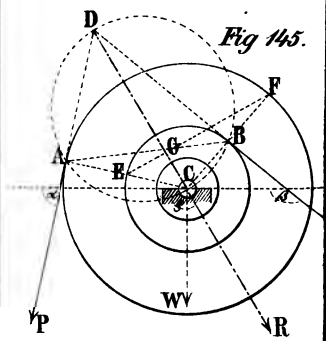
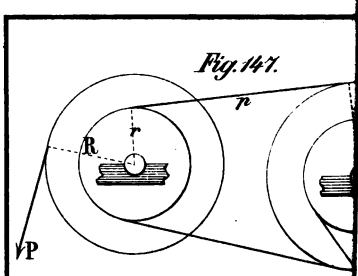


Fig. 145.





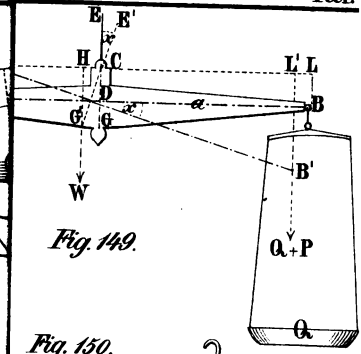


Fig. 149.

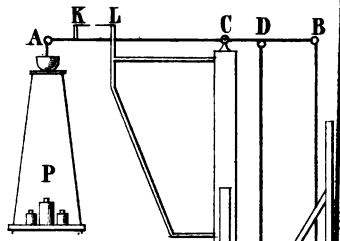
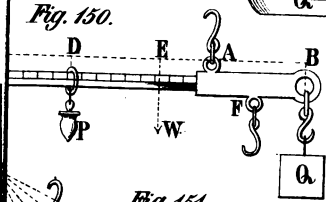
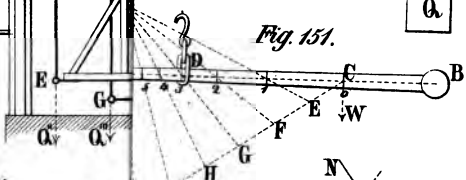
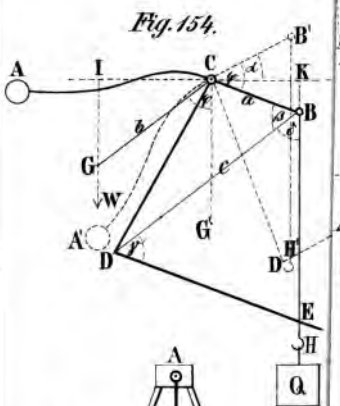
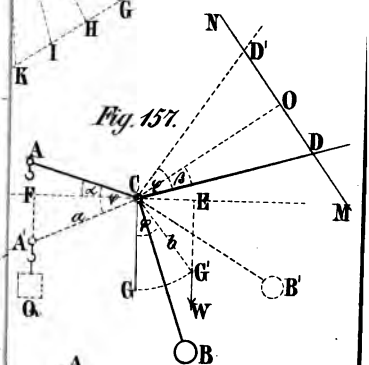


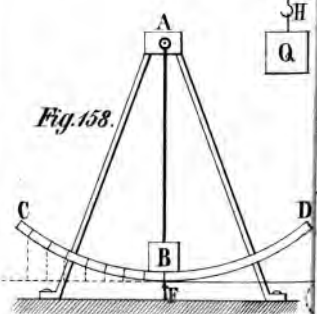
Fig. 150.

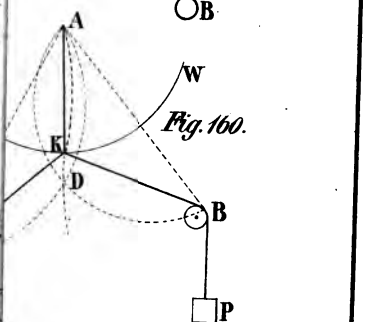












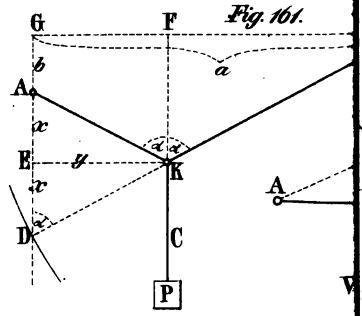


Fig. 161.
G
F
b
a
A
x
E
y
K
v
D
C
P

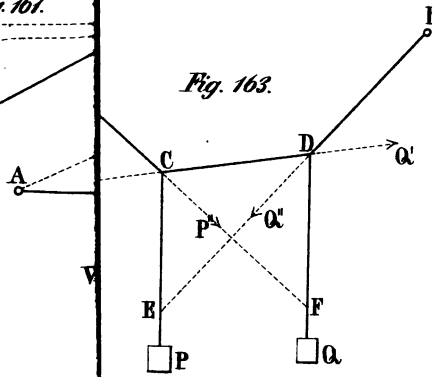


Fig. 163.
I
C
D
Q'
A
P''
Q''
E
F
P
Q

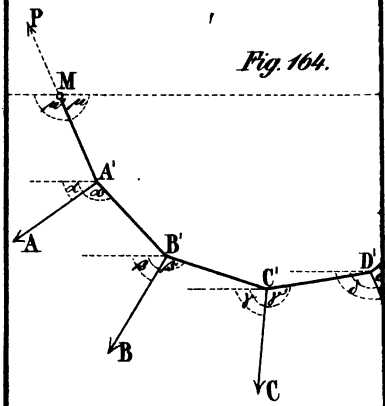


Fig. 164.
P
M
A'
A
B'
C'
D'
B
C

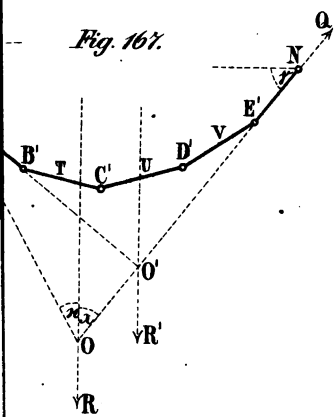


Fig. 167.
Q
N
E'
V
B'
T
C'
U
D'
O'
R'
O
R

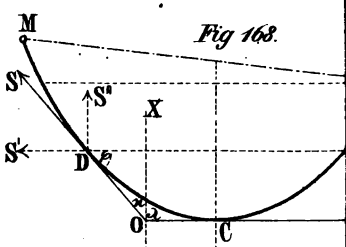


Fig 168.
M
S
S''
X
S'
D
O
C
R

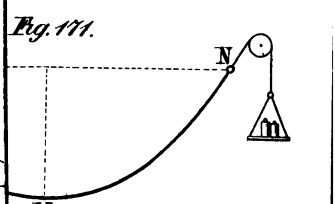


Fig. 171.
N
m
V

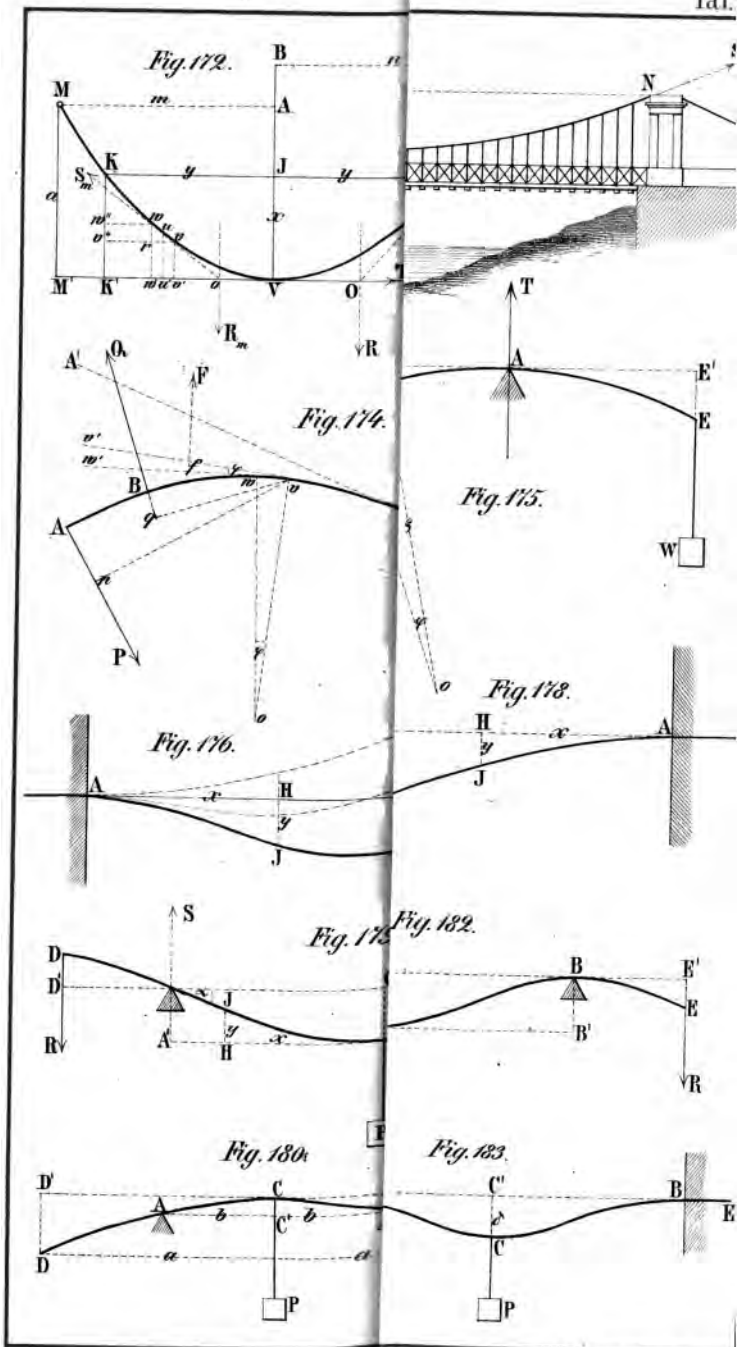


Fig. 172.
Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 178.
Fig. 182.
Fig. 180.
Fig. 183.